**1. naloga** [15 točk]

Delnica podjetja B je danes vredna 250 USD. Podjetje je ob času 0 najavilo, da bo čez 6 mesecev izplačalo dividende v višini 5 USD na delnico. Privzemite naslednjo časovno strukturo netveganih moči obresti

| $t$ | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 1.00 |
|---|---|---|---|---|
| $Y(0,t)$ | 2.30% | 2.45% | 2.55% | 2.60% |

3 (a) Kaj lahko poveste o premiji ameriške nakupne opcije, napisane na delnico podjetja B, z zapadlostjo 3 mesece in izvršilno ceno 251 USD?

6 (b) Privzemite, da je premija opcije iz točke (a) enaka $c_0^A = 3.20$ USD. Kaj lahko poveste o premijah ameriške prodajne ter evropske nakupne in prodajne opcije z isto izvršilno ceno in zapadlostjo?

6 (c) Ali je možna arbitraža, če je premija evropske prodajne opcije na trgu enaka $p_0^E = 2.50$ USD? Če da, pripravite arbitražno strategijo in določite arbitražni zaslužek?

*Opomba: Privzemite, da premije ostalih opcij ustrezajo zahtevam iz (b).*

(a) $S_0 = 250$, $T = \frac{1}{4}$, $K = 251$, $I(0,T) = 0$

Ameriška nakupna opcija

$$\max\{S_0 - K D(0,T) - I(0,T), S_0 - K, 0\} \leq c_0^A \leq S_0$$

$$\max\{250 - 251 \cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 0{,}023} - 0, 250 - 251, 0\} \leq c_0^A \leq 250$$

$$\underline{\underline{0{,}4391 \leq c_0^A \leq 250}}$$ 3

(b) $c_0^A = 3{,}20$ USD

Ker ni dividend, je $\underline{\underline{c_0^E = 3{,}20 \text{ USD}}}$ 2

$p_0^E$ določimo iz paritete: $p_0^E + S_0 - I(0,T) = c_0^E + K \cdot D(0,T)$

$$p_0^E = 3{,}20 + 251 \cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 0{,}023} - 250 + 0 = \underline{\underline{2{,}7609 \text{ USD}}}$$ 2

Ameriška prodajna: navedemo lastnosti

- $p_0^A \geq p_0^E \Rightarrow p_0^A \geq 2{,}7609$ USD
- $\max\{K D(0,T) + I(0,T) - S_0, K - S_0, 0\} \leq p_0^A \leq K$

  $\max\{251 \cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 0{,}023} + 0 - 250, 251 - 250, 0 \leq p_0^A \leq 251$

  $1 \leq p_0^A \leq 251$
- $c_t^A + K D(0,T) \leq p_0^A + S_0 \leq c_0^A + K + I(0,T)$

  $c_t^A + K D(0,T) - S_0 \leq p_0^A \leq c_0^A + K + I(0,T) - S_0$

  $3{,}20 + 251 e^{-\frac{1}{4}\cdot 0{,}023} - 250 \leq p_0^A \leq 3{,}20 + 251 + 0 - 250$

$2{,}7609 \leq p_0^A \leq 4{,}20$

$\Rightarrow \underline{\underline{2{,}7609 \leq p_0^A \leq 4{,}20}}$ 2

(c) $p_0^E = 2{,}50$ USD

Kršena je paritetna relacija evropskih opcij

Dividend ni $\Rightarrow \quad p_0^E + S_0 = c_0^E + K\,D(0,T)$

$p_0^E$ na trgu prenizka, zato velja $p_0^E + S_0 < c_0^E + K\,D(0,T)$

$\Rightarrow c_0^E + K\,D(0,T) - p_0^E - S_0 > 0$

Strategija:

$t=0$: izdaj (prodaj) nakupno opcijo

sposodi si $K \cdot D(0,T)$ do časa $T$

kupi prodajno opcijo na trgu

kupi delnico

$$u_0 = c_0^E + K \cdot D(0,T) - p_0^E - S_0 =$$
$$= 3{,}20 + 251 \cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 0{,}023} - 2{,}50 - 250 = 0{,}2609 \text{ USD} > 0$$ 3

$t = \frac{1}{4}$: izplačaj nakupno opcijo, če je treba

vrni $K$

izvrši prodajno opcijo, če se splača

prodaj delnico

$$u_{\frac{1}{4}} = -\max\{S_{\frac{1}{4}} - K, 0\} - K + \max\{K - S_{\frac{1}{4}}, 0\} + S_{\frac{1}{4}} =$$
$$= -\left(\max\{S_{\frac{1}{4}} - K, 0\} + K\right) + \max\{K, S_{\frac{1}{4}}\} =$$
$$= -\max\{S_{\frac{1}{4}}, K\} + \max\{K, S_{\frac{1}{4}}\} = 0$$ 3

$\Rightarrow u$ je arbitražna strategija,

0,2609 USD je njen arbitražni zaslužek.

**2. naloga** [15 točk]

Obravnavamo enoobdobni model trga, na katerem se trguje z delnico $S$ z začetno ceno $S_0$ in bančnim računom $B$ z netvegano obrestno mero $R$. V času 1 sta možni dve stanji sveta $\Omega = \{\omega_g, \omega_b\}$. Izplačili delnic sta odvisni od končnega stanja in sta podani z $S_1(\omega_g) = S_0 u$ in $S_1(\omega_b) = S_0 d$, kjer je $u > d > 0$.

2 (a) Navedite pogoje za parametre $u$, $d$ in $R$, pod katerimi je obravnavani trg brez arbitraže.

3 (b) Naj bo $P(\omega_g) = p$ in $P(\omega_b) = 1 - p$ porazdelitev naravne verjetnosti na $\Omega$. Izračunajte pričakovani donos delnice $S$.

VSE GLEDE NA P!

*Pomoč: Donos je slučajna spremenljivka* $r = \frac{S_1 - S_0}{S_0}$.

5 (c) Pokažite, da je tveganost delnice $S$ sorazmerna z $u - d$. Izraz faktorizirajte.

*Pomoč: Tveganost je standardni odklon slučajne spremenljivke* $r$.

5 (d) *Statistično ocenjevanje modela.* Iz preteklosti vemo, da sta povprečen donos in tveganost delnice enaka $\frac{1}{3}$. Privzemite, da v modelu velja $u > 1$ in $d = u^{-1}$. Določite $u$ in $p$ tako, da bo pričakovan donos delnice enak njenemu povprečnemu donosu, tveganost pa pretekli tveganosti.

*Nasveti:*

- *Iz enačbe (c) za tveganost zapišite enačbo za disperzijo slučajne spremenljivke* $r$.
- *Iz enačbe (b) za pričakovan donos izrazite* $p$ *in ga vstavite v enačbo za disperzijo.*
- *Upoštevajte, da je* $d = u^{-1}$ *in poiščite rešitev.*

(a) $c = \begin{bmatrix} 1 \\ S_0 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1+R & S_0 u \\ 1+R & S_0 d \end{bmatrix}$

To je enoobdobni binomski model : TBA $\Leftrightarrow$ $d < 1+R < u$ 2

(b) Naravna verjetnost $\begin{pmatrix} \omega_g & \omega_b \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

$$r \sim \begin{pmatrix} \frac{S_0 u - S_0}{S_0} & \frac{S_0 d - S_0}{S_0} \\ p & 1-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-1 & d-1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

$E(r) = (u-1)p + (d-1)(1-p)$ 3

(c) $SD(r) = \sqrt{D(r)}$

$D(r) = E(r^2) - E(r)^2 \qquad r^2 \sim \begin{pmatrix} (u-1)^2 & (d-1)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

$E(r^2) = (u-1)^2 p + (d-1)^2 (1-p)$ 2

$$D(r) = (u-1)^2 p + (d-1)^2(1-p) - \left[(u-1)p + (d-1)(1-p)\right]^2 =$$

$$= \underline{(u-1)^2 p} + \underline{(d-1)^2(1-p)} - \underline{(u-1)^2 p^2} - 2(u-1)(d-1)p(1-p) - \underline{(d-1)^2(1-p)^2}$$

$$= (u-1)^2 p(1-p) + (d-1)^2(1-p)(\cancel{1} - \cancel{1} + p) - 2(u-1)(d-1)p(1-p)$$

$$= p(1-p)\left[(u-1)^2 + (d-1)^2 - 2(u-1)(d-1)\right] =$$

$$= p(1-p)\left[ (u-1) - (d-1)\right]^2 =$$
$$= p(1-p)(u-1-d+1)^2 =$$
$$= p(1-p)(u-d)^2$$

$$\Rightarrow SD(r) = \sqrt{p(1-p)} \cdot (u-d) \quad 3 \qquad (u>d)$$

d) Vemo $E(r) = SD(r) = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{u}$

Iščemo $u$ in $p$

$$E(r) = (u-1)p + (d-1)(1-p) = \frac{1}{3}$$
$$D(r) = p(1-p)(u-d)^2 = \frac{1}{9}$$

$$(u-1)p + (d-1) - p(d-1) = \frac{1}{3}$$
$$p(u-1-d+1) = \frac{1}{3} - d + 1$$
$$p(u-d) = \frac{4}{3} - d$$
$$p = \frac{\frac{4}{3} - d}{u-d}$$
$$1-p = \frac{u-d-\frac{4}{3}+d}{u-d} = \frac{u-\frac{4}{3}}{u-d} \quad 2$$

$$\frac{\frac{4}{3}-d}{\cancel{u-d}} \cdot \frac{u-\frac{4}{3}}{\cancel{u-d}} \cdot \cancel{(u-d)^2} = \frac{1}{9} \quad / \cdot 9$$

$$(4-3d)(3u-4) = 1$$
$$12u - 9ud - 16 + 12d = 1$$
$$12u - 9 - 16 + 12\frac{1}{u} = 1 \quad / \cdot u$$
$$12u^2 - 26u + 12 = 0$$
$$6u^2 - 13u + 6 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4\cdot 6\cdot 6}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

$$u_1 = \frac{18}{12} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \Rightarrow d_1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \text{ in } p_1 = \frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}} \quad 3$$

$$u_2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{3}{2} \quad \text{ni smiselno!}$$

**3. naloga** [20 točk]

Privzemite dvoobdobni binomski model trga s parametri $S_0 = 40$, $u = 1.2$, $d = 0.9$ in $R = 2\%$.

*Ruska opcija* (*Russian option*) je pogojna terjatev, ki imetniku ob izvršitvi v trenutku $t$ izplača najvišjo že doseženo vrednost delnice $S$, diskontirano za starost opcije. To pomeni, da ob izvršitvi v trenutku $t \in \{0, 1, 2\}$ izplača znesek $\beta^t \max_{0 \le s \le t} S_s$, kjer je $\beta = 0.95$. Opcijo od izdaje do zapadlosti lahko izvršimo največ enkrat. $T=2$

6 (a) Narišite drevo dogodkov in na njem predstavite proces notranje vrednosti ruske opcije.

7 (b) Določite premijo ruske opcije in opišite optimalno strategijo izvrševanja.

7 (c) Določite zaščitno strategijo izdajatelja ruske opcije. Ne pozabite, obravnavati vseh možnosti.

(a) Binomski model

$S_0 = 40$

$u = 1{,}2$

$d = 0{,}9$

$R = 2\%$

$$q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{1{,}02-0{,}9}{1{,}2-0{,}9} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$1-q = \frac{3}{5}$$

TBA

$B: \ 1 \longrightarrow 1{,}02 \longrightarrow 1{,}02^2$

(izvršitve)

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 57{,}6 \\
 & 48 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S:\ 40 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 43{,}2 \\
 & 36 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 32{,}4
\end{tikzcd}$$

2

Izplačila so odvisna od poti. $Z_t$ proces notranje vrednosti

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 57{,}6\cdot 0{,}95^2 \\
 & 48\cdot 0{,}95 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 48\cdot 0{,}95^2 \\
Z:\ 40 \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & 43{,}2\cdot 0{,}95^2 \\
 & 40\cdot 0{,}95 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 40\cdot 0{,}95^2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 51{,}984 \\
 & 45{,}6 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 43{,}32 \\
Z:\ 40 \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & 38{,}988 \\
 & 38 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 36{,}1
\end{tikzcd}$$

4

(b) Obratna indukcija

$V_{uu} = 51{,}984$ izvrši $\qquad V_{du} = 38{,}988$ izvrši

2

$V_{ud} = 43{,}32$ izvrši $\qquad V_{dd} = 36{,}1$ izvrši

$t=1$ $\quad u$: izvršitev 45,6

nadaljevanje $\frac{1}{1{,}02}\left(51{,}984 \cdot \frac{2}{5} + 43{,}32 \cdot \frac{3}{5}\right) = 45{,}8682$

$V_u = 45{,}8682$ ne izvrši

2

$d$: izvršitev 38

nadaljevanje $\frac{1}{1{,}02}\left(38{,}988 \cdot \frac{2}{5} + 36{,}1 \cdot \frac{3}{5}\right) = 36{,}5247$

$V_d = 38$ izvrši

$t=0$ $\quad$ izvršitev 40

nadaljevanje $\frac{1}{1{,}02}\left(45{,}8682 \cdot \frac{2}{5} + 38 \cdot \frac{3}{5}\right) = 40{,}3405$

$V_0 = 40{,}3405$ ne izvrši $\qquad$ premija $= 40{,}3405$ $\qquad$ 2

Izvršitve označene na drevesu iz naloge ⓐ

| Dogodek | Izvršitev $(=\tau^*_{min})$ |
|---|---|
| $uu$ | 2 |
| $ud$ | 2 |
| $du$ | 1 |
| $dd$ | 1 |

1

ⓒ $t=0$: če izvrši*, izplačaj 40, obdrži 0,3405 in konec

* neoptimalno

če ne izvrši, pripravi portfelj $(\alpha, \beta)$:

$$\alpha \cdot 1{,}02 + \beta \cdot 48 = 45{,}8682$$
$$\alpha \cdot 1{,}02 + \beta \cdot 36 = 38$$

2

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= 14{,}1131\\ \beta &= 0{,}6557\end{aligned}\right\}$$ vrednost $= 40{,}3405 =$ premija

$t=1$: $\quad u$: če izvrši*, izplačaj 45,6, obdrži 0,2682

* neoptimalno

če ne izvrši, pripravi portfelj $(\alpha, \beta)$:

$$\alpha \cdot 1{,}02^2 + \beta \cdot 57{,}6 = 51{,}984$$
$$\alpha \cdot 1{,}02^2 + \beta \cdot 43{,}2 = 43{,}32$$

2

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= 16{,}6551\\ \beta &= 0{,}6017\end{aligned}\right\}$$ vrednost $= 45{,}8682$

$=$ vrednost portfelja iz časa 0

d : če izvrši, izplačaj 38 in konec

če ne izvrši, * neoptimalno pripravi portfelj

$$\alpha \cdot 1{,}02^2 + \beta \cdot 43{,}2 = 38{,}988$$
$$\alpha \cdot 1{,}02 + \beta \cdot 32{,}4 = 36{,}1$$

2

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 26{,}3706 \\ \beta = 0{,}2674 \end{array}\right\}$$

vrednost 36,5247

portfelj iz časa 0 je vreden 38,988

$\Rightarrow$ obdrži 2,4633

t=2 : če izvrši, izplačaj

če ne izvrši, * neoptimalno obdrži vrednost portfelja (v vseh stanjih)

1