

### 1. naloga [15 točk]

Delnica podjetja B je danes vredna 250 USD. Podjetje je ob času 0 najavilo, da bo čez 6 mesecev izplačalo dividende v višini 5 USD na delnico. Privzemite naslednjo časovno strukturo netveganih moči obresti

$t$	0.25	0.50	0.75	1.00
$Y(0, t)$	2.30%	2.45%	2.55%	2.60%

- 3 (a) Kaj lahko poveste o premiji ameriške nakupne opcije, napisane na delnico podjetja B, z zapadlostjo 3 mesece in izvršilno ceno 251 USD?
- 6 (b) Privzemite, da je premija opcije iz točke (a) enaka  $c_0^A = 3.20$  USD. Kaj lahko poveste o premijah ameriške prodajne ter evropske nakupne in prodajne opcije z isto izvršilno ceno in zapadlostjo?
- 6 (c) Ali je možna arbitražna, če je premija evropske prodajne opcije na trgu enaka  $p_0^E = 2.50$  USD? Če da, pripravite arbitražno strategijo in določite arbitražni zaslužek?
- Opomba: Privzemite, da premije ostalih opcij ustrezajo zahtevam iz (b).

(a)  $S_0 = 250$   
 $T = \frac{1}{4}$   
 $K = 251$   
 $I(0, T) = 0$

Ameriška nakupna opcija

$$\max\{S_0 - K \cdot D(0, T) - I(0, T), S_0 - K, 0\} \leq c_0^A \leq S_0$$

$$\max\{250 - 251 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 0,023} - 0, 250 - 251, 0\} \leq c_0^A \leq 250$$

$$\underline{0,4391 \leq c_0^A \leq 250} \quad 3$$

(b)  $c_0^A = 3,20$  USD

Kerni dividend, je  $\underline{c_0^E = 3,20$  USD 2

$p_0^E$  določimo iz paritete:  $p_0^E + S_0 - I(0, T) = c_0^E + K \cdot D(0, T)$

$$p_0^E = 3,20 + 251 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 0,023} - 250 + 0 = \underline{2,7609 \text{ USD}} \quad 2$$

Ameriška prodajna: navedemo lestnosti

•  $p_0^A \geq p_0^E \Rightarrow p_0^A \geq 2,7609 \text{ USD}$

•  $\max\{K \cdot D(0, T) + I(0, T) - S_0, K - S_0, 0\} \leq p_0^A \leq K$

$$\max\{251 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 0,023} + 0 - 250, 251 - 250, 0\} \leq p_0^A \leq 251$$

$$1 \leq p_0^A \leq 251$$

•  $c_t^A + K \cdot D(0, T) \leq p_0^A + S_0 \leq c_0^A + K + I(0, T)$

$$c_t^A + K \cdot D(0, T) - S_0 \leq p_0^A \leq c_0^A + K + I(0, T) - S_0$$

$$3,20 + 251 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 0,023} - 250 \leq p_0^A \leq 3,20 + 251 + 0 - 250$$

$$2,7609 \leq p_0^A \leq 4,20$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{2,7609 \leq p_0^A \leq 4,20}} \quad 2$$

$$c) p_0^E = 2,50 \text{ USD}$$

Kršena je paritetna relacija evropskih opcij

$$\text{Dividend ni} \Rightarrow p_0^E + S_0 = C_0^E + K \cdot D(0, T)$$

$$p_0^E \text{ na trgu prenizka, zato velja } p_0^E + S_0 < C_0^E + K \cdot D(0, T)$$

$$\Rightarrow C_0^E + K \cdot D(0, T) - p_0^E - S_0 > 0$$

Strategija:

$t=0$ : izdaj (prodaj) nakupno opciju  
sposodi si  $K \cdot D(0, T)$  do časa  $T$

kupi prodajno opciju na trgu

kupi delnice

$$U_0 = C_0^E + K \cdot D(0, T) - p_0^E - S_0 =$$

$$= 3,20 + 251 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 0,023} - 2,50 - 250 = 0,2609 \text{ USD} > 0 \quad 3$$

$t = \frac{1}{4}$ : izplačaj nakupno opciju, če je treba

urni  $K$

izvrši prodajno opciju, če se splača

prodaj delnice

$$U_{\frac{1}{4}} = -\max\{S_{\frac{1}{4}} - K, 0\} - K + \max\{K - S_{\frac{1}{4}}, 0\} + S_{\frac{1}{4}} =$$

$$= -(\max\{S_{\frac{1}{4}} - K, 0\} + K) + \max\{K, S_{\frac{1}{4}}\} =$$

$$= -\max\{S_{\frac{1}{4}}, K\} + \max\{K, S_{\frac{1}{4}}\} = 0 \quad 3$$

$\Rightarrow U$  je arbitražna strategija,

0,2609 USD je njen arbitražni zaslužek.

## 2. naloga [15 točk]

Obravnavamo enoobdobni model trga, na katerem se trguje z delnico  $S$  z začetno ceno  $S_0$  in bančnim računom  $B$  z netvegano obrestno mero  $R$ . V času 1 sta možni dve stanji sveta  $\Omega = \{\omega_g, \omega_b\}$ . Izplačili delnic sta odvisni od končnega stanja in sta podani z  $S_1(\omega_g) = S_0 u$  in  $S_1(\omega_b) = S_0 d$ , kjer je  $u > d > 0$ .

- 2 (a) Navedite pogoje za parametre  $u, d$  in  $R$ , pod katerimi je obravnavani trg brez arbitraže.
- 3 (b) Naj bo  $P(\omega_g) = p$  in  $P(\omega_b) = 1 - p$  porazdelitev naravne verjetnosti na  $\Omega$ . Izračunajte pričakovani donos delnice  $S$ .

Pomoč: Donos je slučajna spremenljivka  $r = \frac{S_1 - S_0}{S_0}$ .

USE GLEDE NA P!

- 5 (c) Pokažite, da je tveganost delnice  $S$  sorazmerna z  $u - d$ . Izraz faktorizirajte.

Pomoč: Tveganost je standardni odklon slučajne spremenljivke  $r$ .

- 5 (d) Statistično ocenjevanje modela. Iz preteklosti vemo, da sta povprečen donos in tveganost delnice enaka  $\frac{1}{3}$ . Privzemite, da v modelu velja  $u > 1$  in  $d = u^{-1}$ . Določite  $u$  in  $p$  tako, da bo pričakovan donos delnice enak njenemu povprečnemu donosu, tveganost pa pretekli tveganosti.

Nasveti:

- Iz enačbe (c) za tveganost zapišite enačbo za disperzijo slučajne spremenljivke  $r$ .
- Iz enačbe (b) za pričakovan donos izrazite  $p$  in ga vstavite v enačbo za disperzijo.
- Upoštevajte, da je  $d = u^{-1}$  in poiščite rešitev.

$$(a) \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ S_0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1+R & S_0 u \\ 1+R & S_0 d \end{bmatrix}$$

To je enoobdobni binomski model: TBA  $\Leftrightarrow d < 1+R < u$  2

$$(b) \quad \text{Naravna verjetnost} \quad \begin{pmatrix} \omega_g & \omega_b \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$r \sim \begin{pmatrix} \frac{S_0 u - S_0}{S_0} & \frac{S_0 d - S_0}{S_0} \\ p & 1-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-1 & d-1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$E(r) = (u-1)p + (d-1)(1-p) \quad 3$$

$$(c) \quad SD(r) = \sqrt{D(r)}$$

$$D(r) = E(r^2) - E(r)^2$$

$$r^2 \sim \begin{pmatrix} (u-1)^2 & (d-1)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$E(r^2) = (u-1)^2 p + (d-1)^2 (1-p) \quad 2$$

$$D(r) = (u-1)^2 p + (d-1)^2 (1-p) - \left[ (u-1)p + (d-1)(1-p) \right]^2 =$$

$$= \underline{(u-1)^2 p} + \underline{(d-1)^2 (1-p)} - \underline{(u-1)^2 p^2} - 2(u-1)(d-1)p(1-p) - \underline{(d-1)^2 (1-p)^2}$$

$$= (u-1)^2 p(1-p) + (d-1)^2 (1-p)(1-p) - 2(u-1)(d-1)p(1-p)$$

$$= p(1-p) \left[ (u-1)^2 + (d-1)^2 - 2(u-1)(d-1) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= p(1-p) \left[ (u-1) - (d-1) \right]^2 = \\
 &= p(1-p) (u-1-d+1)^2 = \\
 &= p(1-p) (u-d)^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow SD(r) = \sqrt{p(1-p)} \cdot (u-d) \quad 3 \quad (u > d)$$

(d) Vemo  $E(r) = SD(r) = \frac{1}{3}$ ,  $d = \frac{1}{u}$   
 Iščemo  $u$  in  $p$

$$E(r) = (u-1)p + (d-1)(1-p) = \frac{1}{3}$$

$$D(r) = p(1-p) (u-d)^2 = \frac{1}{9}$$

$$(u-1)p + (d-1) - p(d-1) = \frac{1}{3}$$

$$p(u-1-d+1) = \frac{1}{3} - d + 1$$

$$p(u-d) = \frac{1}{3} - d$$

$$p = \frac{\frac{1}{3} - d}{u-d}$$

$$1-p = \frac{u-d - \frac{1}{3} + d}{u-d} = \frac{u - \frac{1}{3}}{u-d} \quad 2$$

$$\frac{\frac{1}{3} - d}{u-d} \cdot \frac{u - \frac{1}{3}}{u-d} \cdot (u-d)^2 = \frac{1}{9} \quad / \cdot 9$$

$$(4-3d)(3u-4) = 1$$

$$12u - 9ud - 16 + 12d = 1$$

$$12u - 9 - 16 + 12 \frac{1}{u} = 1 \quad / \cdot u$$

$$12u^2 - 26u + 12 = 0$$

$$6u^2 - 13u + 6 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

$$u_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow d_1 = \frac{2}{3} \quad \text{in} \quad p_1 = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}} = \frac{4}{5} \quad 3$$

$$u_2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{3}{2} \quad \text{ni smiselno!}$$

