Pisni izpit: 12. september 2011

1. naloga

(a) **[4 točke]**

Pri podatkih $S_0 = 80$ EUR, $R = 2\%$, $u = 1.05$, $d = 0.95$ in $T = 2$ narišemo binomsko drevo.

$$B: \ 1 \ \text{———} \ 1.02 \ \text{———} \ 1.02^2$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 88.2 \\
 & & 84 & \nearrow & \\
S: \ 80 & \nearrow & & \searrow & \\
 & \searrow & & \nearrow & 79.8 \\
 & & 76 & & \\
 & & & \searrow & 72.2
\end{array}$$

ter izračunamo do prihodnosti nevtralno prehodno verjetnost $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{7}{10}$.
Premija opcije v času 1 je slučajna premenljivka z dvema možnima vrednostima.

– V vozlišču u lahko pričakujemo naslednja izplačila

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo C_2	Verjetnost Q
u^2	88.2	6.2	$\frac{7}{10}$
ud	79.8	0	$\frac{3}{10}$

zato cena opcije znaša $c_u^{\mathrm{E}} = \frac{6.2}{1.02} \cdot \frac{7}{10} = 4.2549$ EUR.

– V vozlišču d sta obe možni končni izplačili enaki 0, zato $c_d^{\mathrm{E}} = 0$ EUR.

Cena opcije v trenutku 1 je zato slučajna spremenljivka $c_1^{\mathrm{E}} \overset{Q}{\sim} \begin{pmatrix} 4.2549 & 0 \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

(b) **[4 točke]**

Tudi tu je premija opcije v času 1 slučajna premenljivka z dvema možnima vrednostima.

– V vozlišču u lahko pričakujemo naslednja izplačila

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo P_2	Verjetnost Q
u^2	88.2	0	$\frac{7}{10}$
ud	79.8	2.2	$\frac{3}{10}$

zato cena opcije znaša $p_u^{\mathrm{E}} = \frac{2.2}{1.02} \cdot \frac{3}{10} = 0.6471$ EUR.

– V vozlišču d lahko pričakujemo naslednja izplačila

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo Y_2	Verjetnost Q
ud	79.8	2.2	$\frac{7}{10}$
d^2	72.2	9.8	$\frac{3}{10}$

zato cena opcije znaša $p_d^{\mathrm{E}} = \frac{1}{1.02}(2.2 \cdot \frac{7}{10} + 9.8 \cdot \frac{3}{10}) = 4.3922$ EUR.

Cena opcije v trenutku 1 je zato slučajna spremenljivka $p_1^{\mathrm{E}} \overset{Q}{\sim} \begin{pmatrix} 0.6471 & 4.3922 \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

(c) **[4 točke]**

Opcijo izbire vrednotimo ob predpostavki, da bo imetnik v trenutku odločitve izbral opcijski tip, ki je vreden več. Tako se bo v času 1 v stanju u odločil za nakupno z vrednostjo 4.2549 EUR, v stanju d pa za prodajno z vrednostjo 4.3922 EUR.

Cena opcije izbire zato znaša $c_0 = \frac{1}{1.02}(4.2549 \cdot \frac{7}{10} + 4.3922 \cdot \frac{3}{10}) = 4.2118$ EUR.

(d) **[3 točke]**

Ker je investitor indiferenten do nakupa ali prodaje osnovnega instrumenta, gre za špekulanta. Prepričan je, da bo v času življenja opcije (do trenutka odločitve) dobil informacije, ki bodo nakazovale prihodnje gibanje tečajev.

2. naloga

(a) **[3 točke]**

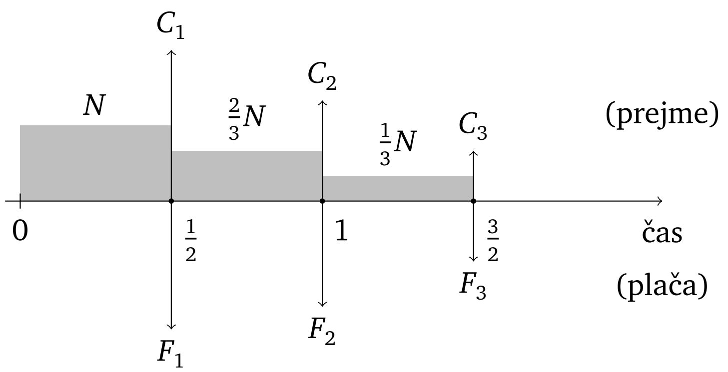
Dolga pozicija v amortizacijski zamenjavi je enakovredna portfelju dolgih pozicij v dogovorih o terminski obrestni meri, kjer ima $i-$ti dogovor navidezno glavnico N_i, datum poravnave t_{i-1}, dan dospetja t_i in dogovorjeno obrestno mero $L_{\mathrm{FRA}} = L_{\mathrm{SWAP}}$.

Pri tem upoštevamo, da je prvi dogovor v resnici kar trenutna bančna transakcija, in privzamemo, da se vrednosti FRAjev izplačajo ob dospetju in ne ob dnevu poravnave.

(b) **[8 točk]**

Uporabimo $N = 100\,000$ EUR, $n = 3$ in $\Delta = \frac{1}{2}$ in izračunamo $N_1 = N$, $N_2 = \frac{2}{3}N$ in $N_3 = \frac{1}{3}N$.

Narišemo prihodnje denarne tokove za imetnika kratke pozicije.



Vrednotimo kot portfelj FRAjev z različnimi navideznimi glavnicami.

$V_0^{\mathrm{SWAP}} = \sum_{i=1}^{n} N_i \Delta (L_{\mathrm{SWAP}} - L(0, t_{i-1}, t_i)) D(0, t_i)$,

pri čemer upoštevamo $L(0, 0, \frac{1}{2}) = L(0, \frac{1}{2}) = 1.50\%$,

$L(0, \frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \left(\frac{1+1\cdot L(0,1)}{1+\frac{1}{2}\cdot L(0,\frac{1}{2})} - 1 \right) = 0.01985$ in $L(0, 1, \frac{3}{2}) = 0.03047$.

Dobimo $V_0^{\mathrm{SWAP}} = 50000(0.025 - 0.015) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot 0.015} + 50000 \cdot \frac{2}{3}(0.025 - 0.01985) \cdot \frac{1}{1+1\cdot 0.0175} + 50000 \cdot \frac{1}{3}(0.025 - 0.03047) \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{2}\cdot 0.022} = 576.75$ EUR.

(c) **[4 točke]**

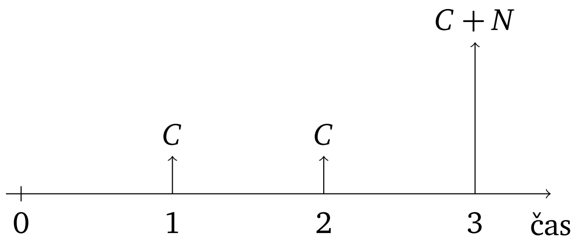
Rešujemo enačbo $0 = \sum_{i=1}^{n} N_i \Delta(L_{\text{SWAP}} - L(0, t_{i-1}, t_i))D(0, t_i)$ oziroma
$0 = \frac{N}{2}(L_{\text{SWAP}} - L(0, \frac{1}{2})) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}L(0,\frac{1}{2})} + \frac{N}{3}(L_{\text{SWAP}} - L(0, \frac{1}{2}, 1)) \cdot \frac{1}{1+L(0,1)} + \frac{N}{6}(L_{\text{SWAP}} - L(0, 1, \frac{3}{2})) \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{2}L(0,\frac{3}{2})}$.

Dobimo $L_{\text{SWAP}} = \dfrac{\frac{N}{2} \cdot \frac{L(0,\frac{1}{2})}{1+\frac{1}{2}L(0,\frac{1}{2})} + \frac{N}{3} \cdot \frac{L(0,\frac{1}{2},1)}{1+L(0,1)} + \frac{N}{6} \cdot \frac{L(0,1,\frac{3}{2})}{1+\frac{3}{2}L(0,\frac{3}{2})}}{\frac{N}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}L(0,\frac{1}{2})} + \frac{N}{3} \cdot \frac{1}{1+L(0,1)} + \frac{N}{6} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{2}L(0,\frac{3}{2})}} = 1.92\%$

3. naloga

(a) **[4 točke]**

Ceno obveznice določimo z diskontiranjem njenih prihodnjih denarnih tokov.



Pri podatkih $N = 100$ EUR in $c = 5\%$ izračunamo $C = cN = 5$ EUR in
$P_0^{\text{CB}} = C(D(0,1)+D(0,2))+(C+N)D(0,3) = 5(e^{-0.0275}+e^{-2\cdot 0.037})+105e^{-3\cdot 0.0435} = 101.66$ EUR.

(b) **[5 točk]**

Za premijo prodajne opcije z zapadlostjo $T = 2$ v času 0 veljata oceni

$\max\{KD(0,T)+I(0,T)-S_0, 0\} \leq p_0^{\text{E}} \leq KD(0,T)$,

pri čemer je $S_0 = P_0^{\text{CB}}$ in $I(0,T) = 5(e^{-0.0275} + e^{-2\cdot 0.037}) = 9.5077$ EUR sedanja vrednost kuponov, izplačanih v času življenja opcije.

Izračunamo še $KD(0,T) = 100e^{-2\cdot 0.037} = 92.8672$ EUR in dobimo

$0.7132 \text{ EUR} \leq p_0^{\text{E}} \leq 92.8672 \text{ EUR}$.

(c) **[7 točk]**

Ker na trgu velja $p_0^{\text{E}} = 0.5$, kar pade izven meja iz naloge (b), je mogoča arbitraža.

Na trgu velja $p_0^{\text{E}} < KD(0,T)+I(0,T)-P_0^{\text{CB}}$, torej $-p_0^{\text{E}}+KD(0,T)+I(0,T)-P_0^{\text{CB}} > 0$, kar nam pomaga skonstruirati arbitražno strategijo.

- čas $t = 0$: kupimo prodajno opcijo,
  sposodimo si znesek $KD(0,2)$ do časa 2,
  sposodimo si znesek $CD(0,1)$ do časa 1,
  sposodimo si znesek $CD(0,2)$ do časa 2,
  kupimo obveznico.

  Začetno izplačilo strategije znaša $U_0 = -p_0^{\mathrm{E}} + KD(0,T) + I(0,T) - P_0^{\mathrm{CB}} > 0$.

- čas $t = 1$: prejmemo kupon,
  vrnemo znesek $CD(0,1)$ z obrestmi.

  Vmesmo izplačilo strategije znaša $U_1 = C - C = 0$.

- čas $t = 2$: prejmemo kupon,
  vrnemo znesek $CD(0,2)$ z obrestmi,
  izvršimo prodajno opcijo, če se to splača,
  vrnemo znesek $KD(0,2)$ z obrestmi,
  prodamo obveznico.

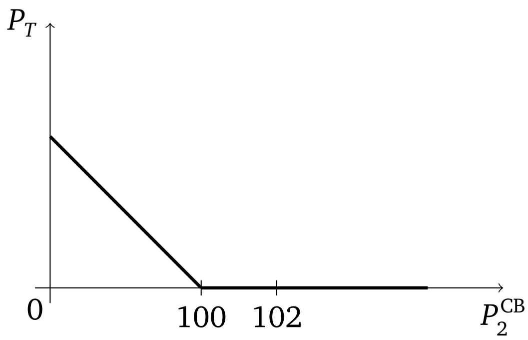
  Končno izplačilo strategije znaša

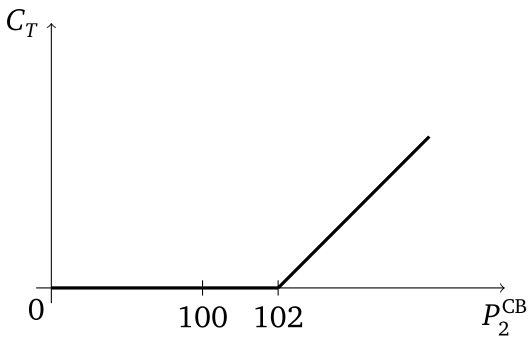
  $$U_2 = C - C + \max\{K - P_2^{\mathrm{CB}}, 0\} - K + P_2^{\mathrm{CB}} = \max\{0, P_2^{\mathrm{CB}} - K\} \geq 0.$$

Strategija U je arbitražna

(d) [**4 točke**]

Najprej prikažimo izplačila opcij ob zapadlosti kot funkcijo cene obveznice v času 2.





Opazimo, da opciji ponujata enaki izplačili le tedaj, ko nobena izmed njiju ne izplača ničesar, torej ko po izplačilu kupona v času 2 velja $100 \leq P_2^{\mathrm{CB}} \leq 102$.

To je $100 \leq 105e^{-Y(2,3)} \leq 102$, kar privede do rešitve $2.90\% \leq Y(2,3) \leq 4.88\%$.