Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

FINANČNA MATEMATIKA 1

Rešitve kolokvijev in izpitov

2008/2009

Na naslednjih straneh so objavljene kratke rešitve nalog, ki so jih študenti reševali na kolokvijih in izpitih iz Finančne matematike 1 v študijskem letu 2008/2009.

Do končne rešitve običajno vodi več pravilnih poti. Vse nikoli niso navedene. Struktura točk je zapisana v oklatih oklepajih. Večina točk je postopkovnih, zato svoje postopke reševanja vedno natančno opisujte.

V primeru nejasnosti se za nasvet obrnite na asistente.

Če odkrijete napako, jo prosim sporočite na `ales.toman@imfm.si`.

1. kolokvij	6. april 2009
2. kolokvij	25. maj 2009
Pisni izpit	29. junij 2009
Pisni izpit	31. avgust 2009
Pisni izpit	21. september 2009

1. kolokvij: 6. april 2009

1. naloga

(a) **[7 točk]**

Podatki: $N = 100$ EUR, $P = 95$ EUR, $T = \frac{1}{2}$, $N' = 99$ EUR.

Najprej iz enačbe $P = Ne^{-YT}$ izračunamo moč obresti $Y = 10.26\%$.

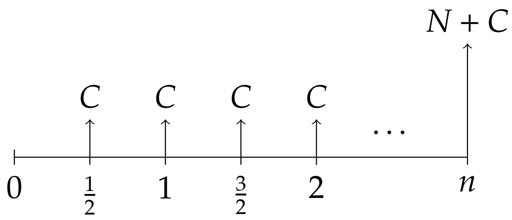
Nato iz enačbe $N' = Pe^{YT'}$ izračunamo, kdaj cena naraste na 99 EUR.

Dobimo $T' = 0.402$ leta, kar je približno 147 dni.

(b) **[8 točk]**

Označimo z $y = \left(1 + \frac{R_{12}}{12}\right)^{-6}$ polletni diskontni faktor in s $C = \frac{c \cdot N}{2}$ znesek kupona.

Shema prihodnjih denarnih tokov:



Obveznica je naprodaj *at par*, če velja $N = Cy + Cy^2 + \cdots + Cy^{2n} + Ny^{2n}$.

Od tod dobimo $c = 2 \cdot \dfrac{1 - (1 + \frac{R_{12}}{12})^{-12n}}{\sum_{i=1}^{2n}(1 + \frac{R_{12}}{12})^{-6i}}$, kar poenostavimo v $2\left((1 + \frac{R_{12}}{12})^6 - 1\right)$.

Rezultat je pričakovan, saj to pomeni, $(1 + \frac{c}{2}) = \left(1 + \frac{R_{12}}{12}\right)^6$.

2. naloga

(a) **[5 točk]**

Verjetnostni prostor $\Omega = \{\text{sneg}, \text{ suho}\} \times \{\text{mrzlo}, \text{ toplo}\}$ sestavljajo 4 stanja sveta.

Za izračun pričakovanega dobička potrebujemo naslednje podatke:

Stanje	Št. obiskovalcev	Zaslužek	Dobiček	Verjetnost
ω_1 : sneg, mrzlo	$5000 \cdot 0.9 \cdot 0.8$	18000	-4000	$0.2 \cdot 0.15$
ω_2 : sneg, toplo	$5000 \cdot 0.8$	20000	-2000	$0.2 \cdot 0.85$
ω_3 : suho, mrzlo	$5000 \cdot 0.9$	22500	500	$0.8 \cdot 0.15$
ω_4 : suho, toplo	5000	25 000	3000	$0.8 \cdot 0.85$

Pričakovani dobiček znaša $-4000 \cdot 0.03 - 2000 \cdot 0.17 + 500 \cdot 0.12 + 3000 \cdot 0.68 = 1640$ EUR.

(b) **[5 točk]**

Model trga ima 4 možna stanja in 2 vrednostna papirja, ki ju predstavimo z vektorjem cen $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in matriko izplačil $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Komponente vektorja cen stanj $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ dobimo iz sistema

$$\begin{aligned} 2\psi_1 + 2\psi_2 &= 1 \\ 3\psi_1 + 3\psi_3 &= 2 \\ \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 &> 0 \end{aligned}$$

Množica vseh *state price* vektorjev je zato

$$\Psi = \left\{ (\psi_1, \tfrac{1-2\psi_1}{2}, \tfrac{2-3\psi_1}{3}, \psi_4)^T;\ \psi_4 > 0,\ 0 < \psi_1 < \tfrac{1}{2} \right\}.$$

(c) **[5 točk]**

Želimo izplačila $X = \begin{bmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ceno te pogojne terjatve določimo s cenovnim funkcionalom $\hat{\pi}_0(X) = 1000 + 2000\psi_1$.

Cena najcenejše dominirajočega pogojne terjatve je

$$\sup_\Psi (1000 + 2000\psi_1) = 1000 + 2000 \cdot \tfrac{1}{2} = 2000 \text{ EUR}.$$

Rešitev z linearnim programom: Iščemo portfelj $\phi = (x, y)^T$, za katerega je $M\phi \geq X$ in ima minimalno ceno.

Iščemo $\min(x + 2y)$ pri pogojih $2x + 2y \geq 4000$, $2x \geq 2000$ in $3y \geq 0$.

Nalogo je možno rešiti grafično. Minimum je dosežen v točki $T(2000, 0)$.

Za nakup 2000 snežkov plačamo 2000 EUR.

3. naloga

(a) **[7 točk]**

Model trga ima 3 možna stanja in 3 vrednostne papirje, ki jih predstavimo z vektorjem cen $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 5 \end{bmatrix}$ in matriko izplačil $M = \begin{bmatrix} 1+R & 2 & 5 \\ 1+R & 3 & 6 \\ 1+R & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Izberemo obveznico za numerar in določimo do tveganja nevtralno verjetnost $Q = (q_1, q_2, q_3)^T$.

Rešujemo:

$$\begin{aligned} E_Q \tilde{B}(1) = \tilde{c}_1 \quad &\Rightarrow \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ E_Q \tilde{S}(1) = \tilde{c}_2 \quad &\Rightarrow \quad 2q_1 + 3q_2 + 4q_3 = 2.5(1+R) \\ E_Q \tilde{W}(1) = \tilde{c}_3 \quad &\Rightarrow \quad 5q_1 + 6q_2 + 7q_3 = 5(1+R) \end{aligned}$$

Z Gaussovim algoritmom pridemo do matrike

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} + \frac{5}{2}R \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}R - \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Sistem je rešljiv le za $R = 20\%$, zato za $R \neq 20\%$ na trgu obstaja arbitraža.

Pri $R = 20\%$ izračunamo množico do tveganja nevtralnih verjetnosti

$$Q = \left\{(q_3, 1 - 2q_3, q_3)^T;\ 0 < q_3 < \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Ker množica ni prazna, pri $R = 20\%$ trg ne dopušča arbitraže.

(b) **[3 točke]**

Ker množica Q ni singleton, po drugem izreku FM trg ni poln.

(c) **[7 točk]**

Pogojni terjatvi znašata $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ in $D = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Ceni določimo s pomočjo do tveganja nevtralnih verjetnosti. Z diskontiranjem dobimo

$c_C = \mathrm{E}_Q \begin{bmatrix} 1/1.2 \\ 1/1.2 \\ 3/1.2 \end{bmatrix} = \frac{(1+2q_3)}{1.2};\ 0 < q_3 < \frac{1}{2}$ in

$c_D = \mathrm{E}_Q \begin{bmatrix} 3/1.2 \\ 3/1.2 \\ 3/1.2 \end{bmatrix} = 2.5.$

Za pošteno ceno instrumenta C vzamemo $\sup_Q \frac{1+2q_3}{1.2} = 1.\overline{6}$.

(d) **[3 točke]**

Za instrument C dobimo interval brezarbitražnih cen, zato ni dosegljiv, za instrument D pa dobimo enolično ceno, zato je dosegljiv.

Dodati moramo instrument C.

2. kolokvij: 25. maj 2009

1. naloga

(a) **[5 točk]**

Konstantne zneske izrazimo kot delež navidezne glavnice $c = L_{\text{SWAP}} \cdot N$.

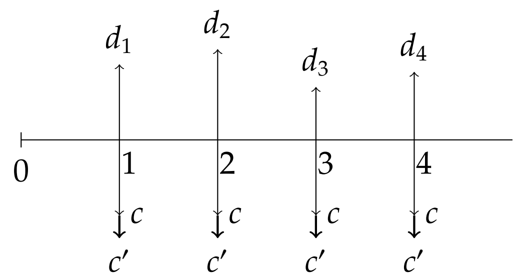
Nespremenljivo obrestno mero v zamenjavi izračunamo po formuli $L_{\text{SWAP}} = \frac{1-D(0,4)}{\Delta \sum_{i=1}^{4} D(0,i)}$, kjer je $\Delta = 1$ časovni razmik med denarnimi tokovi in $D(0,i) = \frac{1}{1+i \cdot L(0,i)}$ diskontni faktor za obdobje $[0, i]$.

Dobimo $L_{\text{SWAP}} = 10.958\%$ in $c = 10958$ EUR.

(b) **[5 točk]**

Ker je $c' > c$, bo podjetje A plačevalo plačevalo več, kot bi moralo. Zato mora ob sklenitvi zamenjave plačati podjetje B.

Denarne tokove klasične zamenjave iz naloge (a) primerjamo z denarnimi tokovi nove zamenjave.



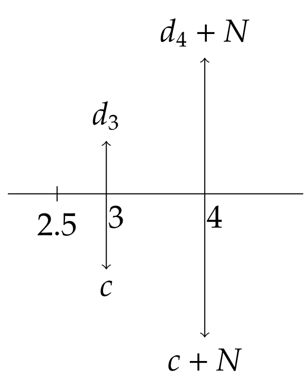
Razlika so zneski $c' - c = 42$ EUR, ki jih dodatno plačuje podjetje A.

Ob sklenitvi zamenjave zato podjetje B plača $42 \cdot \sum_{i=1}^{4} D(0,i) = 131.1215$ EUR.

(c) **[5 točk]**

Nastala škoda je enaka vrednosti zamenjave v trenutku bankrota.

Denarnima tokovoma v času 4 prištejmo navidezno glavnico in zamenjavo vrednotimo kot portfelj obveznic s spremenljivimi (FL) in nespremenljivimi (CB) kuponi.



Ker B prejema konstantne zneske, plačuje pa spremenljive, je $V_t^B = \text{CB}_t - \text{FL}_t$

V trenutku 2.5 že poznamo kupon $d_3 = L(2,3) \cdot N = 9000$ EUR in zato

$\mathrm{FL}_{2.5} = (N + d_3) \cdot D(2.5, 3) = 104807.86$ EUR.

Izračunamo še $\mathrm{CB}_{2.5} = c \cdot D(2.5, 3) + (c + N) \cdot D(2.5, 4) = 108947.42$ EUR.

Podjetje B utrpi škodo v višini 4139.56 EUR.

2. naloga

(a) **[6 točk]**

Vzemimo USD za domačo in EUR za tujo valuto.

Trenutni menjalni tečaj zapišemo kot 1 EUR= S_0 USD, kjer je $S_0 = 1.4035$.

Drugi podatki: $N = 15 \cdot 18000 = 270000$ EUR, $T = \frac{1}{2}$.

Terminski menjalni tečaj izračunamo po formuli $K = S_0 \cdot \frac{D^{EUR}(0,T)}{D^{USD}(0,T)}$.

Upoštevamo $D^{EUR}(0, \frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}Y^{EUR}(0,\frac{1}{2})}$ in $D^{USD}(0, \frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}Y^{USD}(0,\frac{1}{2})}$ in dobimo $K = 1.3965$.

Podjetnik sklene terminski posel za nakup 270000 EUR čez pol leta po tečaju 1.3965 USD za 1 EUR.

(b) **[6 točk]**

Za nakup $N = 270000$ EUR bo potreboval $N \cdot K = 377055$ USD.

V času $T = \frac{1}{2}$ bo najel kredit z glavnico $G = \frac{1}{2}N = 188527.5$ USD, ki ga bo odplačal v času $U = \frac{5}{2}$. Kredit se obrestuje po terminski moči obresti

$$Y^{USD}(0, T, U) = \frac{U \cdot Y^{USD}(0,U) - T \cdot Y^{USD}(0,T)}{U - T} = 4.875\%.$$

Znesek obresti je $G \cdot e^{2Y^{USD}(0,\frac{1}{2},\frac{5}{2})} - G = 19307.4$ USD.

(c) **[3 točke]**

Nekaj možnih odgovorov: Ali bo čez pol leta avtomobile prodal, ali bodo kupci odplačali drugi obrok kupnine, okvare na avtomobilih, ...

Podjetnik je s terminskimi posli ustvaril izgubo, če bo menjalni tečaj čez pol leta nižji od dogovorjenega, npr. 1 EUR= 1.3 USD, ali če bo trenutna moč obresti čez pol leta nižja od dogovorjene, npr. $Y(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) = 4\%$.

3. naloga

(a) **[6 točk]**

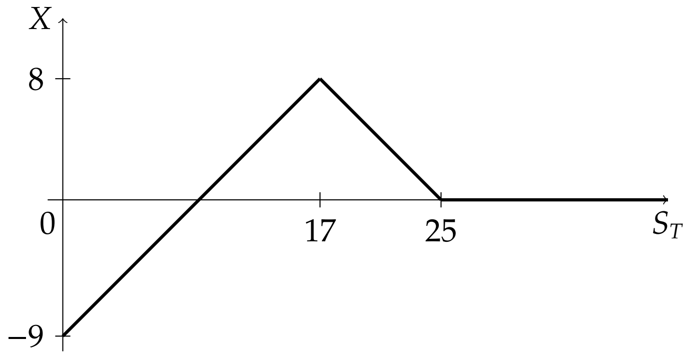
Izplačilo posameznih opcij ob zapadlosti T:

- kratka pozicija evropske prodajne opcije s $K_1 = 17$ EUR $\Rightarrow -\max\{17 - S_T, 0\}$,
- dolga pozicija evropske prodajne opcije s $K_1 = 25$ EUR $\Rightarrow +\max\{25 - S_T, 0\}$.

Izplačila prodajnega razmernostnega koraka so torej $-2\max\{17 - S_T, 0\} + \max\{25 - S_T, 0\}$, kar poenostavimo v

$$X = \begin{cases} S_T - 9; & 0 \le S_T \le 17 \\ 25 - S_T; & 17 < S_T \le 25 \\ 0; & S_T > 25 \end{cases}$$

Grafični prikaz izplačila kot funkcije S_T:



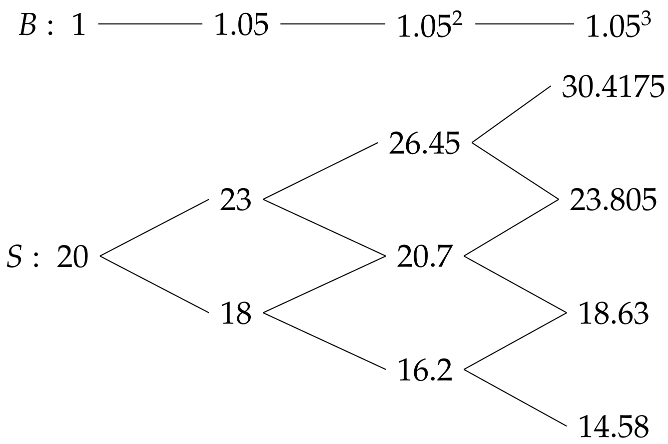
(b) **[2 točki]**

Izplačila so največja za S_T malo nižji od S_0. Za instrument je zainteresiran investitor, ki pričakuje, da bo cena delnice malo padla, volatilnost pa bo nizka.

(c) **[6 točk]**

Do prihodnosti nevtralno prehodno verjetnost izračunamo po formuli $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{3}{5}$. Od tod dobimo še $1 - q = \frac{2}{5}$. Verjetnosti sta neodvisni od časa.

Ker je izplačilo prodajnega razmernostnega koraka odvisno le od končne cene delnice, lahko časovni razvoj enote bančnega računa in cene delnice prikažemo z reduciranim binomskim drevesom.



(d) **[6 točk]**

Za določanje cene opcijske strategije potrebujemo naslednje podatke:

Stanje	Cena delnice	Izplačilo X	Verjetnost Q
uuu	30.4175	0	$(\frac{3}{5})^3$
uud	23.805	$25 - 23.805$	$3 \cdot (\frac{3}{5})^2 \cdot \frac{2}{5}$
udd	18.63	$25 - 18.63$	$3 \cdot \frac{3}{5} \cdot (\frac{2}{5})^2$
ddd	14.58	$14,58 - 9$	$(\frac{2}{5})^3$

Dobimo $c = \frac{1}{1.05^3} \mathrm{E}_Q(X) = 2.3392$ EUR.

Pisni izpit: 29. junij 2009

1. naloga

(a) **[4 točke]**

Podatki: $S_0 = 50$ EUR, $Y(0,t) = 5\%$ za vsak t, $T = \frac{1}{4}$. Sklenemo terminski posel.

Izročitveno ceno izračunamo po formuli $K = S_0 e^{T \cdot Y(0,T)} = 50.6289$ EUR.

(b) **[5 točk]**

Dividenda $I = 2$ EUR ob času $T' = \frac{1}{6}$.

Nova izročitvena cena znaša $K' = S_0 e^{T \cdot Y(0,T)} - I \cdot e^{(T-T') \cdot Y(0,T',T)} = 48.6206$ EUR.

Pri tem upoštevamo, da je zaradi konstantne moči obresti $Y(0,T',T) = 5\%$.

(c) **[6 točk]**

Zaradi sklenjenega posla moramo za delnico plačati 50.6289 EUR namesto 48.6206 EUR, torej preveč. Zato moramo posel prodati, delnico pa kupiti.

Strategija U:

$t = 0$: kupi delnico,
sposodi si S_0 do T,
prodaj terminski posel,
dogovori se za terminsko moč obresti $Y(0,T',T)$.

$$U_0 = -S_0 + S_0 + 0 = 0$$

$t = T'$: kupi delnico,
prejmi dividendo I,
investiraj dividendo do časa T po dogovorjeni moči obresti.

$$U_{T'} = +I - I = 0$$

$t = T$: imetniku dolge pozicije v poslu prodaj delnico za K,
odplačaj dolg S_0 z obrestmi,
dvigni dividendo I z obrestmi.

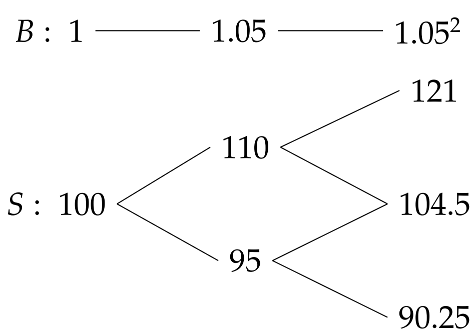
$$U_T = S_0 e^{T \cdot Y(0,T)} - S_0 e^{T \cdot Y(0,T)} + I e^{(T-T') \cdot Y(0,T',T)} = 2.0084 \text{ EUR} > 0.$$

U je arbitražna strategija.

2. naloga

(a) **[4 točke]**

Ker cen ne želimo ponavljati, prihodnjo negotovost prikažemo z reduciranim binomskim drevesom.



Do prihodnosti nevtralno verjetnost izračunamo po formuli $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{2}{3}$.
Cena delnice S v času 2 je glede na verjetnost Q slučajna spremenljivka

$$S_2 \sim \begin{pmatrix} 121 & 104.5 & 90.25 \\ q^2 & 2q(1-q) & (1-q)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 & 104.5 & 90.25 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

(b) **[3 točke]**

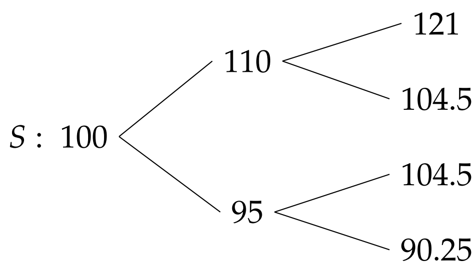
Evropska nakupna opcija ob zapadlosti $T = 2$ izplača $X = \max\{S_2 - K_1, 0\}$. Računamo:

Stanje	Cena delnice	Izplačilo X	Verjetnost Q
uu	121	21	$\frac{4}{9}$
ud	104.5	4.5	$\frac{4}{9}$
dd	90.25	0	$\frac{1}{9}$

Dobimo $c_1 = \frac{1}{1.05^2}\,\mathrm{E}_Q(X) = 10.2797$ EUR.

(c) **[5 točk]**

Izplačila opcij so odvisna od poti cene delnice, zato uporabimo polno drevo.



Za izračun cene *average price call* opcije potrebujemo:

Stanje	$\overline{S}$	Izplačilo Y	Verjetnost Q
uu	$110.\overline{3}$	$10.\overline{3}$	$\frac{4}{9}$
ud	$104.8\overline{3}$	$4.8\overline{3}$	$\frac{2}{9}$
du	$99.8\overline{3}$	0	$\frac{2}{9}$
dd	$95.08\overline{3}$	0	$\frac{1}{9}$

Dobimo $c_2 = \frac{1}{1.05^2}\,\mathrm{E}_Q(Y) = 5.1398$ EUR.

(d) **[3 točke]**

Za izračun cene *average strike call* opcije potrebujemo:

Stanje	S	$\overline{S}$	Izplačilo Z	Verjetnost Q
uu	121	$110.\overline{3}$	$10.\overline{6}$	$\frac{4}{9}$
ud	104.5	$104.8\overline{3}$	0	$\frac{2}{9}$
du	104.5	$99.8\overline{3}$	$4.\overline{6}$	$\frac{2}{9}$
dd	90.25	$95.08\overline{3}$	0	$\frac{1}{9}$

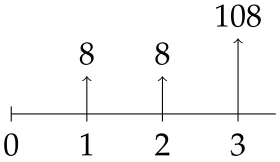
Dobimo $c_3 = \frac{1}{1.05^2}\,\mathrm{E}_Q(Z) = 5.2406$ EUR.

3. naloga

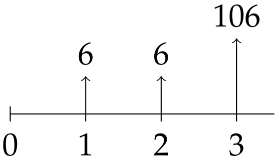
(a) **[5 točk]**

Primerjamo prihodnje denarne tokove obveznic:

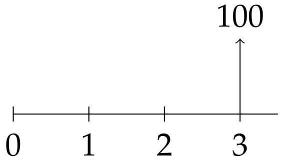
B_1



B_2

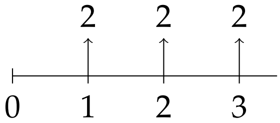


B_3



Opazimo, da portfelj iz dolge pozicije v B_1 in kratke pozicije v B_2 ponuja izplačila

$B_1 - B_2$



zato se izplačila portfelja $B_1 - 4 \cdot (B_1 - B_2) = 4B_2 - 3B_1$ ujemajo z izplačili obveznice B_3.

Enaka zveza mora veljati za cene obveznic.

Dobimo $c_3 = 4c_2 - 3c_1 = 82$ EUR.

(b) **[10 točk]**

Podatki: $t = 1$, $T = 3$, $K = 100$.

Ceno obveznice B_2 v času 1 določimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

$c_2' = 6 \cdot D(1,2) + 106 \cdot D(1,3) = 100.3574$, saj je $D(1,2) = \frac{1}{1+0.05}$ in $D(1,3) = \frac{1}{1+2\cdot 0.06}$.

V času življenja opcije obveznica izplača kupon v času 2, katerega vrednost v času 1 je $I = 6 \cdot D(1,2) = 5.7143$.

Meje za evropsko prodajno opcijo so

$$\max\{K \cdot D(t,T) + I - c_2'\} \leq p_t^E \leq K \cdot D(t,T),$$

kar znese 0.5949 EUR $\leq p_1^E \leq 95.238$ EUR.

(c) **[5 točk]**

Opcijo se bo splačalo izvršiti, če bo tržna cena nižja od 100 EUR.

Tržna cena bo enaka $106 \cdot D(2,3) = 106 \cdot \frac{1}{1+L(2,3)}$.

Iz neenačbe $106 \cdot \frac{1}{1+L(2,3)} < 100$ dobimo rešitev $L(2,3) > 6\%$.

Pisni izpit: 31. avgust 2009

1. naloga

(a) **[2 točki]**

Obravnavamo *toy model* s podatki: $R = 2\%$, $S_0 = 10$, $u = \frac{10.5}{10} = 1.05$, $d = \frac{8}{10} = 0.8$ ter $p = \frac{1}{2}$.

Ker je $0.8 < 1.02 < 1.05$, je $d < 1 + R < u$ in trg je brez arbitraže.

(b) **[4 točke]**

Izračunamo donosa $r(\omega_1) = \frac{10.5-10}{10} = 0.05$ in $r(\omega_1) = \frac{8-10}{10} = -0.2$. Velja

$$r \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} 0.05 & -0.2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad r^2 \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} 0.05^2 & (-0.2)^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

od koder izračunamo pričakovani donos $\mathrm{E}_P(r) = -0.075$, njegovo disperzijo $\mathrm{D}_P(r) = \mathrm{E}_P(r^2) - \mathrm{E}_P(r)^2 = 0.015625$ in tveganost delnice $\sigma_P(r) = \sqrt{\mathrm{D}_P(r)} = 0.125$.

(c) **[5 točk]**

Do tveganja nevtralno prehodno verjetnost izračunamo po formuli $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{22}{25}$. Velja

$$r \overset{Q}{\sim} \begin{pmatrix} 0.05 & -0.2 \\ \frac{22}{25} & \frac{3}{25} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad r^2 \overset{Q}{\sim} \begin{pmatrix} 0.05^2 & (-0.2)^2 \\ \frac{22}{25} & \frac{3}{25} \end{pmatrix}.$$

Donos delnice glede na Q je enak netvegani obrestni meri 2%.

Izračunamo še $\mathrm{D}_Q(r) = \mathrm{E}_Q(r^2) - \mathrm{E}_Q(r)^2 = 0.0066$ in tveganost $\sigma_Q(r) = \sqrt{\mathrm{D}_Q(r)} = 0.0812$.

(d) **[4 točke]**

Določamo ceno pogojne terjetve $X = \begin{bmatrix} 110.25 \\ 64 \end{bmatrix}$.

Z do tveganja nevtralno verjetnostjo dobimo $c_X = \frac{1}{1.02}\,\mathrm{E}_Q(X) = 102.6471$.

2. naloga

(a) **[7 točk]**

Predpostavimo, da je $c_1^E - c_2^E < 0$, torej $c_2^E > c_1^E$. Strategija U:

$t = 0$: nakup prve opcije,
prodaja druge opcije.

$$U_0 = -c_1^E + c_2^E > 0$$

$t = T$: izplačila opcij.

$$U_T = \max\{S_T - K_1, 0\} - \max\{S_T - K_2, 0\} = \begin{cases} 0; & S_T \leq K_1 \leq K_2 \\ S_T - K_1 \geq 0; & K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1 \geq 0; & K_1 \leq K_2 < S_T \end{cases}$$

U je arbitražna strategija.

Predpostavimo še $c_1^E - c_2^E > e^{-YT}(K_2 - K_1)$. Strategija U:

$t = 0$: prodaja prve opcije,
nakup druge opcije,
investicija zneska $e^{-YT}(K_2 - K_1)$ do časa T.

$$U_0 = c_1^E - c_2^E - e^{-YT}(K_2 - K_1) > 0$$

$t = T$: izplačila opcij,
dvig investiranega denarja z obrestmi.

$$U_T = -\max\{S_T - K_1, 0\} + \max\{S_T - K_2, 0\} + (K_2 - K_1)$$

$$U_T = \begin{cases} K_2 - K_1 \geq 0; & S_T \leq K_1 \leq K_2 \\ K_2 - S_T \geq 0; & K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0; & K_1 \leq K_2 < S_T \end{cases}$$

U je arbitražna strategija.

(b) **[4 točke]**

Paritetni enačbi sta $p_1^E + S_0 = c_1^E + K_1 e^{-YT}$ in $p_2^E + S_0 = c_2^E + K_2 e^{-YT}$.

(c) **[4 točke]**

Odštejemo enačbi iz naloge (b) in dobimo $p_1^E - p_2^E = (c_1^E - c_2^E) + (K_1 - K_2)e^{-YT}$.

Upoštevamo $c_1^E - c_2^E \geq 0$ in dobimo $p_1^E - p_2^E \geq (K_1 - K_2)e^{-YT}$.

Upoštevamo $c_1^E - c_2^E \leq e^{-YT}(K_2 - K_1)$ in dobimo $p_1^E - p_2^E \geq 0$.

Torej $0 \leq p_2^E - p_1^E \leq (K_1 - K_2)e^{-YT}$.

3. naloga

(a) **[4 točke]**

Podatki: $S_0 = 1.05$ EUR, $n = 10000$, $T = \frac{1}{3}$.

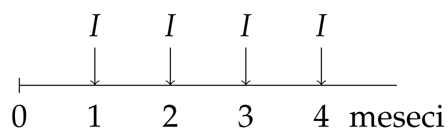
Izročitveno ceno izračunamo po formuli $K = S_0 e^{T \cdot Y(0,T)} = 1.058081$ EUR.

Za gorivo bodo plačali $n \cdot K = 10580.81$ EUR.

(b) **[7 točk]**

Strošek skladiščenja 1 litra goriva znaša $I = \frac{0.01}{100} = 0.0001$ EUR.

Stroške plačamo v 4 enakih zneskih po koncu vsakega meseca:



Neto sedanja vrednost vseh stroškov je $I' = I \cdot (D(0, \frac{1}{12}) + D(0, \frac{1}{6}) + D(0, \frac{1}{4}) + D(0, \frac{1}{3})) = 0.0004$ EUR, saj je $D(0, t) = e^{-t \cdot Y(0,t)}$.

Nova izročitvena cena znaša $K' = (S_0 + I')e^{T \cdot Y(0,T)} = 1.058482$ EUR.

Za celotno gorivo bodo plačali $n \cdot K' = 10584.82$ EUR.

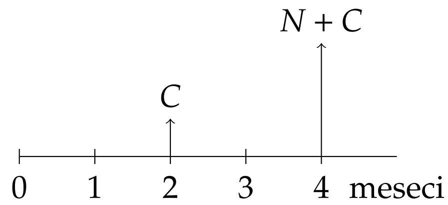
(c) **[4 točke]**

Podatki: $N = 100$ EUR, $C = 10$ EUR, $t = \frac{1}{6}$, $T = \frac{1}{3}$.

Časovna struktura moči obresti z upoštevanim pribitkom $\delta = 0.5\%$ je

t	$2m$	$4m$
$\tilde{Y}(0, t)$	2.4%	2.8%

Ceno obveznice določimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov



Cena je $c = C \cdot \tilde{D}(0, \frac{1}{6}) + (C + N) \cdot \tilde{D}(0, \frac{1}{3})$. Upoštevamo $\tilde{D}(0, t) = e^{-t \cdot \tilde{Y}(0,t)}$ in dobimo $c = 118.9382$ EUR

(d) **[5 točk]**

Terminska moč obresti $\tilde{Y}(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$, ki jo uporabimo za investiranje kupona, je

$$\tilde{Y}(0, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}) = 2\tilde{Y}(0, \tfrac{1}{3}) - \tilde{Y}(0, \tfrac{1}{6}) = 3.2\%.$$

Vrednost kupona ob dospetju znaša $C' = Ce^{\frac{1}{6} \cdot \tilde{Y}(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})} = 10.05348$ EUR.

Z nakupom ene obveznice imamo ob dospetju $N + C + C' = 120.05348$ EUR, zato moramo kupiti $\frac{10584.82}{120.05348} = 88.17$ obveznic.

Pisni izpit: 21. september 2009

1. naloga

(a) **[5 točk]**

Podatek: $N = 100000$ EUR. Uporabimo formulo $L_{\text{SWAP}} = \frac{1-D(0,t_n)}{\Delta \sum_{i=1}^{n} D(0,t_i)}$. Pri tem je $\Delta = 1$ in $t_i = \frac{i}{4}$.

Pri navadnem obrestovanju je $D(0,t_i) = \frac{1}{1+t_i \cdot L(0,t_i)}$. Iz tabele preberemo $L(0,\frac{1}{4}) = 4.995\%$, $L(0,\frac{1}{2}) = 5.145\%$, $L(0,\frac{3}{4}) = 5.273\%$ in $L(0,1) = 5.418\%$.

Dobimo $L_{\text{SWAP}} = 5.308\%$.

(b) **[6 točk]**

1.10.08: Spremenljivi tok izračunamo z $L(0,\frac{1}{4}) = 4.955\% < L_{\text{SWAP}}$.

Neto razliko $x_1 = N \cdot \Delta \cdot (L_{\text{SWAP}} - L(0,\frac{1}{4})) = 88.25$ EUR plača podjetje banki.

2.1.09: Spremenljivi tok izračunamo z $L(\frac{1}{4},\frac{1}{2}) = 5.291\% < L_{\text{SWAP}}$.

Neto razliko $x_2 = N \cdot \Delta \cdot (L_{\text{SWAP}} - L(\frac{1}{4},\frac{1}{2})) = 4.25$ EUR plača podjetje banki.

1.4.09: Spremenljivi tok izračunamo z $L(\frac{1}{2},\frac{3}{4}) = 2.859\% < L_{\text{SWAP}}$.

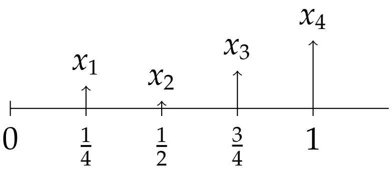
Neto razliko $x_3 = N \cdot \Delta \cdot (L_{\text{SWAP}} - L(\frac{1}{2},\frac{3}{4})) = 616.25$ EUR plača podjetje banki.

1.7.09: Spremenljivi tok izračunamo z $L(\frac{3}{4},1) = 1.498\% < L_{\text{SWAP}}$.

Neto razliko $x_4 = N \cdot \Delta \cdot (L_{\text{SWAP}} - L(\frac{3}{4},1)) = 952.50$ EUR plača podjetje banki.

(c) **[4 točke]**

Podjetje z zamenjavo ves čas ustvarja izgubo. Denarni odlivi



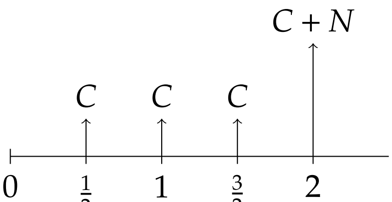
imajo ob dospetju vrednost $-x_1 e^{\frac{3}{4}\cdot 0.03} - x_2 e^{\frac{1}{2}\cdot 0.03} - x_3 e^{\frac{1}{4}\cdot 0.03} - x_4 = -1667.96$ EUR.

2. naloga

(a) **[4 točke]**

Podatki: $N = 1000$ EUR, $c = 5\%$, $\Delta = \frac{1}{2}$. Fiksni kupon znaša $C = \frac{1}{2}c \cdot N = 25$ EUR.

Ceno obveznice določimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



Pri navadnem obrestovanju je $D(0,t) = \frac{1}{1+t\cdot L(0,t)}$.

Dobimo $\mathrm{CB}_0 = C(D(0,\frac{1}{2}) + D(0,1) + D(0,\frac{3}{2}) + D(0,2)) + N \cdot D(0,2) = 1045.80$ EUR.

Po definiciji je $\mathrm{FL}_0 = 1000$ EUR.

(b) **[4 točke]**

Floater je predrag. Strategija U:

$t = 0$: prodaj floater,
sposodi si S_0 do T,
investiraj 1000 EUR do trenutka $\frac{1}{2}$.

$U_0 = 1045.8 - 1000 = 45.80 \text{ EUR} > 0$

$t = \frac{i}{2}$: ($i = 1, 2, 3$)
vzameš obresti iz banke in reinvestiraš glavnico 1000 EUR to trenutka $\frac{i+1}{2}$,
odplačaš kupon floaterja.

$U_{\frac{i}{2}} = 0$

$t = 2$: vzameš obresti in glavnico iz banke,
odplačaš kupon in glavnico floaterja.

$U_2 = 0$ EUR

U je arbitražna strategija.

(c) **[3 točke]**

Vrednost floaterja tik po izplačilu drugega kupona ob $t = 1$ je 1000 EUR in ni negotova.

Opcija nam da pravico za nakup le-tega za 990 EUR.

Opcija omogoča netvegano izplačilo 10 EUR ob zapadlosti, zato je njena poštena cena $c = 10 \cdot D(0,1) = 9.7847$ EUR.

(d) **[4 točke]**

Opciji imata enako osnovno premoženje CB, zapadlost $T = 1$ in izvršilno ceno K.

Njuni premiji povezuje paritetna enačba

$$p_0^E + CB_0 - I(0,T) = c_0^E + K \cdot D(0,T).$$

Z upoštevanjem $p_0^E = c_0^E$ dobimo $K = \frac{CB_0 - I(0,T)}{D(0,T)}$, kjer je $I(0,T)$ sedanja vrednost dividend osnovnega premoženja v času življenja opcije.

$I(0,T)$ vsebuje dva kupona in je $I(0,T) = 25(D(0,\frac{1}{2}) + D(0,1)) = 49.2143$ EUR.

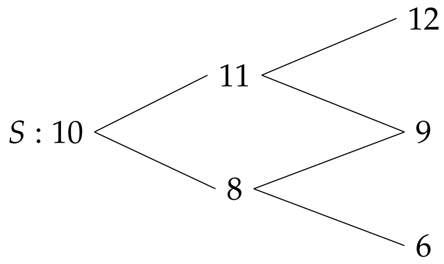
Izračunamo še $D(0,T) = \frac{1}{1+0.022} = 0.9785$ in dobimo $K = 1022.60$ EUR.

3. naloga

(a) **[3 točke]**

Prihodnjo negotovost lahko prikažemo z reduciranim binomskim drevesom.

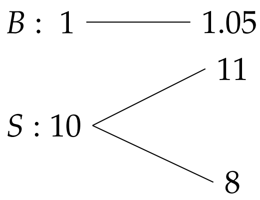
$$B: \; 1 \text{ ——— } 1.05 \text{ ——— } 1.05^2$$



(b) **[7 točk]**

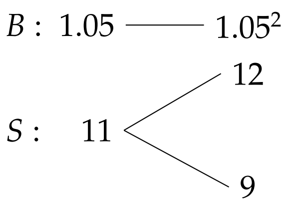
Pozor: Opisani model ni klasični binomski!

Obravnavamo vsak enoobdobni model posebej kot *toy model*.



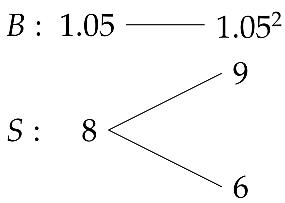
$R_1 = 5\%$
$u_1 = 1.1$
$d_1 = 0.8$

$q_1 = \frac{1+R_1-d_1}{u_1-d_1} = \frac{5}{6}$



$R_2 = 5\%$
$u_2 = \frac{12}{11}$
$d_2 = \frac{9}{11}$

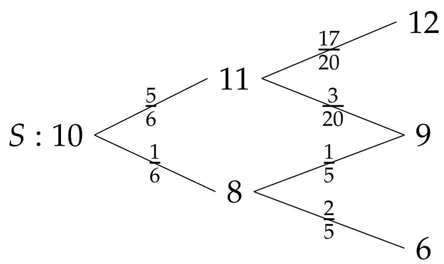
$q_2 = \frac{1+R_2-d_2}{u_2-d_2} = \frac{17}{20}$



$R_3 = 5\%$
$u_3 = \frac{9}{8}$
$d_3 = \frac{6}{8}$

$q_3 = \frac{1+R_3-d_3}{u_3-d_3} = \frac{4}{5}$

Prehodne do tveganja nevtralne verjetnosti so torej



do tveganja nevtralne verjetnosti končnih stanj pa

$$S_2 \sim \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ \frac{17}{24} & \frac{9}{40} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

(c) **[4 točke]**

Evropska prodajna opcija s $K = 10$ in $T = 2$ je pogojna terjatev z izplačili ob zapadlosti

$$X = \max\{K - S_T, 0\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Njeno ceno določimo po formuli $c = \frac{1}{1.05^2}\,\mathrm{E}_Q(X) = 0.3553$ EUR.

(d) **[6 točk]**

Instrument vrednotimo z vzratno indukcijo.

$t = 2$: (uu) izvršitev: $2 \cdot |12 - 10| = 4$

(ud) izvršitev: $2 \cdot |9 - 10| = 2$

(dd) izvršitev: $2 \cdot |6 - 10| = 8$

$t = 1$: (u) izvršitev: $2 \cdot |11 - 10| = 2$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(4 \cdot \frac{17}{20} + 2 \cdot \frac{3}{20}) = \underline{3.52381} \Rightarrow$ čakamo

(d) izvršitev: $2 \cdot |8 - 10| = \underline{4}$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(2 \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot \frac{1}{5}) = 3.52381 \Rightarrow$ izvršimo

$t = 0$: (Ω) izvršitev: $2 \cdot |10 - 10| = 0$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(3.52381 \cdot \frac{5}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6}) = \underline{3.05367} \Rightarrow$ čakamo

Cena ameriške terjatve je 3.05367 EUR.