1. naloga [15 točk]

Vlagateljica ~~je~~ bi z banko sklenila dvoletno zamenjavo obrestnih mer, po kateri mora vlagateljica enkrat na leto plačati konstanten znesek C, banka pa vsake pol leta znesek, odvisen od pollетne obrestne mere Euribor, objavljene na začetku obrestovalnega obdobja. Navidezna glavnica zamenjave je 500 000 EUR, vlagateljica bi prvi znesek plačala čez 1 leto, banka pa čez pol leta.

6 (a) Na trgu veljajo naslednje netvegane navadne obrestne mere (Euribor)

t	0.5	1.0	1.5	2.0
$L(0,t)$	0.65%	0.90%	1.35%	1.90%

Določite znesek C, pri katerem bo vrednost zamenjave ob sklenitvi enaka 0.

6 (b) Vlagateljica banki predlaga plačevanje letnih zneskov v višini $C' = 10\ 000$ EUR. Banka se s ponudbo strinja. Kolikšen pribitek/odbitek mora banka dodati spremenljivi obrestni meri Euribor, da bo vrednost zamenjave ob sklenitvi enaka 0?

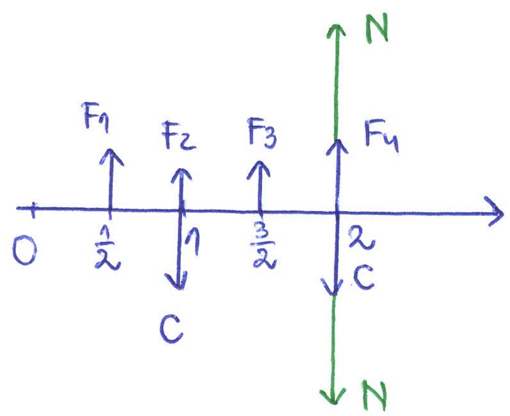
3 (c) Devet mesecev po sklenitvi zamenjave je dana nova časovna struktura navadnih obrestnih mer

$L(0{,}5,1) = 0{,}60\%$

t	1.0	1.5	2.0
$L(0.75,t)$	0.40%	0.85%	1.25%

Določite vrednost zamenjave s stališča vlagateljice.

ⓐ Shema denarnih tokov za vlagateljico



Dodamo navidezno glavnico N na obe strani in vrednotimo kot portfelj dveh obveznic.

$$V_0^{SWAP} = P_0^{FL} - P_0^{CB} \qquad 2$$

$$P_0^{FL} = N$$

$$P_0^{CB} = C \cdot D(0,1) + (C+N) \cdot D(0,2) \qquad 2$$

$$V_0^{SWAP} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$N = C\big(D(0,1) + D(0,2)\big) + N \cdot D(0,2)$$

$$C = \frac{N(1 - D(0,2))}{D(0,1) + D(0,2)} = \frac{N\left(1 - \frac{1}{1+2\cdot 0{,}019}\right)}{\frac{1}{1+0{,}009} + \frac{1}{1+0{,}019}} = \underline{9365{,}41 \text{ EUR}} \qquad 2$$

(b) Vlagateljica želi plačevati $c' = 10\,000$ EUR, torej več

$\Rightarrow$ rabimo <u>pribitek $\delta > 0$</u>

Banka bo plačevala $F_i' = N \cdot \underset{1/2}{\underset{\parallel}{\Delta}} \cdot \left(L\left(\frac{i-1}{2}, \frac{i}{2}\right) + \delta \right) = F_i + N \cdot \Delta \cdot \delta$

$V_0^{SWAP} = P_0^{FL\delta} - P_0^{CB}$ 2

$P_0^{CB} = c' D(0,1) + (c'+N) D(0,2)$

$P_0^{FL\delta} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stari floater}}}{N} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sedanja vrednost "pribitkov"}}}{N \Delta \delta} \left(D(0,\tfrac{1}{2}) + D(0,1) + D(0,\tfrac{3}{2}) + D(0,2) \right) \leftarrow$ 2

$V_0^{SWAP} = 0 \Leftrightarrow \quad c' D(0,1) + (c'+N) D(0,2) = N + N\Delta\delta \left(D(0,\tfrac{1}{2}) + \dots + D(0,2) \right)$

$$\delta = \frac{c' D(0,1) + (c'+N) D(0,2) - N}{N\Delta \left(D(0,\tfrac{1}{2}) + D(0,1) + D(0,\tfrac{3}{2}) + D(0,2) \right)}$$

$$\delta = \frac{\frac{10\,000}{1+0{,}009} + \frac{510\,000}{1+2\cdot 0{,}019} - 500\,000}{250\,000 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}0065} + \frac{1}{1+0{,}009} + \frac{1}{1+\frac{3}{2}\cdot 0{,}0135} + \frac{1}{1+2\cdot 0{,}019} \right)} =$$

$= \underline{\underline{0{,}1692\,\%}}$ 2

(c) $t = 3/4$

$V_{3/4}^{SWAP} = P_{3/4}^{FL\delta} - P_{3/4}^{CB}$

$P_{3/4}^{CB} = c' D(3/4, 1) + (c'+N) D(3/4, 2) =$

$= \frac{10\,000}{1+\frac{1}{4}\cdot 0{,}004} + \frac{510000}{1+\frac{5}{4}\cdot 0{,}0125} = \underline{512\,143{,}86 \text{ EUR}}$ 3

$P_{3/4}^{FL\delta} = (N + F_2) D(\tfrac{3}{4}, 1) + N\Delta\delta \left(D(3/4, 1) + D(3/4, 3/2) + D(3/4, 2) \right)$

$F_2 = N \cdot \Delta \cdot L(\tfrac{1}{2}, 1) = 250\,000 \cdot 0{,}006 = \underline{1500{,}00 \text{ EUR}}$

$P_{3/4}^{FL\delta} = \frac{501500}{1+\frac{1}{4}\cdot 0{,}004} + 432{,}10 \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}\cdot 0{,}004} + \frac{1}{1+\frac{3}{4}\cdot 0{,}0085} + \frac{1}{1+\frac{5}{4}\cdot 0{,}0125} \right) =$

$= \underline{502\,258{,}69 \text{ EUR}}$

$V_0^{SWAP} = \underline{\underline{9885{,}17 \text{ EUR}}}$

2. naloga [15 točk]

Delnica podjetja B je danes vredna $S_0 = 50$ EUR. Podjetje je ob času 0 najavilo, da bo čez 3 mesece izplačalo dividende v višini 0.70 EUR na delnico, čez 9 mesecev pa dividendo v višini 1.50 EUR na delnico. Privzemite naslednjo časovno strukturo netveganih moči obresti

t	0.25	0.50	0.75	1.00
$Y(0,t)$	3.00%	3.15%	3.25%	3.30%

3 (a) Kaj lahko poveste o premiji ameriške prodajne opcije, napisane na delnico podjetja B, z zapadlostjo 6 mesecev in izvršilno ceno $K = 52$ EUR?

3 (b) Ali je možna arbitraža, če je premija opisane opcije na trgu enaka $p_0^A = 1.80$ EUR? Če da, pripravite arbitražno strategijo in določite arbitražni zaslužek?

6 (c) Privzemite, da je premija opcije iz točke (a) enaka $p_0^A = 2.80$ EUR. Kaj lahko poveste o premijah ameriške nakupne ter evropske nakupne in prodajne opcije z isto izvršilno ceno in zapadlostjo?

3 (d) Ali je možna arbitraža, če je premija evropske prodajne opcije na trgu enaka $p_0^E = 3.00$ EUR? Če da, pripravite arbitražno strategijo in določite arbitražni zaslužek?

$S_0 = 50$ $\qquad T = 1/2$

$d_1 = 0{,}7$ ob $t_1 = 1/4$ $\qquad K = 52$

$d_2 = 1{,}5$ ob $t_2 = 3/4$ NI POMEMBNO!

(a) Ameriška prodajna opcija

$\max\{K\cdot D(0,1/2) + I(0,1/2) - S_0,\ K - S_0,\ 0\} \leq p_0^A \leq K$ 1

$$\max\{\underbrace{\underbrace{52\cdot e^{-1/2\cdot 0{,}0315}}_{51{,}18742} + \underbrace{0{,}7\cdot e^{-1/4\cdot 0{,}03}}_{0{,}69477} - 50}_{1{,}88},\ \underbrace{52-50}_{2},\ 0\} \leq p_0^A \leq K$$

$$\underline{\underline{2 \leq p_0^A \leq K}}$$ 2

(b) Arbitraža je možna: kupi opcijo in jo takoj izvrši:
dobiček $-1{,}8 + (52-50) = 0{,}2$ na vsako opcijo 3

(c) $p_0^A = 2{,}80$

Ameriška nakupna opcija: splošna neenakost (NEOBVEZNO)

$\max\{S_0 - K\cdot D(0,1/2) - I(0,1/2),\ S_0 - K,\ 0\} \leq c_0^A \leq S_0$

$$\max\{\underbrace{50 - 51{,}18742 - 0{,}69477}_{-1{,}88},\ \underbrace{50-52}_{-2},\ 0\} \leq c_0^A \leq 50$$

$$\underline{0 \leq c_0^A \leq 50}$$

Iz paritetne relacije

$$C_0^A + KD(0,1/2) \le p_0^A + S_0 \le C_0^A + K + I(0,1/2)$$

$$C_0^A \le p_0^A + S_0 - KD(0,1/2) = 2,8 + 50 - 51,18742 = 1,6126$$

$$C_0^A \ge p_0^A + S_0 - K - I(0,1/2) = 2,8 + 50 - 52 - 0,69477 = 0,1052$$

$$\underline{\underline{0,1052 \le C_0^A \le 1,6126}} \qquad 2$$

Evropska nakupna opcija : splošna neenakost

$$\max\{\underbrace{S_0 - KD(0,1/2) - I(0,1/2)}_{-1,88}, 0\} \le C_0^E \le S_0 - I(0,1/2)$$

$$0 \le C_0^E \le 50 - 0,69477$$

$$0 \le C_0^E \le 49,3052$$

Iz splošnih neenakosti je obvezno preveriti spodnji meji!

Mora biti cenejša od ameriške : $\underline{\underline{0 \le C_0^E \le 1,6126}}$

Evropska prodajna opcija: splošna neenakost

$$\max\{\underbrace{KD(0,1/2) + I(0,1/2) - S_0}_{1,8822}, 0\} \le p_0^E \le \underbrace{K \cdot D(0,1/2)}_{51,18742}$$

$$1,8822 \le p_0^E \le 51,1874$$

Mora biti cenejša od ameriške : $\underline{\underline{1,8822 \le p_0^E \le 2,8}}$ 2

Pariteta evropskih opcij $p_0^E + S_0 - I(0,1/2) = C_0^E + KD(0,1/2)$

Intervala za premiji morata biti enako dolga!

$$p_0^E = C_0^E + KD(0,1/2) - S_0 + I(0,1/2) = C_0^E + 51,18742 - 50 + 0,69477 = C_0^E + 1,8822$$

$\Rightarrow$ spodnji meji sta usklajeni

$\Rightarrow$ zgornjo mejo za C_0^E lahko izboljšamo v $2,8 - 1,8822 = 0,9178$

$$\Rightarrow \underline{\underline{0 \le C_0^E \le 0,9178}} \qquad 2$$

(d) Arbitraža je možna, ker je evropska dražja od ameriške

$t=0$: kupi ameriško, prodaj evropsko

$$u_0 = -2,8 + 3,0 = 0,2 > 0$$

$t = 1/2$: izvrši am. opcijo, če kupec evropsko izvrši 3

$$u_{1/2} = 0 \qquad \Rightarrow \text{arbitraža}$$

3. naloga [20 točk]

Obravnavamo model trga z dvema obdobjema in dvema vrednostnima papirjema. Prvi je bančni račun B, na katerem se stanje v obdobju od 0 do 1 obrestuje z obrestno mero 4%, v obdobju od 1 do 2 pa z obrestno mero 5%.

Drugi vrednostni papir je delnica z začetno ceno $S_0 = 20$. Do trenutka 1 vrednost delnice naraste za 5%, ostane nespremenjena ali pade za 10%. V obdobju $[1, 2]$ nato vrednost delnice naraste za 10% ali pade za 5%, neodvisno od dogajanja v obdobju $[0, 1]$.

3 (a) Narišite drevo dogodkov, ki prikazuje opisano negotovost.

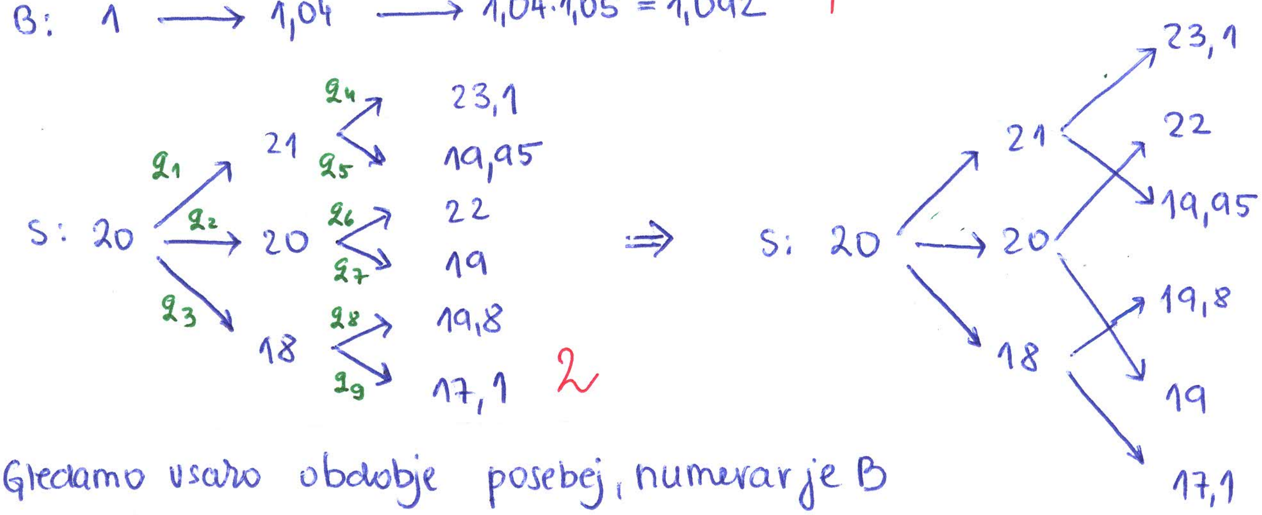
8 (b) Določite do tveganja nevtralno verjetnost v modelu in dokažite, da trg ne dopušča arbitraže. Ali je trg poln?

5 (c) Ob času 0 na delnico S napišemo digitalno opcijo z zapadlostjo 2 in izvršilno ceno 20. Določite njeno premijo v času 0. Ali je opcija na trgu dosegljiva?

Digitalna opcija ob zapadlosti izplača znesek 1, če je tedaj cena delnice višja od izvršilne cene.

4 (d) Določite vse možne izvršilne cene K, pri katerih je digitalna opcija z zapadlostjo 2 na trgu dosegljiva.

(a) $B: \; 1 \longrightarrow 1{,}04 \longrightarrow 1{,}04 \cdot 1{,}05 = 1{,}092$ 1



(b) Gledamo vsako obdobje posebej, numerar je B

$0 \to 1$

$$\tilde{c} = c = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1{,}04 & 21 \\ 1{,}04 & 20 \\ 1{,}04 & 18 \end{bmatrix} \qquad \tilde{M} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 21/1{,}04 \\ 1 & 20/1{,}04 \\ 1 & 18/1{,}04 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{array}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$\frac{21}{1{,}04} q_1 + \frac{20}{1{,}04} q_2 + \frac{18}{1{,}04} q_3 = 20 \; / \cdot 1{,}04 \qquad 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 21 & 20 & 18 & 20{,}8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & +1 & +3 & +0{,}2 \end{array}\right] \qquad q_3 \text{ parameter}$$

$$q_2 + 3q_3 = \frac{1}{5} \qquad q_1 = 1 - \left(\frac{1}{5} - 3q_3\right) - q_3 \qquad q_i > 0 \Leftrightarrow q_3 > 0$$

$$q_2 = \frac{1}{5} - 3q_3 \qquad = \frac{4}{5} + 2q_3 \qquad \frac{1}{5} - 3q_3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < q_3 < \frac{1}{15} \qquad 2$$

Obdobje $1 \to 2$ je binomski model

$u = 1{,}1$

$d = 0{,}95$

$R = 5\%$

$$q_4 = q_6 = q_8 = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{1{,}05-0{,}95}{1{,}1-0{,}95} = \frac{2}{3}$$ 2

$$q_5 = q_7 = q_9 = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ obstaja Q v večobdobnem modelu $\Rightarrow$ t.b.a. (1. izrek)

$\Rightarrow$ Q ni enolična (q_3 parameter) $\Rightarrow$ trg ni poln (2. izrek) 2

ⓒ Izplačila niso odvisna od poti, zato gledamo samo končna stanja

S_2	Izplačilo	Verjetnost ← produkt prehodnih verjetnosti
23,1	1	$q_1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{5}+2q_3\right) = \frac{8}{15}+\frac{4}{3}q_3$
22	1	$q_2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}-3q_3\right) = \frac{2}{15}-2q_3$
19,95	0	$q_1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}+2q_3\right) = \frac{4}{15}+\frac{2}{3}q_3$
19,8	0	$q_3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}q_3$
19	0	$q_2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-3q_3\right) = \frac{1}{15}-q_3$
17,1	0 1	$q_3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}q_3$ 2

(*)

$$c_0^D = \frac{1}{1{,}04 \cdot 1{,}05} \cdot E_Q(X) =$$

$$= \frac{1}{1{,}092} \cdot \left(\frac{8}{15}+\frac{4}{3}q_3+\frac{2}{15}-2q_3\right) =$$

$$= \frac{1}{1{,}092} \cdot \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}q_3\right) = \frac{2}{3 \cdot 1{,}092}(1-q_3)$$

$$c_0^D \in \Big(\underbrace{\frac{2}{3 \cdot 1{,}092} \cdot \frac{14}{15}}_{q_3=0},\ \underbrace{\frac{2}{3 \cdot 1{,}092} \cdot 1}_{q_3=0}\Big) = (0{,}5698,\ 0{,}6105)$$ 1

Cena ni enolična, zato opcija ni dosegljiva. 1

ⓓ Opcija bo dosegljiva, če se q_3 pri računanju upanja pokrajšajo.

Izplačila so vedno oblike "zgoraj enke, spodaj ničle" v (*).

Računamo kumulativne vsote Q.

S_2	vsote Q
	$\boxed{0}$
23,1	$\frac{8}{15} + \frac{4}{3} q_3$
22	$\frac{8}{15} + \frac{4}{3} q_3 + \frac{2}{15} - 2q_3 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} q_3$
19,95	$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot q_3 + \frac{4}{15} + \frac{2}{3} q_3 = \boxed{\frac{14}{15}}$
19,8	$\frac{14}{15} + \frac{2}{3} q_3$
19	$\frac{14}{15} + \frac{2}{3} q_3 + \frac{1}{15} - q_3 = 1 - \frac{1}{3} q_3$
17,1	$1 - \frac{1}{3} q_3 + \frac{1}{3} q_3 = \boxed{1}$

2

3 možnosti :

1) vsa izplačila 0 $\Leftrightarrow$ $K \geq 23,1$

2) vsa izplačila 1 $\Leftrightarrow$ $K < 17,1$

3) izplačila $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $19,8 \leq K < 19,95$ 2

izplačilo, če je cena višja od K