1. naloga [15 točk]

V enoobdobnem modelu finančnega trga razpolagamo z delnicama S in W. Danes sta njuni ceni $S_0 = W_0 = 10$ EUR, do trenuka 1 pa lahko njuni vrednosti narasteta ali padeta za 20%. Pri tem sta dinamiki cen delnic S in W neodvisni.

3 (a) Izberite delnico S za numerar in določite pripadajočo ekvivalentno martingalsko verjetnost.

PARAMETRA: – OBE DELNICI DOL
– ENEGA OD MEŠANIH

3 (b) Dokažite, da trg ne dopušča arbitraže.

Opcija na košarico (*basket option*) je izvedeni finančni instrument, katerega izplačila so odvisna od (utežene) sredine vrednosti delnic $S^1, \dots, S^N$. Izplačila opcije na aritmetično sredino so odvisna od zneska $A_t = \frac{1}{N}(S_t^1 + \cdots + S_t^N)$, izplačila opcije na geometrijsko sredino pa od zneska $G_t = \sqrt[N]{S_t^1 \cdots S_t^N}$.

6 (c) Določite premiji evropskih prodajnih opcij na aritmetično in geometrijsko sredino delnic S in W z zapadlostjo 1 in izvršilno ceno $K = 10$. Ali je katera od opcij na trgu dosegljiva?

3 (d) Privzemite, da se je na trgu za prodajno opcijo na aritmetično sredino izoblikovala cena 1.25. Kako to vpliva na premijo prodajne opcije na geometrijsko sredino?

ⓐ $c = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} S \\ W \end{matrix}$ $\qquad M = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 8 & 12 \\ 12 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{matrix}$ $\qquad \tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \\ 1 & 2/3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1 $\left.\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 &= 1 \\ q_1 + \tfrac{3}{2} q_2 + \tfrac{2}{3} q_3 + q_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \ominus$ $\qquad q_1 = 1 - \frac{2}{3} q_3 - q_3 - q_4$

$\underline{q_1 = 1 - \frac{5}{3} q_3 - q_4}$

$\frac{1}{2} q_2 - \frac{1}{3} q_3 = 0$ $\qquad q_3, q_4$ parametra 2

$\underline{q_2 = \frac{2}{3} q_3}$

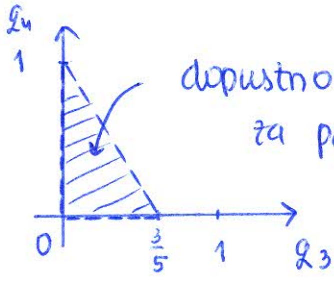
ⓑ Preverimo, da so lahko vsi $q_i > 0$. Potem TBA po 1. osnovnem izreku.

$q_3 > 0 \Rightarrow q_2 > 0$ ✓

$q_4 > 0$

$q_1 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{5}{3} q_3 - q_4 > 0$

$q_4 < 1 - \frac{5}{3} q_3$ 1



dopustno območje za parametra q_3, q_4

2

ⓒ $A_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\qquad X_1 = \max\{10 - A_1, 0\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 1 $\qquad \tilde{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

$\frac{\Pi_0^Q(X_1)}{10} = E^Q(\tilde{X}_1) = \frac{1}{4} \cdot q_4 \Rightarrow \Pi_0^Q(X_1) = \frac{10}{4} q_4 \in \underline{\underline{\left(0, \frac{10}{4}\right)}}$ ni dosegljiva 2

$$G_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ \sqrt{8\cdot 12} \\ \sqrt{8\cdot 12} \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4\sqrt{6} \\ 4\sqrt{6} \\ 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ =9{,}8 \\ =9{,}8 \\ \\ \end{matrix} \qquad Y_1 = \max\{10 - G_1, 0\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10-4\sqrt{6} \\ 10-4\sqrt{6} \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ =0{,}2 \\ =0{,}2 \\ \\ \end{matrix}$$

1

$$\tilde{Y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ (10-4\sqrt{6})/8 \\ (10-4\sqrt{6})/12 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\pi_0^Q(Y_1)}{10} = E^Q(\tilde{Y}_1) = \frac{10-4\sqrt{6}}{8} \cdot \frac{2}{3} q_3 + \frac{10-4\sqrt{6}}{12} \cdot q_3 + \frac{1}{4} q_4 =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{5}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}_{0{,}03} q_3 + \frac{1}{4} q_4$$

$$\pi_0^Q(Y_1) = 10\left(\frac{5}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) q_3 + \frac{10}{4} q_4 \in \underline{\left(0, \frac{10}{4}\right)}$$ ni dosegljiva 2

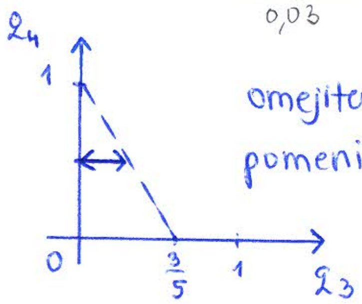
najmanj pri $q_3 = q_4 = 0$

največ pri : $q_3 = \frac{3}{5}, q_4 = 0 \Rightarrow 10 - 4\sqrt{6} = 0{,}2$ X

$q_3 = 0, \; q_4 = 1 \Rightarrow \frac{10}{4} = 2{,}5$ ✓

(d) $\pi_0^Q(X_1) = \frac{10}{4} q_4 = 1{,}25 \Rightarrow q_4 = \frac{4 \cdot 1{,}25}{10} = \underline{\frac{1}{2}}$ 1

$$\pi_0^Q(Y_1) = 10\underbrace{\left(\frac{5}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}_{0{,}03} q_3 + \frac{10}{8} \in \left(\frac{5}{4}, \cancel{10}\cdot\left(\frac{5}{\cancel{3}} - \frac{2\sqrt{6}}{\cancel{3}}\right)\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{10}} + \frac{5}{4}\right) =$$



$$= \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4} + 5 - 2\sqrt{6}\right) = \underline{(1.25, 1.351)}$$

2

omejitev $q_4 = \frac{1}{2}$

pomeni $q_3 \in \left(0, \frac{3}{10}\right)$

2. naloga [15 točk]

Privzemite dvoobdobni model trga. Delnica S je danes vredna $S_0 = 60$ EUR, njena vrednost pa v vsakem obdobju lahko zraste ali pade za 5%. Na netveganem bančnem računu v prvem obdobju obrestna mera znaša 2%, v drugem pa 3%. Na delnico zapišemo tri opcije z zapadlostjo 2.

3 (a) Narišite drevo dogodkov in izračunajte do tveganja nevtralne verjetnosti ~~vseh možnih~~ stanj v času 2.

4 (b) Prva opcija je ameriška prodajna opcijo z izvršilno ceno 62 EUR. Določite njeno premijo.

Premija in nič drugega!

Finančni instrumenti, katerih izplačila so odvisna od povprečne cene delnice v nekem časovnem obdobju, so *azijski instrumenti*. Označimo z $\overline{S}_t = \frac{1}{t+1}(S_0 + \cdots + S_t)$ drseče povprečje cene delnice.

4 (c) Druga opcija je *prodajna opcija s povprečno izvršilno ceno* (*average strike put*). Ta finančni instrument ob zapadlosti T omogoča izplačilo $\max\{\overline{S}_T - S_T, 0\}$, pred zapadlostjo pa ničesar. Določite premijo opcije v času 0.

4 (d) Tretja opcija je *havajska prodajna opcija* (*Hawaiian put*). To je instrument ameriškega tipa z azijsko izvršilno ceno in ob izvršitvi v trenutku t imetniku ponuja izplačilo $\overline{S}_t - S_t$. Izvršitev opcije ni obvezna. Določite premijo opcije v času 0.

(a)

$B: 1 \longrightarrow 1{,}02 \longrightarrow 1{,}02 \cdot 1{,}03$

$S: 60 \xrightarrow{\frac{7}{10}} 63$, $60 \xrightarrow{\frac{3}{10}} 57$

$63 \xrightarrow{\frac{4}{5}} 66{,}15$, $63 \xrightarrow{\frac{1}{5}} 59{,}85$

$57 \xrightarrow{\frac{4}{5}} 59{,}85$, $57 \xrightarrow{\frac{1}{5}} 54{,}15$

$$q_1 = \frac{1{,}02 - 0{,}95}{1{,}05 - 0{,}95} = \frac{7}{10} \quad 1$$

$$q_2 = \frac{1{,}03 - 0{,}95}{1{,}05 - 0{,}95} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad 1$$

$$Q(uu) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{50} = \frac{14}{25}$$

$$Q(ud) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{50}$$

$$Q(du) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25} \quad 1$$

$$Q(dd) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$$

(b) Ameriška prodajna, $Z_t = \max\{62 - S_t, 0\}$

$t = 2$: $V_{uu} = \max\{62 - 66{,}15; 0\} = 0$

$V_{ud} = \max\{62 - 59{,}85; 0\} = 2{,}15$

$V_{dd} = \max\{62 - 54{,}15; 0\} = 7{,}82 \quad 2$

$t = 1$: $V_u = \max\{62 - 63; \frac{1}{1{,}03}(\frac{4}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 2{,}15)\} = 0{,}4175$

$V_d = \max\{62 - 57; \frac{1}{1{,}03}(\frac{4}{5} \cdot 2{,}15 + \frac{1}{5} \cdot 7{,}82)\} = 5$

$t = 0$: $V_0 = \max\{62 - 60; \frac{1}{1{,}03}(\frac{7}{10} \cdot 0{,}4175 + \frac{3}{10} \cdot 5)\} = 2 = p_0^A \quad 2$

ⓒ Izplačila ob zapadlosti odvisna od poti

Stanje	Cena S_2	Povprečje $\overline{S}_2$	Izplačilo	Verjetnost Q
uu	66,15	63,05	0	$\frac{14}{25}$
ud	59,85	60,95	1,1	$\frac{7}{50}$
du	59,85	58,95	0	$\frac{6}{25}$
dd	54,15	57,05	2,9	$\frac{3}{50}$

2

$$\text{premija} = \frac{1}{1{,}02 \cdot 1{,}03} \cdot \left(1{,}1 \cdot \frac{7}{50} + 2{,}9 \cdot \frac{3}{50}\right) = \underline{\underline{0{,}3122 \text{ EUR}}}$$ 2

ⓓ Havajska opcija: Na drevo dopišemo aritmetična povprečja in notranjo vrednost opcije

S: 60 / 60 / 0

61,5 / 63 / 0

58,5 / 57 / 1,5

66,15 / 63,05 / 0

59,85 / 60,95 / 1,1

59,85 / 58,98 / 0

59,85 / 57,05 / 2,9

$$\overline{S}_t = \frac{1}{t+1}(S_0 + \dots + S_t)$$

$$Z_t = \max\{\overline{S}_t - S_t, 0\}$$

$t=2$: $V_{uu} = 0$

$V_{ud} = 1{,}1$

$V_{du} = 0$

$V_{dd} = 2{,}9$ 2

$t=1$: $V_u = \max\left\{0; \frac{1}{1{,}03}\left(0 \cdot \frac{4}{5} + 1{,}1 \cdot \frac{1}{5}\right)\right\} = 0{,}2136$

$V_d = \max\left\{1{,}5; \frac{1}{1{,}03}\left(0 \cdot \frac{4}{5} + 2{,}9 \cdot \frac{1}{5}\right)\right\} = 1{,}5$

$t=0$: $V_0 = \max\left\{0; \frac{1}{1{,}02}\left(0{,}2136 \cdot \frac{7}{10} + 1{,}5 \cdot \frac{3}{10}\right)\right\} = \underline{\underline{0{,}5878 = p_0^H}}$ 2

3. naloga [20 točk]

V trenutku 0 so objavljene naslednje netvegane navadne obrestne mere (m = mesec)

$L(0,\frac{1}{2}) =$	6m Euribor	2.00%	12 × 18 FRA	2.70%	$= L(0,1,\frac{3}{2})$
$L(0,1) =$	12m Euribor	2.15%	18 × 24 FRA	3.15%	$= L(0,\frac{3}{2},2)$

Pri tem $a \times b$ FRA pomeni s terminskim poslom vnaprej dogovorjeno obrestno mero za obdobje, ki se prične čez a in konča čez b mesecev.

3 (a) Določite časovno strukturo navadne obrestne mere za naslednjih 1,5 let.

11 (b) Dokažite, da s portfeljem FRA-jev in transakcij na bančnem računu lahko pripravimo 1.5-letni amortizacijski kredit z glavnico v višini milijon evrov in polletnimi anuitetami. Natančno opišite portfelj (strategijo) in izračunajte višino anuitete.

~~*Pomoč: Pri FRA-jih lahko privzamete, da se vrednost instrumenta izplača ob dospetju in ne na dan poravnave.*~~

3 (c) Izračunajte nominalno obrestno mero kredita iz (c).
Opomba: Zapišite in karakterizirajte *enačbo. Analitične rešitve ne potrebujete.*

3 (d) Kolikšen dobiček ~~v času 0~~ ustvari banka, če svojim komitentom ~~omenjeni~~ 1.5-letni kredit z glavnico 10^6 € in s polletnimi anuitetami ponuja po nominalni obrestni meri 4%?

(a) Manjka nam $L(0,\frac{3}{2})$

$$L(0,1,\tfrac{3}{2}) = \frac{1}{\frac{3}{2}-1}\left(\frac{1+\frac{3}{2}\cdot L(0,\frac{3}{2})}{1+1\cdot L(0,1)} - 1\right) = 2\left(\frac{1+\frac{3}{2}L(0,\frac{3}{2})}{1+L(0,1)} - 1\right) \quad 1$$

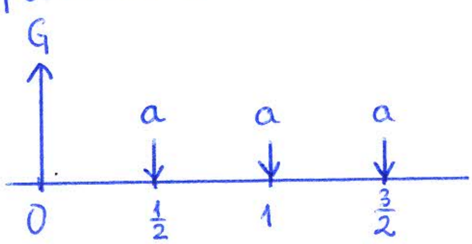
$$\frac{1+\frac{3}{2}L(0,\frac{3}{2})}{1+L(0,1)} = \frac{L(0,1,\frac{3}{2})}{2} + 1$$

$$1+\tfrac{3}{2}L(0,\tfrac{3}{2}) = \left(1+\tfrac{1}{2}L(0,1,\tfrac{3}{2})\right)\left(1+L(0,1)\right)$$

$$L(0,\tfrac{3}{2}) = \frac{2}{3}\left[\left(1+\tfrac{1}{2}L(0,1,\tfrac{3}{2})\right)\left(1+L(0,1)\right) - 1\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot 0{,}027\right)\left(1+0{,}0215\right) - 1\right] = \underline{\underline{2{,}35\%}} \quad 2$$

(b) Sposodimo si 3 zneske in jih vrnemo ob 3 različnih časih



$G = 1000\,000$ EUR

$$G = a\cdot D(0,\tfrac{1}{2}) + a\cdot D(0,1) + a\cdot D(0,\tfrac{3}{2}) \quad 1$$

$$G = a\left(D(0,\tfrac{1}{2}) + D(0,1) + D(0,\tfrac{3}{2})\right)$$

$$a = \frac{G}{D(0,\frac{1}{2}) + D(0,1) + D(0,\frac{3}{2})}$$

$$a = \frac{1000\,000}{\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02} + \frac{1}{1+0{,}0215} + \frac{1}{1+\frac{3}{2}\cdot 0{,}0235}} = \underline{\underline{340\,719{,}66 \text{ EUR}}} \quad 2$$

Strategija:

$t=0$: – sposodi si $a\cdot D(0,\frac{1}{2})$ do $\frac{1}{2}$

– sposodi si $aD(0,1)$ do 1

– sposodi si $aD(0,\frac{3}{2})$ do 1

– dogovori se za izposojo $aD(0,\frac{3}{2})\cdot A(0,1)$ od 1 do $\frac{3}{2}$ po obrestni meri $L(0,1,\frac{3}{2})$ 3

$$u_0 = aD(0,\tfrac{1}{2}) + aD(0,1) + aD(0,\tfrac{3}{2}) + 0 = G \quad (\equiv \text{prejmi glavnico})$$

$t=\frac{1}{2}$: – vrni $aD(0,\frac{1}{2})$ z obrestmi

$$u_{\frac{1}{2}} = -aD(0,\tfrac{1}{2})\cdot A(0,\tfrac{1}{2}) = -a \quad (\equiv \text{prva anuiteta})$$ 1

$t=1$: – vrni $aD(0,1)$ z obrestmi

– vrni $aD(0,\frac{3}{2})$ z obrestmi

– sposodi si $aD(0,\frac{3}{2})A(0,1)$ do $\frac{3}{2}$ po $L(0,1,\frac{3}{2})$ 2

$$u_1 = -aD(0,1)\cdot A(0,1) - aD(0,\tfrac{3}{2})\cdot A(0,1) + aD(0,\tfrac{3}{2})\cdot A(0,1) = -a$$

($\equiv$ druga anuiteta)

$t=\frac{3}{2}$: – vrni $aD(0,\frac{3}{2})\cdot A(0,1)$ z obrestmi

$$u_{\frac{3}{2}} = -a\underbrace{D(0,\tfrac{3}{2})\cdot A(0,1)\cdot A(0,1,\tfrac{3}{2})} = -a \quad (\equiv \text{tretja anuiteta})$$

$$\left.\begin{aligned} A(0,1)\cdot A(0,1,\tfrac{3}{2}) &= A(0,\tfrac{3}{2}) \quad / \cdot D(0,\tfrac{3}{2}) \\ A(0,1)\cdot A(0,1,\tfrac{3}{2})\cdot D(0,\tfrac{3}{2}) &= 1 \end{aligned}\right\}$$ definicija terminskih obr. / dist. faktorjev 2

(c) Nominalna obrestna mera R

polletno obrestovanje $\Rightarrow r = \frac{R}{2}$

veljati mora $\quad a = G\cdot \dfrac{r\cdot(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ 2, kjer je $n=3$

$G = 1000000$ EUR

$a = 340\,719{,}66$ EUR

$$a\left((1+r)^3-1\right) = G\cdot r\,(1+r)^3$$

$$a\left(1+3r+3r^2+r^3-1\right) = G\cdot r\left(1+3r+3r^2+r^3\right)$$

$$3ar + 3ar^2 + ar^3 = Gr + 3Gr^2 + 3Gr^3 + Gr^4$$

$$Gr^4 + (3G-a)r^3 + (3G-3a)r^2 + (G-3a)r = 0$$ 1

Polinomska enačba 4 stopnje : $r = 0{,}01104 \Rightarrow R = 2{,}21\,\%$

(vrednici 3., ker se r izpostavi)

(d) Banka ponuja komitentom $R = 4\% \Rightarrow r = 2\%$, $n = 3$

$$a_1 = G \cdot \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$a_1 = 1000\,000 \ \frac{0{,}02 \cdot 1{,}02^3}{1{,}02^3 - 1} = \underline{346\,754{,}67 \text{ EUR}} \quad 2$$

Banka ob vsaki anuiteti obdrži $a_2 - a = \underline{\underline{6035{,}02 \text{ EUR}}}$ 1