Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

FINANČNA MATEMATIKA 1

Rešitve kolokvijev in izpitov
2009/2010

Na naslednjih straneh so objavljene kratke rešitve nalog, ki so jih študenti reševali na kolokvijih in izpitih iz Finančne matematike 1 v študijskem letu 2009/2010.

Do končne rešitve običajno vodi več pravilnih poti. Vse nikoli niso navedene. Struktura točk je zapisana v oklatih oklepajih. Večina točk je postopkovnih, zato svoje postopke reševanja vedno natančno opisujte.

V primeru nejasnosti se za nasvet obrnite na asistente.

Če odkrijete napako, jo prosim sporočite na `ales.toman@imfm.si`.

1. kolokvij	19. april 2010
2. kolokvij	2. kolokvij: 31. maj 2010
Pisni izpit	24. junij 2010
Pisni izpit	31. avgust 2010
Pisni izpit	13. september 2010

1. kolokvij: 19. april 2010

1. naloga

(a) **[4 točke]**

Podatki: $S_0 = 60$ EUR, $T = 1$, dividenda $d = 5$ EUR ob $t = \frac{3}{4}$.

Izročitveno ceno K_1 izračunamo po formuli $K_1 = (S_0 - I(0,1)) \cdot A(0,1)$, kjer je $I(0,1)$ sedanja vrednost dividend, izplačanih v času veljavnosti posla.

Torej je $I(0,1) = d \cdot D(0, \frac{3}{4}) = 5 \cdot e^{-\frac{3}{4} \cdot 0.022} = 4.9182$ EUR.

Upoštevamo še $A(0,1) = e^{0.0245}$ in dobimo $K_1 = 56.45$ EUR.

Začetna vrednost sklenjenega posla je 0 po definiciji.

(b) **[4 točke]**

Investitor ima dogovorjeno izročitveno ceno $K_2 = 55$ EUR, danes pa bi lahko sklenil izročitveno ceno K_1. Ker je $K_2 < K_1$ (danes bi si lahko zagotovil višjo prodajno ceno), je za investitorja vrednost posla negativna.

$V_0' = (K_2 - K_1) \cdot D(0,1) = (55 - 56.45)e^{-0.022} = -1.41$ EUR.

Pri tem smo uporabili formulo za vrednost posla za imetnika kratke pozicije.

(c) **[7 točk]**

Najprej izračunamo terminsko moč obresti $Y(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4} Y(0, \frac{3}{4}) - \frac{1}{2} Y(0, \frac{1}{2}) \right) = 3.10\%$.

Denarni tok $x \cdot S_{\frac{1}{2}}$ si lahko zagotovimo s prodajo x delnic v času $\frac{1}{2}$. Dobljeni znesek investiramo do časa $\frac{3}{4}$ po dogovorjeni terminski obrestni meri. x določimo tako, da je $x \cdot S_{\frac{1}{2}} \cdot A(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = 0.1 S_{\frac{1}{2}}$.

Upoštevamo, da je terminski obrestovalni faktor $A(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = e^{\frac{1}{4} Y(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})} = 1.00778$, in dobimo $x = 0.09923$.

Strategija U:

$t = 0$: kupi delež x delnice Aaa,
dogovori se za $Y(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

$U_0 = -x \cdot S_0 = -5.95$ EUR

$t = \frac{1}{2}$: prodaj x delnice Aaa,
investiraj znesek do časa $\frac{3}{4}$.

$U_{\frac{1}{2}} = +x \cdot S_{\frac{1}{2}} - x \cdot S_{\frac{1}{2}} = 0$

$t = \frac{3}{4}$: zaključi investicijo.

$U_{\frac{3}{4}} = +x \cdot S_{\frac{1}{2}} \cdot A(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = 0.1 \cdot S_{\frac{1}{2}}$

Ker se denarni tokovi strategije U v trenutkih $\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{4}$ ujemajo z obravnavano dividendo, je njena sedanja vrednost enaka začetni vrednosti strategije, torej 5.95 EUR.

2. naloga

(a) **[3 točke]**

Uporabimo znano formulo $Y(0,T,U) = \frac{U \cdot Y(0,U) - T \cdot Y(0,T)}{U-T}$ in definicijo funkcije F in dobimo $Y(0,T,U) = \frac{U \cdot F(U) - T \cdot F(T)}{U-T}$.

(b) **[4 točke]**

Računamo $f(0,T) = \lim_{U \searrow T} Y(0,T,U) = \lim_{U \searrow T} \frac{U \cdot F(U) - T \cdot F(T)}{U-T}$.

Z zadnjem izrazu prepoznamo definicijo odvoda produkta $T \cdot F(T)$ v točki T.

Torej $f(0,T) = (T \cdot F(T))' = F(T) + T \cdot F'(T)$.

(c) **[6 točk]**

$$\lim_{T \searrow 0} F(T) = \lim_{T \searrow 0} \left(\beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} - \beta_2 e^{-T/\alpha} \right) = \beta_0 + \beta_1.$$

Pri tem smo upoštevali $\lim_{T \searrow 0} \frac{1-e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{T \searrow 0} e^{-T/\alpha} = 1$ po L'Hospitalovemu pravilu.

$$\lim_{T \to \infty} F(T) = \lim_{T \to \infty} \left(\beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} - \beta_2 e^{-T/\alpha} \right) = \beta_0.$$

Za izračun intenzivnosti terminske obrestne mere uporabimo točko (b) in računamo

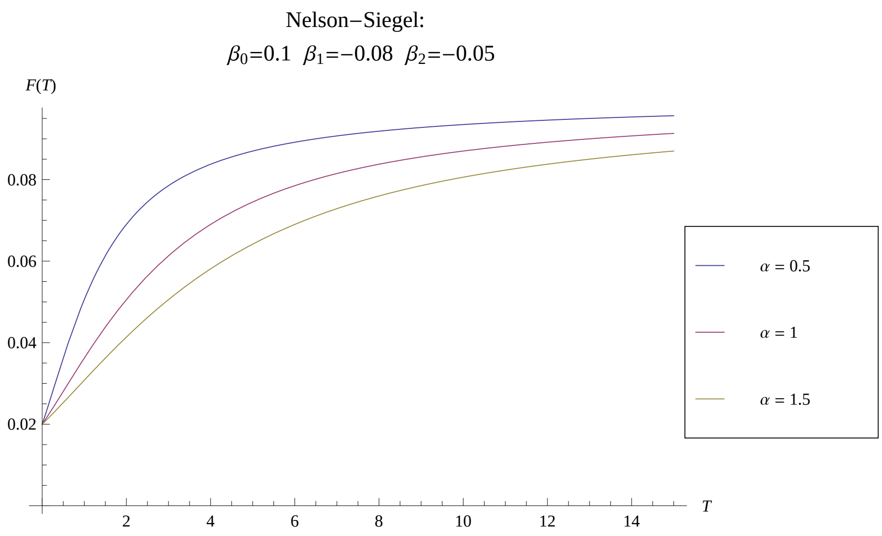
$f(0,T) = F(T) + T \cdot F'(T) =$

$$= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} - \beta_2 e^{-T/\alpha} + T \left((\beta_0 + \beta_1) \frac{-e^{-T/\alpha}(-1/\alpha)(T/\alpha) - (1/\alpha)(1 - e^{-T/\alpha})}{(T/\alpha)^2} - \beta_2 e^{-T/\alpha}(-1/\alpha) \right) =$$

$$= \beta_0 + \beta_1 e^{-T/\alpha} + \frac{T\beta_2}{\alpha} e^{-T/\alpha}$$

(d) **[2 točk]**

Parameter α pomeni razteg/skrčitev funkcije v vodoravni smeri (os T).



Grafični prikaz časovne strukture pri različnih vrednostih α.

3. naloga

(a) **[5 točke]**

Podatki: mesečno vplačilo $a = 800$ EUR, $R = 6\%$, ciljni znesek $N = 0.2 \cdot 120\,000 = 24\,000$ EUR.

Varčevalna shema

Označimo z $x = 1 + \frac{R}{12} = 1.005$ mesečni obrestovalni faktor in izračunamo stanje po vplačilu obroka v trenutku n, torej po vplačilu $(n+1)$-ega obroka.

$a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n = a(1 + x + \cdots + x^n) = a \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Zanima nas najmajši celoštevilski n, pri katerem je $a \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \geq 24\,000$.

Pri reševanju neenačbe pazimo na neenačaje, saj je $x > 1$, torej $(1 - x) < 0$ in $\log x > 0$. Logaritem je naraščajoča funkcija, zato logaritmiranje ohranja neenakosti.

Dobimo rezultat $n \geq \frac{\log(30x-29)}{\log(x)} - 1 = 27.02$.

Prava izbira je torej $n = 28$.

Opomba. Po vplačilu 28. obroka ob koncu 27. meseca privarčevanih sredstev še ni dovolj za polog ob nakupu stanovanja. Razliko v naslednjem mesecu prinesejo obresti, zato je v resnici zadnji (29.) vplačani obrok enak 0.

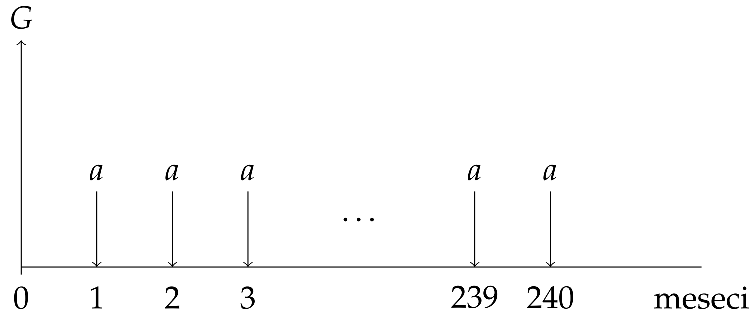
(b) **[8 točke]**

Glavnica kredita znaša $G = 0.8 \cdot 120\,000$ EUR $= 96\,000$ EUR.

Brez škode za splošnost trenutek najema kredita označimo z 0.

Odplačilna doba je $n = 240$ mesecev, $R_1 = 7\%$, $R_2 = 8\%$ in $R_3 = 6\%$.

Amortizacijski načrt



Banka A:

Naj bo $y_1 = (1 + \frac{R_1}{12})^{-1} = 0.9942$ mesečni diskontni faktor in a_1 iskana anuiteta.

Iz ekvivalence sledi $G = a_1 y_1 + a_1 y_1^2 + \cdots + a_1 y_1^{240} = a_1 y_1 (1 + y_1 + \cdots + y_1^{239}) = a_1 y_1 \frac{1-y_1^{240}}{1-y_1}$.

Torej $a_1 = \frac{G(1-y_1)}{y_1(1-y_1^{240})} = 744.29$ EUR.

Banka B:

Naj bosta $y_2 = (1+\frac{R_2}{12})^{-1} = 0.9934$ in $y_3 = (1+\frac{R_3}{12})^{-1} = 0.9950$ mesečna diskontna faktorja in a_2 iskana anuiteta.

Veljati mora

$$G = a_2y_2 + a_2y_2^2 + \cdots + a_2y_2^{120} + a_2y_2^{120}y_3 + a_2y_2^{120}y_3^2 + \cdots + a_2y_2^{120}y_3^{120} =$$

$$= a_2y_2(1+y_2+\cdots+y_2^{119}) + a_2y_2^{120}(1+y_3+\cdots+y_3^{119}) =$$

$$= a_2y_2\frac{1-y_2^{120}}{1-y_2} + a_2y_2^{120}y_3\frac{1-y_3^{120}}{1-y_3}$$

$$= a_2\left(y_2\frac{1-y_2^{120}}{1-y_2} + y_2^{120}y_3\frac{1-y_3^{120}}{1-y_3}\right).$$

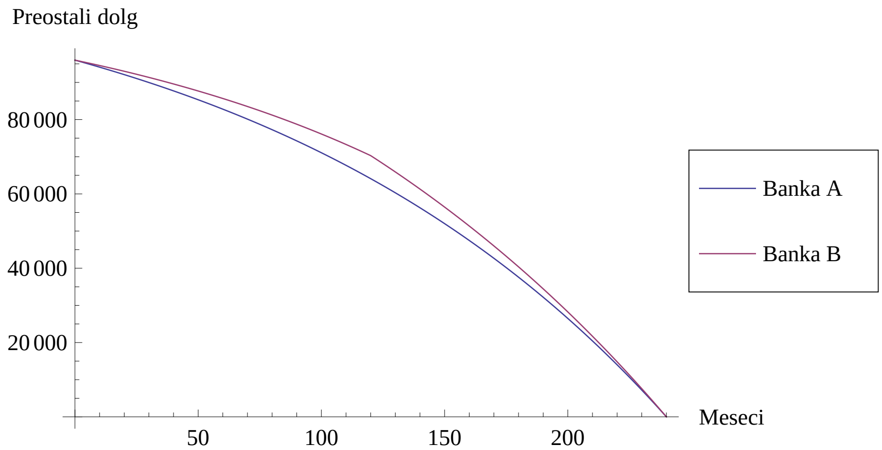
Od tod dobimo $a_2 = \dfrac{G}{y_2\frac{1-y_2^{120}}{1-y_2} + y_2^{120}y_3\frac{1-y_3^{120}}{1-y_3}} = 780.48$ EUR.

(c) **[2 točk]**

Obresti se vsak mesec obračunajo na osnovi preostalega dolga.

Banka A zaračunava konstantne obresti skozi celotno amortizacijsko obdobje.

Banka B zaračunava visoke obresti v času, ko je preostali dolg visok, in nizke, ko je preostali dolg nizek. Zato je banka B dražja.



Grafični prikaz upadanja dolga pri banki A in pri banki B.

(d) **[5 točk]**

Osnova za reprogram kredita je preostali dolg po plačilu 120. mesečnega obroka. Uporabljamo rezultate iz banke A in $R_4 = 7.5\%$.

Nova glavnica znaša $G' = R_{120} = a_1y_1\frac{1-y_1^{120}}{1-y_1} = 64\,102.72$ EUR.

Novi mesečni diskontni faktor je $y_4 = (1+\frac{R_4}{12})^{-1} = 0.9938$.

Anuiteta v reprogramu je torej $a_3 = \frac{G'(1-y_4)}{y_4(1-y_4^{240})} = 516.41$ EUR.

Pri tem pazimo, da nova odplačilna doba zopet znaša 20 let.

2. kolokvij: 31. maj 2010

1. naloga

(a) **[3 točke]**

Ker računamo do prihodnosti nevtralno verjetnost Q, za numerar izberemo bančni račun. Prehodno verjetnost izračunamo po formuli $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{2}{3}$.

Končna stanja in pripadajoče verjetnosti so prikazane v tabeli:

Stanje	Cena delnice	Verjetnost Q
u^3	$S_0u^3 = 133.1$	$q^3 = \frac{8}{27}$
u^2d	$S_0u^2d = 114.95$	$3q^2(1-q) = \frac{4}{9}$
ud^2	$S_0ud^2 = 99.275$	$3q(1-q)^2 = \frac{2}{9}$
d^3	$S_0d^3 = 85.7573$	$(1-q)^3 = \frac{1}{27}$

(b) **[4 točke]**

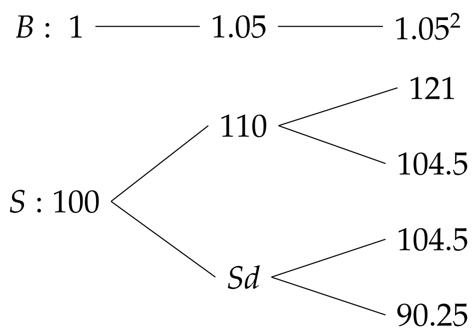
Za vrednotenje evropske prodajne opcije so pomembna le končna stanja in pripadajoča izplačila $Y = \max\{K - S_3, 0\}$:

Stanje	Cena delnice S_3	Izplačilo Y	Verjetnost Q
u^3	133.1	0	$\frac{8}{27}$
u^2d	114.95	0	$\frac{4}{9}$
ud^2	99.275	5.725	$\frac{2}{9}$
d^3	85.7573	19.2427	$\frac{1}{27}$

Numerar je v času 3 vreden 1.05^3, v času 0 pa 1, zato na osnovi do prihodnosti nevtralne verjetnosti dobimo $c_X = E_Q(\frac{Y}{1.05^3}) = \frac{1}{1.05^3}(5.725 \cdot \frac{2}{9} + 19.2427 \cdot \frac{1}{27}) = 1.7146$.

(c) **[4 točke]**

Izplačila ob zapadlosti so odvisna od celotne poti cene delnice na intervalu $[0, 2]$. Narišemo polno drevo.



Na vsaki poti od časa 0 do časa 2 moramo poiskati najvišjo doseženo ceno delnice in izračunati izplačilo $X = \max\limits_{0\leq i\leq 2}\{S_i\} - S_2$.

Stanje	Cena delnice S_2	$\max\limits_{0\le i\le 2}\{S_i\}$	Izplačilo X	Verjetnost Q
uu	121	121	0	$(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$
ud	104.5	110	5.5	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
du	104.5	104.5	0	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
dd	90.25	100	9.75	$(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$

Izračunamo $c_X = \frac{1}{1.05^2}(5.5\cdot\frac{2}{9} + 9.75\cdot\frac{1}{9}) = 2.0912.$

(d) **[4 točke]**

$$B: 1 \longrightarrow 1.05$$

$$S: 100 \begin{cases} 110 \\ 95 \end{cases}$$

Obravnavamo enoobdobni model in opcijo z izplačili $Z = \max\{S_1 - K, 0\}$ ter premijo $c_Z = 12$. Obravnavamo 3 možnosti:

- $K > 110$

Potem je $Z(u) = Z(d) = 0$ in bi moralo veljati $c_Z = 0$, kar ni res.

- $95 < K \le 110$

Potem je $Z(u) = 110 - K$ in $Z(d) = 0$ in bi moralo veljati $c_Z = \frac{1}{1.05}\cdot(110-K)\cdot\frac{2}{3}$, kar ima rešitev $K = 91.1$, ki pa ne ustreza danemu pogoju.

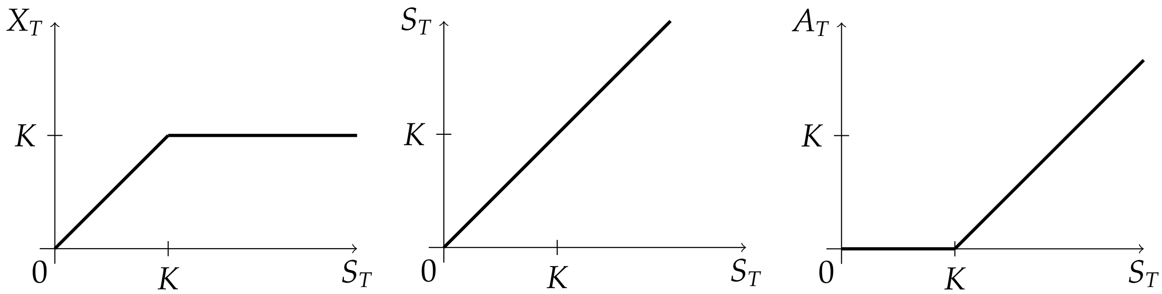
- $K \le 95$

Potem je $Z(u) = 110 - K$ in $Z(d) = 95 - K$. Iz enačbe $c_Z = \frac{1}{1.05}\Big((110-K)\cdot\frac{2}{3} + (95-K)\cdot\frac{1}{3}\Big)$ dobimo $K = 92.4$. Rešitev ustreza postavljenemu pogoju. To je edina možna izvršilna cena.

2. naloga

(a) **[3 točke]**

Narišemo izplačila instrumenta $X_T = \min\{S_T, K\}$, delnice S_T in evropske nakupne opcije $A_T = \max\{S_T - K, 0\}$ z zapadlostjo T, izvršilno ceno K, napisano na delnico S.

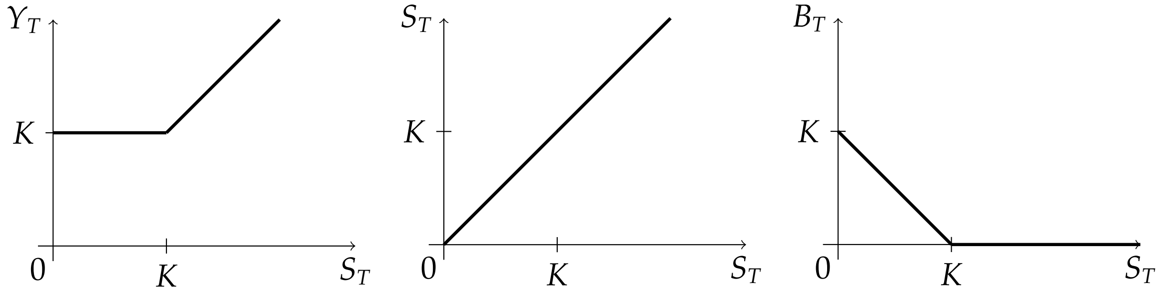


Opazimo, da je instrument X ekvivalenten portfelju iz ene delnice in kratke pozicije v obravnavani opciji.

Dokaz: $S_T - \max\{S_T - K, 0\} = -(-S_T + \max\{S_T - K, 0\}) = -\max\{-K, -S_T\} = \min\{K, S_T\}.$

(b) **[3 točke]**

Narišemo izplačila instrumenta $Y_T = \max\{S_T, K\}$, delnice S_T in evropske prodajne opcije $B_T = \max\{K - S_T, 0\}$ z zapadlostjo T, izvršilno ceno K, napisano na delnico S.



Opazimo, da je instrument Y ekvivalenten portfelju iz ene delnice in ene obravnavane opcije.

Dokaz: $S_T + \max\{K - S_T, 0\} = \max\{K, S_T\}$.

(c) **[3 točke]**

Ker so izplačila instrumenta X enaka izplačilom portfelja iz ene delnice S in (-1) evropske nakupne opcije na S z zapadlostjo T in izvršilno ceno K, mora ista zveza veljati tudi za cene:

$$c_t^X = S_t - c_t^E,$$

kjer je c_t^E cena opcije. Zanjo poznamo brezarbitražne meje

$$\max\{S_t - KD(t,T), 0\} \le c_t^E \le S_t.$$

Pomnožimo jih z (-1) ter prištejemo S_t in dobimo

$$S_t - S_t \le c_t^X \le S_t - \max\{S_t - KD(t,T), 0\},$$

kar poenostavimo v

$$0 \le c_t^X \le \min\{KD(t,T), S_t\}.$$

(d) **[3 točke]**

Sestavimo portfelj U iz enega instrumenta X in enega instrumenta Y.

Za njegovo vrednost velja

$U_t = c_t^X + c_t^Y$ in $U_T = \min\{K, S_T\} + \max\{K, S_T\} = K + S_T$.

Sestavimo še portfelj V iz ene delnice S in investicije $KD(t,T)$ do časa T. Velja

$V_t = S_t + KD(t,T)$ in $V_T = S_T + K$.

Ker je $U_T = V_T$, drugih izplačil pa ni, mora veljati $U_t = V_t$, torej $c_t^X + c_t^Y = S_t + KD(t,T)$.

Drugi način reševanja: Upoštevamo portfelja iz (a) in (b) in zapišemo

$c_t^X + c_t^Y = (S_t - c_t^E) + (S_t + p_t^E) = 2S_t + p_t^E - c_t^E$,

kjer je p_t^E cena evropske prodajne opcije na S z zapadlostjo T in izvršilno ceno K.

Iz paritete za klasično evropsko nakupno in prodajno opcijo pa vemo, da je

$p_t^E - c_t^E = KD(t,T) - S_t$, zato dobimo $c_t^X + c_t^Y = 2S_t + KD(t,T) - S_t = S_t + KD(t,T)$.

(e) **[3 točke]**

Upoštevamo, da je $\max\{S_T, K\} \geq \min\{S_T, K\}$. Sestavimo strategijo U:

čas t: kupi instrument Y,
prodaj instrument X.

$$U_t = c_t^X - c_t^Y > 0$$

čas T: unovči instrument Y,
izplačaj instrument X.

$$U_T = \max\{S_T, K\} - \min\{S_T, K\} \geq 0$$

U je arbitražna strategija.

3. naloga

(a) **[5 točk]**

Model ima 3 možna stanja v času 1 in dva vrednostna papirja, ki ju predstavimo z vektorjem cen $c = \begin{bmatrix} 75 \\ 51 \end{bmatrix}$ in matriko izplačil $M = \begin{bmatrix} 100 & 54 \\ 100 & 48 \\ 0 & 42 \end{bmatrix}$.

Ker je rang $M = 2$ manjši od števila možnih stanj, trg ni poln.

Množica dosegljivih pogojnih terjatev je $\mathcal{M} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 54 \\ 48 \\ 42 \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}$.

To je ravnina v $\mathbb{R}^3$, katere enačbo poiščemo s pomočjo normale

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Enačba ravnine je $7x - 7y - z = 0$ oziroma $z = 7(x - y)$.

Dobimo $\mathcal{M} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 7(x-y) \end{bmatrix};\ x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) **[5 točk]**

Poiščemo vektor cen stanj ψ, za katerega je $M^T\psi = c$. Komponente $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ dobimo iz sistema

$$\begin{aligned} 100\psi_1 + 100\psi_2 &= 75 \\ 54\psi_1 + 48\psi_2 + 42\psi_3 &= 51 \\ \psi_1, \psi_2, \psi_3 &> 0 \end{aligned}$$

Izberemo ψ_3 za parameter in izrazimo $\psi_1 = \frac{5}{2} - 7\psi_3$ in $\psi_2 = 7\psi_3 - \frac{7}{4}$.

Stroga pozitivnost vseh komponent določi omejitev $\frac{1}{4} < \psi_3 < \frac{5}{14}$ za parameter ψ_3.

Množica vseh krepko pozitivnih razširitev cenovnih funkcionalov je določena z družino vektorjev cen stanj

$$\Psi = \left\{\begin{bmatrix} \frac{5}{2} - 7\psi_3 \\ 7\psi_3 - \frac{7}{4} \\ \psi_3 \end{bmatrix};\ \frac{1}{4} < \psi_3 < \frac{5}{14}\right\}.$$

(c) **[5 točk]**

Pogojna terjatev $A = \begin{bmatrix} 10 \\ x \\ 14 \end{bmatrix}$ je dosegljiva natanko tedaj, ko je $14 = 7(10 - x)$, torej pri $x = 8$. Tedaj je njen izvedbeni portfelj vektor $\phi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, za katerega je $M\phi = A$.

Iz sistema enačb (ena je linearno odvisna in zato odveč)

$$\begin{aligned} 100\alpha + 54\beta &= 10 \\ 100\alpha + 48\beta &= 8 \\ 42\beta &= 14 \end{aligned}$$

dobimo rešitvi $\alpha = -\frac{2}{25}$ in $\beta = \frac{1}{3}$. Izvedbeni portelj sestavlja kratka pozicija v $-\frac{1}{125}$ obveznicah in dolga pozicija v $\frac{1}{3}$ delnice.

Cena terjatve A je cena izvedbenega portfelja $y = -\frac{1}{125} \cdot 75 + \frac{1}{3} \cdot 51 = 11$.

(d) **[5 točk]**

Terjatev $A = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$ ni dosegljiva. Za vrednotenje uporabimo razširitve cenovnega funkcionala oziroma vektorje cen stanj.

Dobimo $\hat{\pi}_0(A) = \left\langle \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - 7\psi_3 \\ 7\psi_3 - \frac{7}{4} \\ \psi_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{29}{2} - 14\psi_3$, kjer je $\frac{1}{4} < \psi_3 < \frac{5}{14}$.

Brezarbitražne cene sestavljajo interval $(\frac{29}{2} - 14 \cdot \frac{5}{14}, \frac{29}{2} - 14 \cdot \frac{1}{4}) = (\frac{19}{2}, 11)$.

Pisni izpit: 24. junij 2010

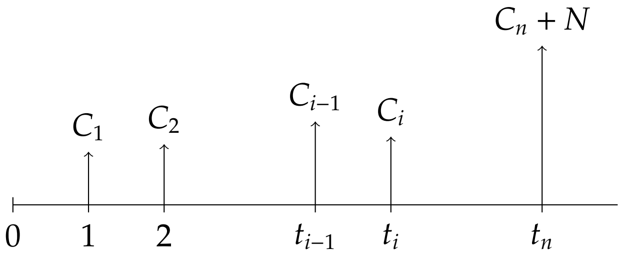
1. naloga

(a) **[3 točke]**

Terminsko obrestno mero izračunamo po formuli $L(0,1,2) = \frac{1}{2-1}\left(\frac{1+2L(0,2)}{1+L(0,1)} - 1\right) = 4\%$.

(b) **[4 točke]**

Denarni tokovi obratne obveznice z dospetjem n let:



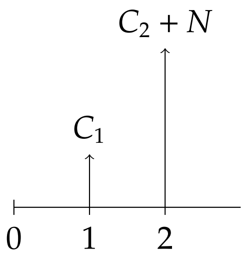
Prejeti kuponi znašajo $C_i = N(L_{\mathrm{IF}} - L(t_{i-1}, t_i)) = \underbrace{N \cdot L_{\mathrm{IF}}}_{\text{fiksno}} - \underbrace{N \cdot L(t_{i-1}, t_i)}_{\text{spremenljivo}}$.

Z znanimi finančnimi instrumenti jih lahko povežemo na več načinov.

Kupone C_i obratne obveznice lahko predstavimo kot netirane denarne tokove kratke strani v zamenjavi obrestnih mer. Pri tem je dogovorjena fiksna obrestna mera zamenjave L_{SWAP} enaka L_{IF}, navidezna glavnica zamenjave enaka nominalni vrednosti obveznice N in trenutki izplačil t_i.

Nominalno vrednost N, ki jo obratna obveznica izplača ob dospetju, predstavimo z dolgo pozicijo v brezkuponski obveznici z enako nominalno vrednostjo in dospetjem.

(c) **[5 točk]**



Instrument vrednostimo skladno z ekvivalenco iz naloge (b).

Za vrednotenje kuponov uporabimo formulo za vrednotenje kratke pozicije v zamenjavi $V^{\mathrm{SWAP}} = N\Delta \sum_{j=1}^{n}(L^{\mathrm{SWAP}} - L(0, j-1, j))D(0, j)$ ter podatke $\Delta = 1$, $N = 1000$, $n = 2$ in $L_{\mathrm{SWAP}} = L_{\mathrm{IF}} = 2\%$.

Dobimo $V^{\mathrm{SWAP}} = 1000\left[(L_{\mathrm{IF}} - L(0,0,1))D(0,1) + (L_{\mathrm{IF}} - L(0,1,2))D(0,2)\right]$.

Upoštevamo še $L(0,0,1) = L(0,1)$ in dobimo $V^{\mathrm{SWAP}} = -11.59$.

Za vrednotenje izplačila nominalne vrednosti uporabimo formulo za vrednotenje brezkuponske obveznice $V^{\mathrm{ZCB}} = ND(0, t_n)$.

Dobimo $V^{\mathrm{ZCB}} = 1000D(0,2) = 949.67$.

Vrednost obratne obveznice zato znaša $V^{\mathrm{IF}} = V^{\mathrm{SWAP}} + V^{\mathrm{ZCB}} = 938.08$.

(d) **[3 točke]**

Prvi kupon je izplačan v trenutku 1. Takrat že poznamo obrestno mero $L(1,2)$ ter točno vrednost zadnjega kupona $C_2 = N(L_{\text{IF}} - L(1,2))$.

Vrednost obratne obveznice bo tedaj znašala $[N + N(L_{\text{IF}} - L(1,2))]\, D(1,2) = \frac{N(1+L_{\text{IF}}-L(1,2))}{1+L(1,2)}$.

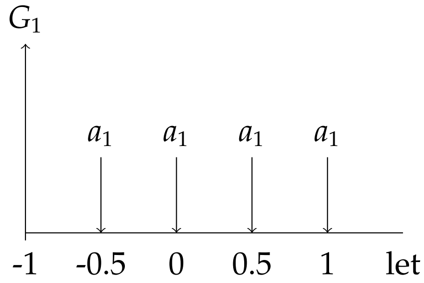
Iz neenačbe $\frac{N(1+L_{\text{IF}}-L(1,2))}{1+L(1,2)} < N$ dobimo rešitev $L(1,2) > \frac{L_{\text{IF}}}{2} = 1\%$.

Opomba: V izpitnem besedilu je bilo namesto besede "njene" zapisano "njegove". Vse točke ste prejeli tudi, če ste vrednost obratne obveznice primerjali z vrednostjo kupona.

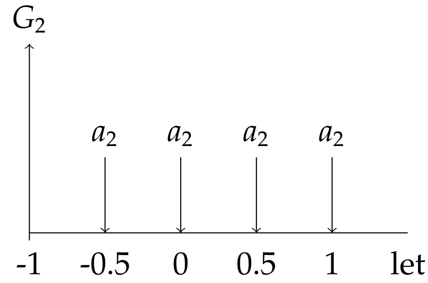
2. naloga

Označimo današnji dan z 0. Amortizacijska načrta kreditov sta bila:

Evrski kredit



Devizni kredit



(a) **[4 točke]**

Označimo z $G_1 = 80\,000$ EUR in z $G_2 = 80000 \cdot 1.5183 = 121\,464$ CHF glavnici evrskega in deviznega kredita ter z $R_1 = 6.3\%$ in $R_2 = 6.0\%$ pripadajoči nominalni obrestni meri.

Zaradi polletnega obrestovanja obdobni diskontni faktor pri deviznem kreditu znaša $x = (1 + \frac{R_2}{2})^{-1} = 1.03^{-1}$.

Velja $G_2 = a_2 x + a_2 x^2 + a_2 x^3 + a_2 x^4 = a_2 x(1 + x + x^2 + x^3) = a_2 x \cdot \frac{1-x^4}{1-x}$, kjer je a_2 iskana anuiteta.

Dobimo $a_2 = \frac{G_2(1-x)}{x(1-x^4)} = 32\,677.10$ CHF.

(b) **[2 točki]**

Evrska vrednost prve anuitete je bila $\frac{32\,677.10}{1.4882} = 21\,957.47$ EUR.

Evrska vrednost druge anuitete je $\frac{32\,677.10}{1.3611} = 24\,007.86$ EUR.

(c) **[6 točk]**

Podjetnik bo sklenil valutni terminski posel. Če uporabimo zvezo 1 EUR = 1.3611 CHF in jo primerjamo z $1f = S_0 d$, lahko uporabimo $S_0 = 1.3661$ in pri tem za domačo valuto vzamemo švicarski frank, za tujo pa evro. Če želimo vlogi valut zamenjati, moramo menjalni tečaj invertirati!

Za terminski tečaj K velja $K = S_0 \cdot \frac{D^f(0,T)}{D^d(0,T)}$, kjer sta $D^f(0,T) = \frac{1}{1+T \cdot L^f(0,T)}$ in $D^d(0,T) = \frac{1}{1+T \cdot L^d(0,T)}$ diskontna faktorja pri navadnem obrestovanju.

Za tretjo anuiteto dobimo $K_{0.5} = 1.3661 \cdot \frac{1+0.5 \cdot 0.002067}{1+0.5 \cdot 0.01024} = 1.35557$.

Njena evrska vrednost bo $\frac{32\,677.10}{1.35557} = 24\,105.80$ EUR.

Za četrto anuiteto dobimo $K_1 = 1.3661 \cdot \frac{1+0.004983}{1+0.01296} = 1.35038$.

Njena evrska vrednost bo $\frac{32\,677.10}{1.35038} = 24\,198.45$ EUR.

(d) **[3 točke]**

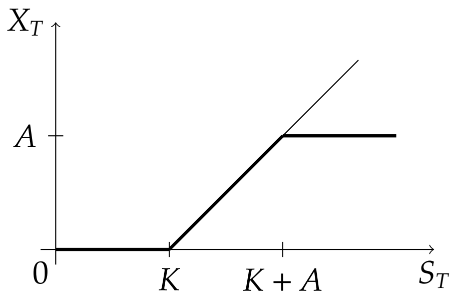
Pri evrskem kreditu bi vse anuitete znašale $a_1 = \frac{G_1(1-y)}{y(1-y^4)} = 21\ 599.41$ EUR, kjer smo uporabili polletni diskontni faktor $y = (1 + \frac{R_1}{2})^{-1} = 1.0315^{-1}$.

Evrske vrednosti vseh anuitet pri deviznem kreditu so višje od anuitete, ki bi jo plačeval pri evrskem kreditu. Devizni kredit se podjetniku ni splačal.

3. naloga

(a) **[5 točk]**

Izplačila evropske nakupne opcije s kapico dobimo iz izplačil klasične evropske nakupne opcije tako, da zneske, ki presegajo vrednost A, nadomestimo z A.



Izpeljavo ločimo na 3 intervale.

- $S_T \leq K \Longrightarrow \min\{A, \max\{S_T - K, 0\}\} = \min\{A, 0\} = 0$
- $K < S_T \leq K + A \Longrightarrow \min\{A, \max\{S_T - K, 0\}\} = \min\{A, S_T - K\} = S_T - K$
- $S_T > K + A \Longrightarrow \min\{A, \max\{S_T - K, 0\}\} = \min\{A, S_T - K\} = A$

(b) **[3 točke]**

Izberemo bančni račun za numerar in iz parametrov binomskega modela $S_0 = 100$, $u = 1.1$, $d = 0.95$, $T = 3$ ter $R = 5\%$ izračunamo do prihodnosti nevtralni prehodni verjetnosti

$$q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{2}{3} \quad \text{in} \quad 1 - q = \frac{1}{3},$$

ki veljata v celotnem modelu.

Končna stanja in pripadajoče verjetnosti so prikazane v tabeli:

Stanje	Cena delnice	Verjetnost Q
u^3	$S_0u^3 = 133.1$	$q^3 = \frac{8}{27}$
u^2d	$S_0u^2d = 114.95$	$3q^2(1-q) = \frac{4}{9}$
ud^2	$S_0ud^2 = 99.275$	$3q(1-q)^2 = \frac{2}{9}$
d^3	$S_0d^3 = 85.7573$	$(1-q)^3 = \frac{1}{27}$

(c) **[5 točk]**

Označimo $K = 90$ ter $A = 30$. Za vrednotenje evropske nakupne opcije s kapico so pomembne le končne vrednosti delnice:

Stanje	Cena delnice S_3	Izplačilo X_3	Verjetnost Q
u^3	133.1	$\min\{30, \max\{133.1 - 90, 0\}\} = 30$	$\frac{8}{27}$
u^2d	114.95	$\min\{30, \max\{114.95 - 90, 0\}\} = 24.95$	$\frac{4}{9}$
ud^2	99.275	$\min\{30, \max\{99.275 - 90, 0\}\} = 9.275$	$\frac{2}{9}$
d^3	85.7573	$\min\{30, \max\{85.7573 - 90, 0\}\} = 0$	$\frac{1}{27}$

Numerar je v času 3 vreden 1.05^3, v času 0 pa 1, zato na osnovi do prihodnosti nevtralne verjetnosti dobimo $c_X = \mathrm{E}_Q(\frac{X_3}{1.05^3}) = \frac{1}{1.05^3}(30 \cdot \frac{8}{27} + 24.95 \cdot \frac{4}{9} + 9.275 \cdot \frac{2}{9}) = 19.038$.

(d) **[7 točk]**

Izplačila instrumenta X znašajo $X_T = \begin{cases} 0; & S_T \leq K \\ S_T - K; & K < S_T \leq K + A \\ A; & S_T > K + A \end{cases}$

Zaradi predpostavke $S_0 d^T < K < K + A < S_0 u^T$ lahko sklepamo o razporeditvi izplačil po končnih stanjih binomskega drevesa s T obdobji in parametri u, d in R.

Upoštevamo še $q = \frac{1+R-d}{u-d}$.

S_T	X_T	Q
$S_0 u^T$	A	q^T
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_0 u^n d^{T-n}$	A	$\binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n}$
$S_0 u^{n-1} d^{T-n+1}$	$S_0 u^{n-1} d^{T-n+1} - K$	$\binom{T}{n-1} q^{n-1} (1-q)^{T-n+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_0 u^j d^{T-j}$	$S_0 u^j d^{T-j} - K$	$\binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_0 u^m d^{T-m}$	$S_0 u^m d^{T-m} - K$	$\binom{T}{m} q^m (1-q)^{T-m}$
$S_0 u^{m-1} d^{T-m+1}$	0	$\binom{T}{m-1} q^{m-1} (1-q)^{T-m+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_0 d^T$	0	$(1-q)^T$

Pri tem je m najmanjše število skokov gor, ki jih potrebujemo, da se končna cena delnice preseže vrednost K, ter n najmanjše število skokov gor, ki jih potrebujemo, da delnica preseže vrednost $K + A$.

Iščemo torej najmanjši naravni m, za katerega je $S_0 u^m d^{T-m} > K$.

Neenačbo preoblikujemo v $S_0 d^T (\frac{u}{d})^m > K$, iz katere dobimo $(\frac{u}{d})^m > \frac{K}{S_0 d^T}$.

Logaritmiranje ohranja neenakosti, zato je $m \log \frac{u}{d} > \log \frac{K}{S_0 d^T}$.

Ker je $u > d$, je $\log \frac{u}{d} > 0$. Iščemo torej najmanjši m, za katerega je $m > \dfrac{\log \frac{K}{S_0 d^T}}{\log \frac{u}{d}}$.

Definiramo $m = \left\lfloor \dfrac{\log \frac{K}{S_0 d^T}}{\log \frac{u}{d}} \right\rfloor + 1$. Podobno izpeljemo $n = \left\lfloor \dfrac{\log \frac{K+A}{S_0 d^T}}{\log \frac{u}{d}} \right\rfloor + 1$.

Zaradi zveznosti funkcije izplačil je možno m in n definirati tudi s funkcijo $\lceil \cdot \rceil$.
Z uporabo do prihodnosti nevtralne verjetnosti dobimo rezultat

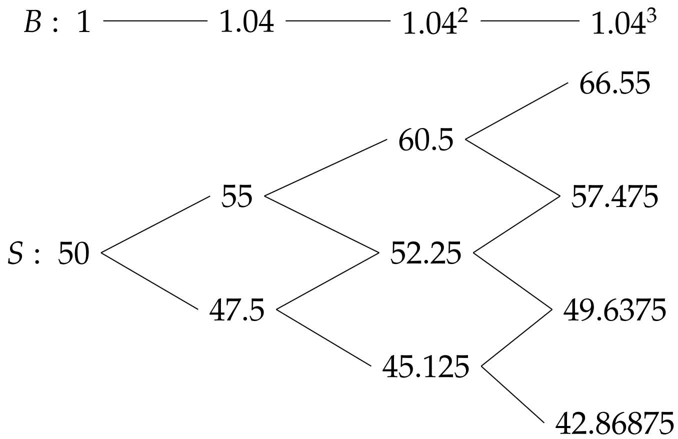
$$c_X = \frac{1}{(1+R)^T} \mathrm{E}_Q(X_T) = \frac{1}{(1+R)^T} \left(\sum_{j=m}^{n-1} (S_0 u^j d^{T-j} - K) \binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} + A \sum_{j=n}^{T} \binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} \right).$$

Pisni izpit: 31. avgust 2010

1. naloga

(a) **[4 točke]**

Za podatke $S_0 = 50$, $T = 3$, $u = 1.1$, $d = 0.95$ in $R = 4\%$ narišemo drevo dogodkov.



Ker računamo do prihodnosti nevtralno verjetnost, za numerar izberemo bančni račun.

Do prihodnosti nevtralni prehodni verjetnosti se s časom ne spreminjata in znašata $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{3}{5}$ ter $1 - q = \frac{2}{5}$.

(b) **[7 točk]**

Instrument vrednotimo z vzvratno indukcijo. Pri vsakem vozlišču drevesa primerjamo izplačilo ob takojšnji izvršitvi opcije ter vrednost instrumenta, če se odločimo za čakanje. Podčrtane so vrednosti opcije v posameznih vozliščih.

$t = 3$: (uuu) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{uuu}>50\}} = 2 \cdot 1 = \underline{2} \Rightarrow$ izvršimo

(uud) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{uud}>50\}} = 2 \cdot 1 = \underline{2} \Rightarrow$ izvršimo

(udd) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{udd}>50\}} = 2 \cdot 0 = \underline{0}$

(ddd) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{ddd}>50\}} = 2 \cdot 0 = \underline{0}$

$t = 2$: (uu) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{uu}>50\}} = 2 \cdot 1 = \underline{2}$

čakanje: $\frac{2}{1.04} = 1.9231 \Rightarrow$ izvršimo

(ud) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{ud}>50\}} = 2 \cdot 1 = \underline{2}$

čakanje: $\frac{1}{1.04} \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} = 1.1538 \Rightarrow$ izvršimo

(dd) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{dd}>50\}} = 2 \cdot 0 = 0$

čakanje: $\underline{0} \Rightarrow$ čakamo

$t = 1$: (u) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{u}>50\}} = 2 \cdot 1 = \underline{2}$

čakanje: $\frac{2}{1.04} = 1.9231 \Rightarrow$ izvršimo

(d) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{d}>50\}} = 2 \cdot 0 = 0$

čakanje: $\frac{1}{1.04} \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} = \underline{1.1538} \Rightarrow$ čakamo

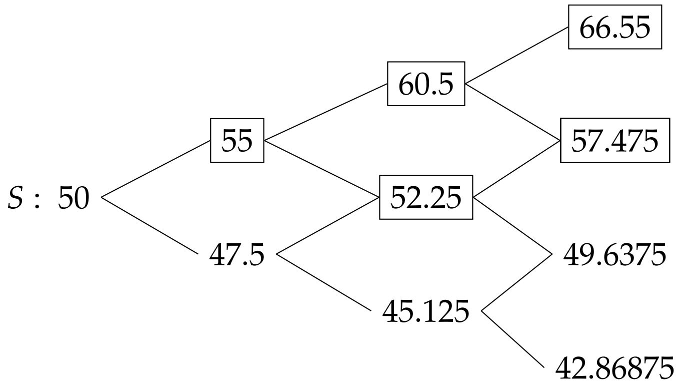
$t = 0$: $\quad (\Omega) \quad$ izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_0 > 50\}} = 2 \cdot 0 = 0$

$\qquad\qquad\qquad$ čakanje: $\frac{1}{1.04}(2 \cdot \frac{3}{5} + 1.1538 \cdot \frac{2}{5}) = \underline{1.1538} \Rightarrow$ čakamo

Začetna cena ameriške digitalne opcije mora biti 1.1538.

(c) **[4 točke]**

Če na binomskem drevesu pogledamo stanja, v katerih se opcijo res splača izvršiti (torej ne primerjamo dveh ničelnih zneskov), dobimo naslednjo optimalno strategijo: *opcijo izvrši takoj, ko cena delnice preseže 50.*



Če je cena delnice pod 50, opcija ne ponuja izplačil in se je ne splača izvršiti.

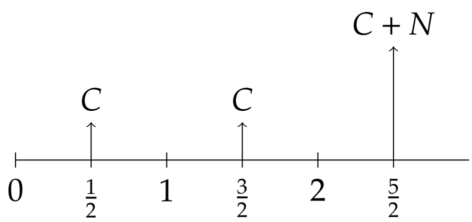
Če je cena nad 50, opcija ponuja izplačilo 2. Tega izplačila nikoli ne preseže, zato ga vzamemo ob prvem trenutku, ko je to možno (sedanja vrednost enakih zneskov pada z oddaljevanjem trenutka izplačila!).

2. naloga

(a) **[3 točke]**

Podatki: $N = 100$ EUR, $T = 2.5$ let, znesek posameznega kupona $C = 0.05 \cdot N = 5$ EUR.

Ceno obveznice določimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



$$P = C \cdot D(0, \tfrac{1}{2}) + C \cdot D(0, \tfrac{3}{2}) + (C + N) \cdot D(0, \tfrac{5}{2}) =$$
$$= 5 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 0.005} + 5 \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot 0.019} + 105 \cdot e^{-\frac{5}{2} \cdot 0.031} =$$
$$= 107.017 \text{ EUR}$$

(b) **[4 točke]**

Izročitveno ceno izračunamo po formuli $K = \left[P - I(0, \frac{3}{2})\right] \cdot A(0, \frac{3}{2})$, pri čemer je $I(0, \frac{3}{2})$ sedanja vrednost izplačil osnovnega instrumenta (kuponov obveznice) v času življenja terminskega posla in $A(0, \frac{3}{2})$ obrestni faktor za ustrezno časovno obdobje.

Računamo $I(0, \frac{3}{2}) = C \cdot D(0, \frac{1}{2}) + C \cdot D(0, \frac{3}{2}) = 9.84703$ EUR

in dobimo $K = [107.017 - 9.84703] \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot 0.019} = 99.979$ EUR.

(c) **[5 točk]**

V trenutku $\frac{1}{2}$ cena obveznice znaša $P' = C \cdot D(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) + (C+N) \cdot D(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) = 104.413$ EUR.

Sedanja vrednost izplačil obveznice pred ročnostjo posla znaša

$I(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = C \cdot D(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 4.93295$ EUR.

Če bi posle sklenili v trenutku $\frac{1}{2}$, bi v njem zapisali izročitveno ceno

$K' = \left[P' - I(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\right] \cdot A(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 100.8321$ EUR,

ki je višja od K. Vrednost starega posla za imetnika dolge pozicije je zato pozitivna in znaša

$V_{\frac{1}{2}} = (K' - K)D(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 0.8417$ EUR.

(d) **[3 točke]**

Za imetnika kratke pozicije bo vrednost posla ob ročnosti pozitivna, če bo takrat cena obveznice na trgu *nižja* od dogovorjenih $K = 99.979$ EUR.

Veljati mora $(C+N)D(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) < K$.

Upoštevamo $D(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = e^{-Y(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})}$ in dobimo $Y(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) > -\log \frac{K}{C+N} = 0.049$.

Moč obresti $Y(1.5, 2.5)$ mora biti višja od 4.9%.

3. naloga

(a) **[4 točke]**

Za parametre modela $u = 1.25$, $d = u^{-1} = 0.8$ in $R = 10\%$ velja $d < 1 + R < u$, zato je trg brez arbitraže.

Za izračun do tveganja nevtralne verjetnosti (tudi do prihodnosti nevtralne verjetnosti) izberemo bančni račun za numerar in računamo $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{2}{3}$ in $1 - q = \frac{1}{3}$.

(b) **[4 točke]**

Vpeljimo standardne oznake iz enoobdobnega modela. Podana sta vektor cen $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix}$ in matrika izplačil $M = \begin{bmatrix} 1.1 & 125 \\ 1.1 & 80 \end{bmatrix}$. Vrednotiti želimo pogojno terjatev $X = \begin{bmatrix} 27 \\ 0 \end{bmatrix}$. Diskontiramo ($\widetilde{X} = \frac{1}{1.1}X$) in uporabimo verjetnost Q:

$c_X = \mathrm{E}_Q(\tilde{X}) = \frac{27}{1.1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{180}{11} = 16.36$.

(c) **[5 točk]**

Cena na trgu je prenizka. Arbitražo skonstuiramo tako, da opcijo kupimo na trgu (plačamo $\frac{160}{11}$) ter hkrati na istem trgu prodamo njen izvedbeni portfelj (zaslužimo $\frac{180}{11}$). Opisana strategijo ponuja izplačilo $\frac{20}{11}$ v trenutku 0 in ničelna izplačila v času 1 in je arbitražna.

Izračunamo še izvedbeni portfelj $\phi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

Veljati mora $M\phi = X$, kar je linearni sistem enačb za α in β

$$\begin{aligned} 1.1\alpha + 125\beta &= 27 \\ 1.1\alpha + 80\beta &= 0 \end{aligned}.$$

Rešitev je $\phi = \begin{bmatrix} -\frac{480}{11} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

Arbitražna strategija sestoji iz nakupa 1 opcije, prodaje $\frac{3}{5}$ delnice in pologa $\frac{480}{11}$ enot na bančni račun.

(d) **[7 točk]**

Znana podatka modela sta $R = 10\%$ ter $d' = \frac{1}{u'}$. Od tod izračunamo $q' = \frac{1+R-d'}{u'-d'} = \frac{1.1-\frac{1}{u'}}{u'-\frac{1}{u'}}$.

Da bo trg brez arbitraže, mora veljati $u' > 1 + R = 1.1$.

Možni ceni delnice v trenutku 1 znašata

$$S: 100 \begin{cases} 100u' > 110 \\ \dfrac{100}{u'} < 90.91 \end{cases}$$

zato vemo, da se opcijo z izvršilno ceno 98 splača izvršiti le v zgornjem stanju.

Z novim modelom določena cena opcije z izplačili $X' = \begin{bmatrix} 100u' - 98 \\ 0 \end{bmatrix}$ tako znaša

$c'_X = \frac{1}{1.1}\, \mathrm{E}_{Q'}(X') = \frac{1}{1.1}(100u' - 98) \cdot \frac{1.1-\frac{1}{u'}}{u'-\frac{1}{u'}}$, kar mora biti enako $\frac{160}{11}$.

Rešujemo enačbo

$$\frac{1}{1.1} \cdot (100u' - 98) \cdot \frac{1.1-\frac{1}{u'}}{u'-\frac{1}{u'}} = \frac{160}{11}.$$

Najprej jo pomnožimo z izrazom $\frac{11}{10}\Big(u' - \frac{1}{u'}\Big) > 0$,

$$(100u' - 98)\Big(\frac{11}{10} - \frac{1}{u'}\Big) = 16\Big(u' - \frac{1}{u'}\Big),$$

in nato še z $u' > 0$:

$$(100u' - 98)\Big(\frac{11}{10}u' - 1\Big) = 16(u'^2 - 1).$$

Še uredimo člene in dobimo kvadratno enačbo za u'

$$94u'^2 - \frac{1039}{5}u' + 114 = 0$$

z rešitvama $u'_1 = \frac{6}{5}$ in $u'_2 = \frac{95}{94} < 1.1$. Smiselna rešitev je u'_1, saj u'_2 omogoča arbitražo.

Pravilno umerjen model ima torej parametre $u' = \frac{6}{5}$, $d' = \frac{5}{6}$ in od tod še $q' = \frac{8}{11}$.

Pisni izpit: 13. september 2010

1. naloga

(a) **[4 točke]**

Za osnovno premoženje vzamemo tono krušne pšenice s trenutno ceno $S_0 = 155$ EUR. Za skladiščenje pšenice se v trenutkih $T_1 = 0.5$ in $T_2 = 1$ plača 5 EUR.

Izročitveno ceno določimo po formuli $K = (S_0 + I(0, T_2)) \cdot A(0, T_2)$, kjer je $I(0, T_2)$ sedanja vrednost skladiščnin.

Računamo $I(0, T_2) = 5 \cdot D(0, T_1) + 5 \cdot D(0, T_2) = 5(e^{-\frac{1}{2}\cdot 0.0105} + e^{-0.0125}) = 9.9117$ EUR

in dobimo $K = (155 + 9.9117) \cdot e^{0.0125} = 166.986$ EUR za tono krušne pšenice.

(b) **[5 točk]**

Če bi posel enake ročnosti sklenili v trenutku 0.5 po plačilu skladiščnine, bi v njem za tono pšenice zapisali izročitveno ceno $K_1 = (S_{\frac{1}{2}} + I(\frac{1}{2}, 1)) \cdot A(\frac{1}{2}, 1)$.

S poenostavljanjem dobimo

$K_1 = (158 + 5D(\frac{1}{2}, 1)) \cdot A(\frac{1}{2}, 1) = 158A(\frac{1}{2}, 1) + 5 = 158e^{\frac{1}{2}\cdot 0.011} + 5 = 163.871$ EUR,

kar je manj v primerjavi z že sklenjenim poslom.

Vrednost svetovalčevega posla je zato negativna in znaša

$V_{\frac{1}{2}} = 136 \cdot (K_1 - K)D(\frac{1}{2}, 1) = 136 \cdot (-3.09756) = -421.269$ EUR.

(c) **[6 točk]**

Če bi imel novi posel z ročnostjo ob času 1.5 ob sklenitvi vrednost 0, bi imel zapisno izročitveno ceno $K_2 = (S_{\frac{1}{2}} + I(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})) \cdot A(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Zopet računamo $I(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 5D(\frac{1}{2}, 1) + 5D(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 9.90553$ EUR,

$K_2 = (158 + 9.90553)e^{0.0135} = 170.188$ EUR.

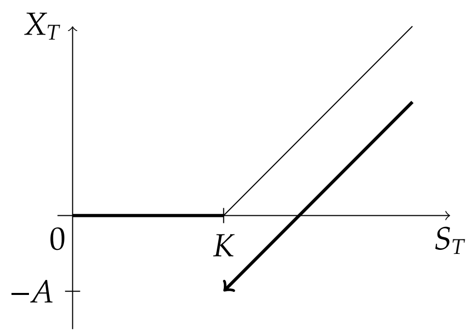
Zanima nas, pri kolikšnem K_3 bi imel posel (računamo za 1 tono) ob sklenitvi v času 0.5 vrednost -3.09756 EUR.

Rešujemo $(K_2 - K_3)D(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = -3.09756$ in dobimo $K_3 = 173.327$ EUR na tono pšenice.

2. naloga

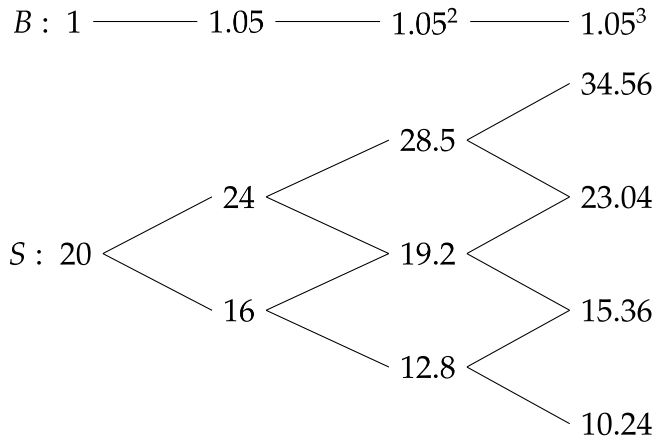
(a) **[3 točke]**

Izplačilo klasične evropske nakupne opcije na območju, kjer se opcijo splača izvršiti, zmanjšamo za premijo A, drugod pa pustimo nespremenjenega.



(b) **[3 točke]**

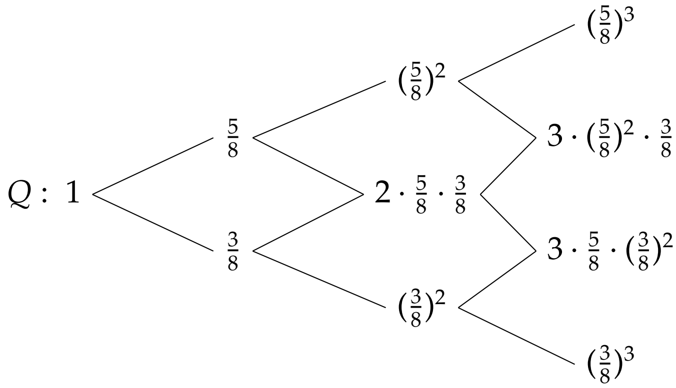
Za podatke $S_0 = 20$, $T = 3$, $u = 1.2$, $d = 0.8$ in $R = 5\%$ narišemo drevo dogodkov.



Ker računamo do prihodnosti nevtralno verjetnost, za numerar izberemo bančni račun.

Do prihodnosti nevtralni prehodni verjetnosti se s časom ne spreminjata in znašata $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{5}{8}$ ter $1 - q = \frac{3}{8}$.

Do prihodnosti nevtralne verjetnosti posameznih stanj dobimo z množenjem in seštevanjem vseh prehodnih verjetnosti, ki nas pripeljejo do izbranega stanja.



(c) **[4 točke]**

Evropska nakupna opcija z izvršilno ceno $K = 22$ ponuja izplačila le ob zapadlosti:

Stanje	Cena delnice S_3	Verjetnost Q	Izplačilo $X_T = \max\{S_3 - K, 0\}$
u^3	34.56	$(\frac{5}{8})^3$	12.56
u^2d	23.04	$3 \cdot (\frac{5}{8})^2 \cdot \frac{3}{8}$	1.04
ud^2	15.36	$3 \cdot \frac{5}{8} \cdot (\frac{3}{8})^2$	0
d^3	10.24	$(\frac{3}{8})^3$	0

Njeno premijo določimo z diskontiranjem pričakovanega izplačila glede na do prihodnosti nevtralno verjetnost

$c_X = \frac{1}{1.05^3}\left(12.56 \cdot (\frac{5}{8})^3 + 1.04 \cdot 3 \cdot (\frac{5}{8})^2 \cdot \frac{3}{8}\right) = 3.0437.$

(d) **[5 točk]**

Kjer je izplačilo klasične evropske nakupne opcije pozitivno, moramo odšteti premijo A. Drugod izplačil ni.

Stanje	Cena delnice S_3	Verjetnost Q	$Y_T = \max\{S_3 - K, 0\} - A \cdot 1_{\{S_3 > K\}}$
u^3	34.56	$(\frac{5}{8})^3$	$12.56 - A$
u^2d	23.04	$3 \cdot (\frac{5}{8})^2 \cdot \frac{3}{8}$	$1.04 - A$
ud^2	15.36	$3 \cdot \frac{5}{8} \cdot (\frac{3}{8})^2$	0
d^3	10.24	$(\frac{3}{8})^3$	0

Ker ob sklenitvi ni denarnih tokov, moramo z diskontiranjem pričakovanih izplačil dobiti vrednost 0. To na da enačbo

$$\frac{1}{1.05^3}\Big((12.56 - A) \cdot (\tfrac{5}{8})^3 + (1.04 - A) \cdot 3 \cdot (\tfrac{5}{8})^2 \cdot \tfrac{3}{8}\Big) = 0$$

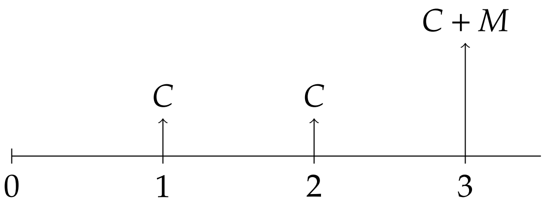
z rešitvijo $A = 5.1543$.

3. naloga

(a) **[4 točke]**

Podatki: $M = 100$ EUR, $T = 3$ leta, znesek posameznega kupona $C = 0.03 \cdot M = 3$ EUR.

Ceno ene obveznice določimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



Dobimo $C \cdot D(0,1) + C \cdot D(0,2) + (C + M) \cdot D(0,3) = \frac{C}{1+L(0,1)} + \frac{C}{1+2 \cdot L(0,2)} + \frac{C+M}{1+3 \cdot L(0,3)}$,

kar znese 99.40209 EUR.

Investitor je za 1000 obveznic plačal 99 402.09 EUR.

(b) **[6 točk]**

Lahko primerjamo s klasično zamenjavo. Če bi pri dani časovni strukturi obrestnih mer finančna institucija plačevala kupone po spremenljivi obrestni meri $L(j-1, j)$, bi moral investitor plačevati kupone po fikni obrestni meri L_{SWAP}, izračunani po formuli

$L_{\mathrm{SWAP}} = \frac{1 - D(0,3)}{\Delta \sum_{j=1}^{3} D(0,j)} = 3.21\%$.

Ker investitor plačuje le 3% kupone, torej 0.21% manj, mora tudi finančna institucija ustrezno zmanjšati svoje kupone.

Torej je $\delta = -0.21\%$.

(c) **[6 točk]**

V trenutku 1 želimo izračunati vrednost zamenjave s fiksno obrestno mero $L = 3\%$ za imetnika dolge pozicije.

Glede na dinamiko denarnih tokov računamo

$V_{\text{SWAP}} = N \cdot \sum_{j=2}^{3}(L(1, j-1, j) + \delta - L) \cdot D(1, j)$.

Terminski obrestni meri sta $L(1,1,2) = L(1,2)$ in $L(1,2,3) = \frac{1+2 \cdot L(1,3)}{1+L(1,2)} - 1 = 6.12\%$.

Dobimo $V_{\text{SWAP}} = 3163.53$ EUR.

(d) **[4 točk]**

Vrednost zamenjave iz točke (c) predstavlja vrednost *neto* razlike med prejemanjem spremenljivih in plačevanjem fiksnih kuponov.

Za določanje vrednosti portfelja moramo zato vrednosti zamenjave prišteti še vrednost obveznice: njenih fiksnih kuponov in glavnice.

Ena obveznica je vredna $C \cdot D(1,2) + (C+N) \cdot D(1,3) = 96.44288$ EUR.

Vrednost investitorjevega portfelja znaša $1000 \cdot 96.44288 + 3163.53 = 99\,606.41$ EUR.