Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

FINANČNA MATEMATIKA 1

Rešitve kolokvijev in izpitov

2010/2011

Na naslednjih straneh so objavljene kratke rešitve nalog, ki so jih študenti reševali na kolokvijih in izpitih iz Finančne matematike 1 v študijskem letu 2010/2011.

Do končne rešitve običajno vodi več pravilnih poti. Vse nikoli niso navedene. Struktura točk je zapisana v oklatih oklepajih. Večina točk je postopkovnih, zato svoje postopke reševanja vedno natančno opisujte.

V primeru nejasnosti se za nasvet obrnite na asistenta.

Če odkrijete napako, jo prosim sporočite na `ales.toman@imfm.si`.

1. kolokvij	18. april 2011
2. kolokvij	6. junij 2011
Pisni izpit	17. junij 2011
Pisni izpit	4. julij 2011
Pisni izpit	31. avgust 2011
Pisni izpit	12. september 2011

1. kolokvij: 18. april 2011

1. naloga

(a) **[9 točk]**

Naj bo S_t cena vrednostnega papirja S v trenutku t.

Najprej iz enakosti $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$ izračunamo $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$.

Zapisano neenakost za opcijske premije dokažemo s konstrukcijo arbitražne strategije ob privzetku negirane neenakosti.

Naj bo $p_2 > \frac{1}{2}(p_1 + p_3)$, kar pomeni $2p_2 > p_1 + p_3$.

Po preoblikovanju dobimo $2p_2 - p_1 - p_3 > 0$ in skonstruiramo strategijo U.

- čas t: prodamo (izdamo) 2 prodajni opciji z izvršilno ceno K_2,
  kupimo prodajno opcijo z izvršilno ceno K_1,
  kupimo prodajno opcijo z izvršilno ceno K_3.

  Začetno izplačilo strategije znaša $U_t = 2p_2 - p_1 - p_3 > 0$.

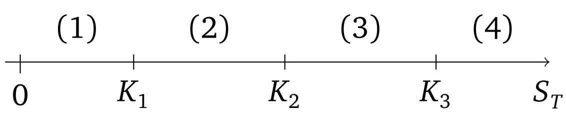
- čas T: izplačamo prodajni opciji z izvršilno ceno K_2, če je potrebno,
  izvršimo prodajno opcijo z izvršilno ceno K_1, če se splača,
  izvršimo prodajno opcijo z izvršilno ceno K_3, če se splača.

  Končno izplačilo strategije znaša

  $U_T = -2\max\{K_2 - S_T, 0\} + \max\{K_1 - S_T, 0\} + \max\{K_3 - S_T, 0\}$.

Dobljeni izraz poenostavimo z obravnavo na intervalih. Kritične točke so K_1, K_2 in K_3.

Zaradi zveznosti vseh funkcijskih predpisov ni pomembno, kam dodamo točke K_i.



(1) $S_T \le K_1 < K_2 < K_3$

Izplačilo se poenostavi v $U_T = -2(K_2 - S_t) + K_1 - S_T + K_3 - S_T = K_1 + K_3 - 2K_2 = 0$ zaradi lastnosti izvršilnih cen.

(2) $K_1 < S_T < K_2 < K_3$

Izplačilo je $U_T = -2(K_2 - S_t) + K_3 - S_T = S_T - 2K_2 + K_3 = (K_3 - K_2) - (K_2 - S_T)$.

Ker je zaradi urejenosti in lastnosti izvršilnih cen ($K_1 < S_T < K_2$ in $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$) razlika med K_2 in S_T manjša od razlike med K_2 in K_3, je izplačilo strategije nenegativno.

(3) $K_1 < K_2 \le S_T < K_3$

Dobimo $U_T = K_3 - S_T > 0$

(4) $K_1 < K_2 < K_3 \le S_T$

Izplačilo je enako $U_T = 0$.

Strategija U je arbitražna.

(b) **[4 točke]**

Zapišemo paritetne relacije za obravnavane evropske nakupne in prodajne opcije in iz njih izrazimo premije prodajnih opcij. $D(t,T)$ je diskontni faktor za obdobje $[t,T]$.

$$\begin{aligned}
p_1 + S_t = c_1 + K_1 D(t,T) \quad &\Rightarrow \quad p_1 = c_1 - S_t + K_1 D(t,T) \\
p_2 + S_t = c_2 + K_2 D(t,T) \quad &\Rightarrow \quad p_2 = c_2 - S_t + K_2 D(t,T) \\
p_3 + S_t = c_3 + K_3 D(t,T) \quad &\Rightarrow \quad p_3 = c_3 - S_t + K_3 D(t,T)
\end{aligned}$$

Izraze za p_1, p_2 in p_3 vstavimo v neenačbo iz naloge (a) in dobimo

$$c_2 - S_t + K_2 D(t,T) \leq \tfrac{1}{2}\left(c_1 - S_t + K_1 D(t,T) + c_3 - S_t + K_3 D(t,T)\right)$$

Po krajšanju S_t dobimo

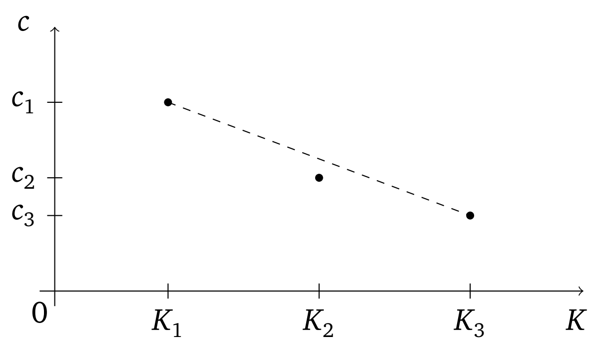
$$c_2 + K_2 D(t,T) \leq \tfrac{1}{2}\left(c_1 + c_3 + (K_1 + K_3) D(t,T)\right).$$

Z upoštevanjem $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$ dobimo

$$c_2 \leq \tfrac{1}{2}(c_1 + c_3).$$

(c) **[2 točki]**

Naloga (b) trdi, da je premija nakupne opcije s povprečno izvršilno ceno $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$ nižja od povprečne premije, to je $c_2 \leq \frac{1}{2}(c_1 + c_3)$.



2. naloga

(a) **[3 točke]**

Sklenjena valutna zamenjava je s stališča agencije sestavljena iz trenutne prodaje N enot tuje valute po trenutnem menjalnem tečaju in nakupa N enot tuje valute po menjalnem tečaju K ob dospetju zamenjave. Terminski nakup dosežemo s sklenitvijo dolge pozicije v valutnem terminskem poslu z nominalno vsoto N, terminskim menjalnim tečajem K ter ročnostjo, ki je enaka dospetju zamenjave, in nakupom tuje valute v prihodnosti po takratnem menjalnem tečaju.

(b) **[5 točk]**

Nakup ali prodaja tuje valute po vsakokratnem trenutnem menjalnem tečaju ima vedno neto vrednost enako 0. Vrednost valutne zamenjave bo zato enaka 0, če bo vrednost valutnega terminskega posla enaka 0.

Čas sklenitve valutne zamenjave je $t = -\frac{1}{12}$, njeno dospetje pa $T = \frac{1}{6}$.

Izberimo evro za domačo valuto in kuno za tujo. Ob sklenitvi je menjalni tečaj znašal $S_{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{7.38}$. Vrednost zamenjave bi bila enaka 0 pri

$$K = S_{-\frac{1}{12}} \cdot D^{\mathrm{HRK}}(-\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{6}) \cdot A^{\mathrm{EUR}}(-\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{6}) = \frac{1}{7.38} \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 0.0242} \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot 0.01172} = 0.1351.$$

(c) **[4 točke]**

Agencija bi v prihodnosti kune rada kupila po menjalnem tečaju $K' = \frac{1}{7.38} = 0.1355$, torej dražje, kot bi si lahko zagotovila z valutnim poslom iz (b). Vrednost zamenjave pri K' je bila ob sklenitvi zato negativna in je znašala

$$V^{\mathrm{FW}}_{-\frac{1}{12}} = (K - K') \cdot N \cdot D^{\mathrm{EUR}}(-\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{6}).$$

Dobimo

$$V^{\mathrm{FW}}_{-\frac{1}{12}} = (0.1351 - 0.1355) \cdot 1\,000\,000 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 0.01172} = -420.87 \text{ EUR}.$$

Agencija ob sklenitvi od banke prejme 420.87 EUR.

(d) **[3 točke]**

Tudi danes je vrednost valutne zamenjave enaka vrednosti valutnega terminskega posla. Označimo $S_0 = \frac{1}{7.3555}$ današnji menjalni tečaj.

Če bi posel sklenili danes, bi vanj zapisali terminski menjalni tečaj

$$K'' = S_0 \cdot D^{\mathrm{HRK}}(0, \tfrac{1}{6}) \cdot A^{\mathrm{EUR}}(0, \tfrac{1}{6}),$$

vrednost sklenjene zamenjave je zato

$$V_0^{\mathrm{FW}} = (K'' - K') \cdot N \cdot D^{\mathrm{EUR}}(0, \tfrac{1}{6}) = N \left(S_0 \cdot D^{\mathrm{HRK}}(0, \tfrac{1}{6}) - K' \cdot D^{\mathrm{EUR}}(0, \tfrac{1}{6}) \right).$$

Dobimo

$$V_0^{\mathrm{FW}} = 1\,000\,000 \left(\frac{1}{7.3555} \cdot e^{-\frac{1}{6} \cdot 0.0148} - \frac{1}{7.38} \cdot e^{-\frac{1}{6} \cdot 0.01206} \right) = 388.48 \text{ EUR}.$$

3. naloga

(a) **[3 točke]**

Vrednost posla bo enaka 0 pri $L_{\text{FRA}} = L(0, \frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 + 0.027}{1 + \frac{1}{2} \cdot 0.0175} - 1 \right) = 3.6183\%$.

(b) **[4 točke]**

Naj bo $N = 100\,000$ EUR in $L'_{\text{FRA}} = 3.45\%$.

Za imetnika dolge pozicije je vrednost takega FRA enaka

$$V_0^{\text{FRA}} = N(1 - \tfrac{1}{2})(L_{\text{FRA}} - L'_{\text{FRA}})D(0,1) =$$
$$= 100\,000 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (3.6183\% - 3.45\%) \cdot \tfrac{1}{1+0.027} = 81.96 \text{ EUR}.$$

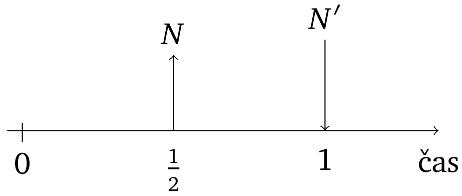
Če komitent sklene dolgo pozicijo, banki plača 81.96 EUR.

Če komitent sklene kratko pozicijo, od banke prejme 81.96 EUR.

(c) **[5 točk]**

Komitent si želi v obdobju $[\frac{1}{2}, 1]$ sposoditi znesek N po 3.45% obrestni meri. Ob dospetju banki zato vrne $N' = N(1 + \frac{1}{2} \cdot 0.0345) = 101725$ EUR.

Narišimo željene denarne tokove:



Za prvi denarni tok naj komitent danes investira $N \cdot D(0, \frac{1}{2})$ EUR do časa $\frac{1}{1}$, za drugega pa naj si danes sposodi $N' \cdot D(0,1)$ EUR do časa 1.

Neto denarni tok komitenta danes znaša

$$-N \cdot D(0, \tfrac{1}{2}) + N' \cdot D(0,1) = -\tfrac{100000}{1+\frac{1}{2}\cdot 0.0175} + \tfrac{101725}{1+0.027} = -81.96 \text{ EUR}.$$

(d) **[8 točk]**

Nalogo rešimo postopoma. Možnih je več rešitev.

Banka danes za dano ceno ponuja previsoko obrestno mero v prihodnosti, zato si želimo v prihodnosti po tej obrestni meri (3.54%) denar pri banki deponirati. To storimo s sklenitvijo kratke pozicije v terminskem poslu na terminsko obrestno mero ter odločitvijo, da v času $\frac{1}{2}$ pri banki deponiramo znesek 100 000 EUR po tržni obrestni meri do časa 1.

Hkrati si s sklenitvijo strategije iz (c) lahko zagotovimo terminsko izposojo zneska 100 000 EUR po obrestni meri 3.45%. Današnji ceni se izničita.

Če privzamemo, da je vrednost terminskega posla izplačana ob dospetju, v času 1 zaslužimo razliko v obrestnih merah.

Zaslužek znaša $N \cdot \frac{1}{2} \cdot (3.54\% - 3.45\%) = 45$ EUR.

Za željeni zaslužek v času 1 še celotno strategijo pomnožimo z $\frac{1000}{45} = \frac{200}{9} = 22.22$.

Pregledno zapišemo strategijo U.

- čas 0: sklenemo kratko pozicijo v 22.22 terminskih poslih na obrestno mero,
  investiramo $22.22 \cdot N \cdot D(0, \frac{1}{2})$ do časa $\frac{1}{2}$,
  sposodimo si $22.22 \cdot N' \cdot D(0, 1)$ do časa 1.

  Izplačilo strategije znaša $U_0 = 22.22 \cdot (+81.96 - 99\ 132.59 + 99\ 050.63) = 0$.

- čas $\frac{1}{2}$: investiramo $22.22 \cdot N$ po tržni obrestni meri $L(\frac{1}{2}, 1)$,
  prejmemo $22.22 \cdot N \cdot D(0, \frac{1}{2})$ z obrestmi.

  Dobimo $U_{\frac{1}{2}} = 22.22 \cdot (-100\ 000 + 100\ 000) = 0$.

- čas 1: prejmemo $22.22 \cdot N$ z obrestmi po tržni obrestni meri,
  vnovčimo 22.22 terminskih poslov z obrestno mero L'_{FRA},
  vrnemo $22.22 \cdot N' \cdot D(0, 1)$ z obrestmi.

  Končno izplačilo $U_1 = 22.22 \cdot \Big(100\ 000 \cdot (1 + \frac{1}{2}L(\frac{1}{2}, 1)) -$

  $$-100\ 000 \cdot \frac{1}{2} \cdot (L(\tfrac{1}{2}, 1) - 3.54\%) - 101\ 725\Big) = 1000.$$

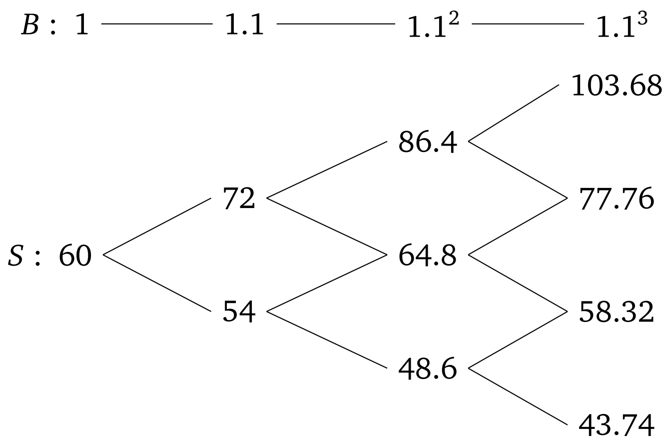
U je iskana arbitražna strategija.

2. kolokvij: 6. junij 2011

1. naloga

(a) **[4 točke]**

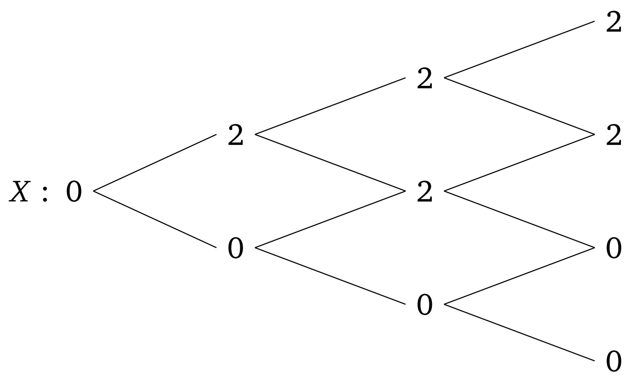
Pri podatkih $S_0 = 60$ EUR, $R = 10\%$, $u = 1.2$, $d = 0.9$ in $T = 3$ narišemo binomsko drevo.



Za numerar vzamemo bančni račun. Prehodni verjetnosti za dvig in padec cene delnice sta neodvisni od časa in stanj in v celotnem modelu znašata $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{2}{3}$ in $1 - q = \frac{1}{3}$.

(b) **[4 točke]**

Vsa izplačila pogojne terjatve $X_t = 2 \cdot 1_{\{S_t > 60\}}$, $t \in \{1, 2, 3\}$, so prikazana na spodnjem drevesu. Izplačila so neodvisna od poti do posameznega stanja.



Ceno pogojne terjetve določimo z diskontiranjem pričakovanih izplačil glede na do prihodnosti nevtralno verjetnost.

$\pi_0(X) = \frac{2}{1.1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{1.1^2} \cdot (\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{1.1^2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{1.1^3} \cdot (\frac{2}{3})^3 + \frac{2}{1.1^3} \cdot 3 \cdot (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} = 3.7944$ EUR.

(c) **[4 točke]**

Izplačila opcije ob zapadlosti 2 so enaka

$$Y_2 = \max\{S_2 - 60, 0\} \cdot 1_{\{\max\{S_0, S_1, S_2\} \leq 70\}}$$

in so odvisna od poti cene delnice v obdobju $[0, 2]$. Delamo s polnim drevesom dogodkov in pridemo do končnih izplačil ter pripadajočih verjetnosti

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo Y_2	Verjetnost Q
u^2	86.4	0	$(\frac{2}{3})^2$
ud	64.8	0	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$
du	64.8	4.8	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$
d^2	48.6	0	$(\frac{1}{3})^2$

Ceno pogojne terjetve določimo z diskontiranjem pričakovanih izplačil
$\pi_0(Y) = \frac{4.8}{1.1^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0.8815$ EUR.

(d) **[3 točke]**

Izplačila v trenutku 1 izračunamo po formuli $Z_1 = \max\{S_1 - 60, 0\}$.

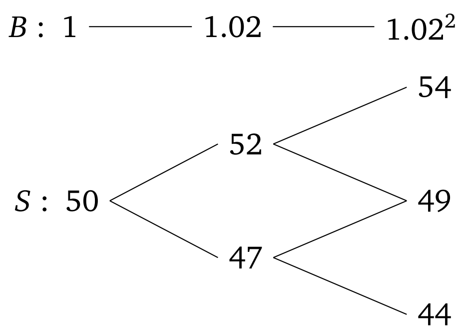
Stanje	Cena delnice S_1	Izplačilo Z	Verjetnost Q
u	72	12	$\frac{2}{3}$
d	54	0	$\frac{1}{3}$

Ceno pogojne terjetve določimo z diskontiranjem pričakovanih izplačil
$\pi_0(Z) = \frac{12}{1.1} \cdot \frac{2}{3} = 7.2727$ EUR.

2. naloga

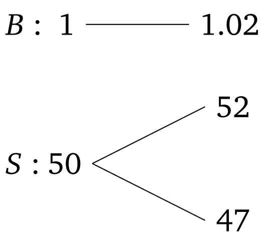
(a) **[3 točke]**

Drevo dogodkov



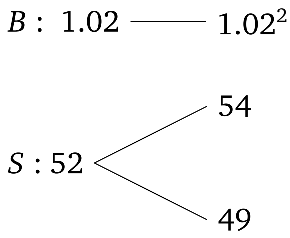
(b) **[6 točk]**

Izberemo bančni račun B za numerar in opazimo, da je vsak enoobdobni model v resnici binomski s parametrom $R = 2\%$ in primerno izbranima u in d.



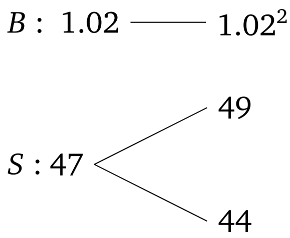
$$u_1 = \frac{52}{50} \qquad d_1 = \frac{47}{50}$$

$$q_1 = \frac{1+R-d_1}{u_1-d_1} = \frac{1.02-\frac{47}{50}}{\frac{52}{50}-\frac{47}{50}} = 0.8$$



$$u_2 = \frac{54}{52} \qquad d_2 = \frac{49}{52}$$

$$q_2 = \frac{1+R-d_2}{u_2-d_2} = \frac{1.02-\frac{49}{52}}{\frac{54}{52}-\frac{49}{52}} = 0.808$$



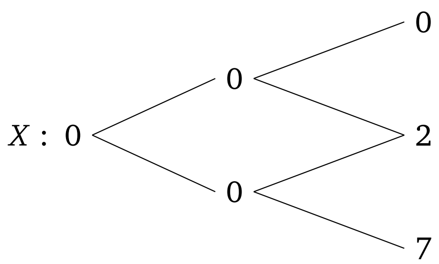
$$u_3 = \frac{49}{47} \qquad d_3 = \frac{44}{47}$$

$$q_3 = \frac{1+R-d_3}{u_3-d_3} = \frac{1.02-\frac{44}{47}}{\frac{49}{47}-\frac{44}{47}} = 0.788$$

Ker so vse prehodne do prihodnosti nevtralne verjetnosti pozitivne, v modelu obstaja do prihodnosti nevtralna verjetnost in je zato po 1. izreku finančne matematike trg brez arbitraže.

(c) **[6 točk]**

Izplačila prodajne opcije izračunamo po formuli $X_2 = \max\{K - S_2, 0\}$ in so prikazana na drevesu.



Izvedbeno strategijo določamo rekurzivno. Naj α označuje število enot bančnega računa in β število delnic v dinamičnem portfelju.

V času $t = 1$ v vozlišču u rešujemo naslednji linearni sistem enačb z neznankama α_u in β_u

$$\begin{aligned} \alpha_u B_{uu} + \beta_u S_{uu} &= X_{uu} \\ \alpha_u B_{ud} + \beta_u S_{ud} &= X_{ud} \end{aligned}$$

Vstavimo podatke in dobimo sistem

$$\begin{aligned} 1.02^2\alpha_u + 54\beta_u &= 0 \\ 1.02^2\alpha_u + 49\beta_u &= 2 \end{aligned}$$

z rešitvijo $\alpha_u = 20.7612$ in $\beta_u = -0.4$ ter vrednostjo portfelja

$V_u = \alpha_u B_u + \beta_u S_u = 20.7612 \cdot 1.02 - 0.4 \cdot 52 = 0.3765$ EUR.

Istočasno v vozlišču d rešujemo sistem

$$\begin{aligned} 1.02^2\alpha_d + 49\beta_d &= 2 \\ 1.02^2\alpha_d + 44\beta_d &= 7 \end{aligned}$$

z rešitvijo $\alpha_d = 49.0196$ in $\beta_d = -1$ ter vrednostjo portfelja

$V_d = 49.0196 \cdot 1.02 - 1 \cdot 47 = 3.00$ EUR.

Nadaljujemo v času 0 s sistemom enačb za začetni portfelj (α_0, β_0)

$$\begin{aligned} 1.02\alpha_0 + 52\beta_0 &= 0.3765 \\ 1.02\alpha_0 + 47\beta_0 &= 3.00 \end{aligned}$$

z rešitvijo $\alpha_0 = 27.1188$ in $\beta_d = -0.5247$.

Premija opcije je enaka ceni začetnega portfelja

$p_0^E = V_0 = 27.1188 \cdot 1 - 0.5247 \cdot 50 = 0.8835$ EUR.

3. naloga

(a) **[6 točk]**

Model ima 3 možna stanja v času 1 in dva vrednostna papirja, ki ju predstavimo z vektorjem cen $c = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$ in matriko izplačil $M = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 10 & 8 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$.

Poiščemo vektor cen stanj ψ, za katerega je $M^T\psi = c$. Komponente $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ dobimo iz sistema

$$\begin{aligned} 10\psi_1 + 10\psi_2 + 12\psi_3 &= 10 \\ 5\psi_1 + 8\psi_2 + 13\psi_3 &= 9 \\ \psi_1, \psi_2, \psi_3 &> 0 \end{aligned}$$

Izberemo ψ_3 za parameter in izrazimo $\psi_1 = \frac{17\psi_3 - 5}{15}$ in $\psi_2 = \frac{4 - 7\psi_3}{3}$.

Stroga pozitivnost vseh komponent določi omejitev $\frac{5}{17} < \psi_3 < \frac{4}{7}$ za parameter ψ_3.

Družina vektorjev cen stanj

$$\Psi = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{17\psi_3 - 5}{15} \\ \frac{4 - 7\psi_3}{3} \\ \psi_3 \end{bmatrix} ; \ \frac{5}{17} < \psi_3 < \frac{4}{7} \right\}$$

ni prazna, zato trg ne dopušča arbitraže.

(b) **[4 točke]**

Vrednost dolge pozicije v terminskem poslu ob ročnosti 1 je enaka $S_1 - K$, kjer je $K = 10$ izročitvena cena. Pogojno terjatev X lahko zapišemo z vektorski obliki $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Njeno ceno določimo z vektorji cen stanj $\hat{\pi}_0(X) = \langle X, \psi \rangle = 2\psi_3$.

Ko ψ_3 preteče interval $(\frac{5}{17}, \frac{4}{7})$, za dopustne cene terjatve X dobimo odprt interval $(\frac{10}{17}, \frac{8}{7})$, zato terjatev ni dosegljiva na trgu $\{S, W\}$.

(c) **[6 točk]**

Dodan bančni račun je instrument B z začetno ceno $B_0 = 1$ in končnim izplačilom $B_1 = 1 + R$ v vseh stanjih modela. Njegova izplačila in ceno mora povezovati družina cenovnih funkcionalov iz naloge (a). Veljati mora $\hat{\pi}_0 \left(\begin{bmatrix} 1+R \\ 1+R \\ 1+R \end{bmatrix} \right) = 1$, kar pomeni $(1+R)(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = 1$.

Z upoštevanjem predpisov za ψ_1 in ψ_2 od tod izrazimo $R = \frac{\psi_3}{5-\psi_3}$ in določimo največjo in najmanjšo možno vrednost, ko ψ_3 preteče dopustni interval.

Upoštevamo, da je funkcija $f(x) = \frac{x}{x-5}$ naraščajoča na intervalu $(0,5)$, zato spodnjo mejo dobimo pri $\psi_3 = \frac{5}{17}$ in znaša $\frac{1}{16}$, zgornjo mejo pa pri $\psi_3 = \frac{4}{7}$ in znaša $\frac{4}{31}$.

Veljati mora $R \in (\frac{1}{16}, \frac{4}{31}) = (6.25\%, 12.90\%)$.

(d) **[4 točke]**

Ker je $R = 10\%$, iz enačbe $\frac{1}{10} = \frac{\psi_3}{5-\psi_3}$ izračunamo $\psi_3 = \frac{5}{11}$ in s tem določimo konkretni vektor cen stanj $\psi' = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \\ \frac{5}{11} \end{bmatrix}$ za trg $\{B, S, W\}$.

Mavrična opcija ob zapadlosti 1 ponuja izplačila $Y_1 = \max\Big\{ \max\{S_1, W_1\} - K, 0 \Big\}$, kar znese

$$Y = \begin{bmatrix} \max\{10-9, 0\} \\ \max\{10-9, 0\} \\ \max\{13-9, 0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

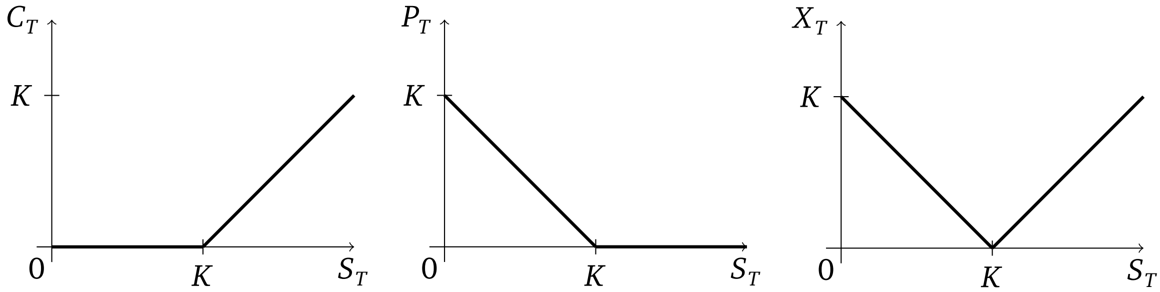
Določimo še njeno ceno $\pi_0(Y) = \langle Y, \psi' \rangle = 1 \cdot \frac{2}{11} + 1 \cdot \frac{3}{11} + 4 \cdot \frac{5}{11} = \frac{25}{11}$.

Pisni izpit: 17. junij 2011

1. naloga

(a) **[3 točke]**

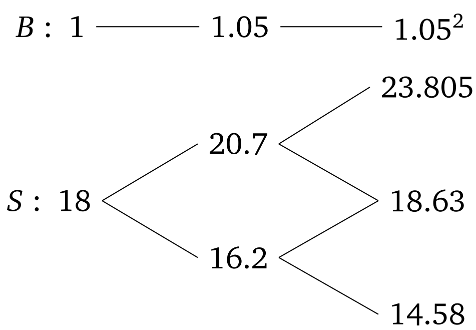
Narišemo izplačila nakupne in prodajne opcije ter ju seštejemo v izplačilo razkoraka X.



Opazimo, da so izplačila razkoraka X enaka $X_T = |S_T - K| = |S_T - 20|$.

(b) **[2 točki]**

Pri podatkih $S_0 = 18$ EUR, $R = 5\%$, $u = 1.15$, $d = 0.9$ in $T = 2$ narišemo binomsko drevo.



Ker velja $d < 1 + R < u$, to je $0.9 < 1.05 < 1.15$, je trg brez arbitraže.

(c) **[6 točk]**

Najprej izračunamo do prihodnosti nevtralno prehodno verjetnost $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{3}{5}$.

Ker delnica ne izplačuje dividend, je ameriška nakupna opcija ekvivalentna evropski nakupni opciji.

Zapišemo njena izplačila ob zapadlosti in pripadajoče do prihodnosti nevtralne verjetnosti.

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo	Verjetnost Q
u^2	23.805	3.805	$(\frac{3}{5})^2$
ud	18.63	0	$2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$
d^2	14.58	0	$(\frac{2}{5})^2$

Premijo opcije določimo z diskontiranjem pričakovanih izplačil

$c_0^A = \frac{3.805}{1.05^2} \cdot (\frac{3}{5})^2 = 1.2425$ EUR.

Ameriška prodajna opcija nam ob izvršitvi v trenutku t ponuja izplačilo $Z_t = \max\{K - S_t, 0\}$.

Premijo določimo z obratno indukcijo.

$t = 2$: (uu) izvršitev: $\max\{20 - 23.805, 0\} = \underline{0}$

(ud) izvršitev: $\max\{20 - 18.63, 0\} = \underline{1.37} \Rightarrow$ izvršimo

(dd) izvršitev: $\max\{20 - 14.58, 0\} = \underline{5.42} \Rightarrow$ izvršimo

$t = 1$: (u) izvršitev: $\max\{20 - 20.7, 0\} = 0$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(0 \cdot \frac{3}{5} + 1.37 \cdot \frac{2}{5}) = \underline{0.5219} \Rightarrow$ čakamo

(d) izvršitev: $\max\{20 - 16.2, 0\} = \underline{3.8}$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(1.37 \cdot \frac{3}{5} + 5.42 \cdot \frac{2}{5}) = 2.8476 \Rightarrow$ izvršimo

$t = 0$: (Ω) izvršitev: $\max\{20 - 18, 0\} = \underline{2}$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(0.5219 \cdot \frac{3}{5} + 3.8 \cdot \frac{2}{5}) = 1.7459 \Rightarrow$ izvršimo

Opcijo takoj izvršimo. Njena premija je $p_0^A = 2$.

(d) **[4 točke]**

Ameriški razkorak vrednotimo z obratno indukcijo. Ob izvršitvi v trenutku t nam ponuja izplačilo $Z_t = |S_t - K|$.

$t = 2$: (uu) izvršitev: $|23.805 - 20| = \underline{3.805} \Rightarrow$ izvršimo

(ud) izvršitev: $|18.63 - 20| = \underline{1.37} \Rightarrow$ izvršimo

(dd) izvršitev: $|14.58 - 20| = \underline{5.42} \Rightarrow$ izvršimo

$t = 1$: (u) izvršitev: $|20.7 - 20| = 0.7$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(3.805 \cdot \frac{3}{5} + 1.37 \cdot \frac{2}{5}) = \underline{2.6962} \Rightarrow$ čakamo

(d) izvršitev: $|16.2 - 20| = \underline{3.8}$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(1.37 \cdot \frac{3}{5} + 5.42 \cdot \frac{2}{5}) = 2.8476 \Rightarrow$ izvršimo

$t = 0$: (Ω) izvršitev: $|18 - 20| = 2$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(2.6962 \cdot \frac{3}{5} + 3.8 \cdot \frac{2}{5}) = \underline{2.9833} \Rightarrow$ čakamo

Premija ameriškega razkoraka mora biti 2.9833 EUR, kar je manj kot je vsota opcijskih premij iz naloge (c), ki znaša $1.2425 + 2 = 3.2425$ EUR.

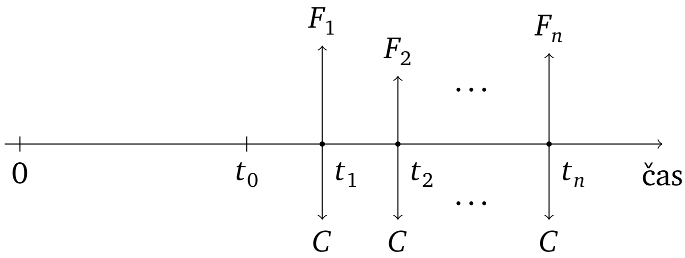
Razkorak sestavljata dve opciji, od katerih se vselej splača izvršiti le eno. Ob izvršitvi razkoraka uničimo obe opciji hkrati, torej tudi tisto, ki se je ne splača. Če opciji nista vezani, eno opcijo ohranimo in s tem pridobimo možnost za dodatni zaslužek v prihodnosti.

2. naloga

(a) **[4 točke]**

Narišimo shemo denarnih tokov za dolgo pozicijo.

Privzemimo, da je T večkratnik časovnega obdobja Δ.



Zamenjava z zamikom kot portfelj 2 klasičnih zamenjav:

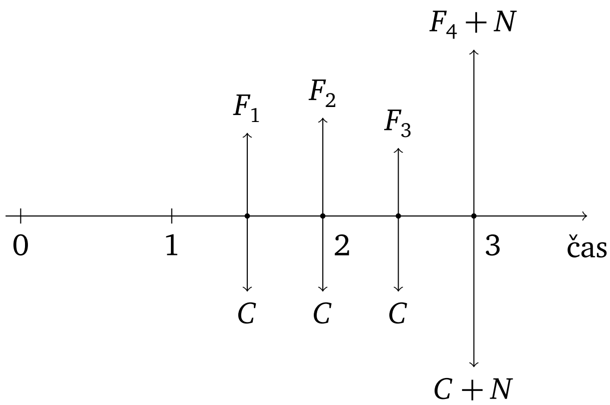
- dolga pozicija v klasični zamenjavi z dospetjem U, navidezno glavnico N, medkuponskim intervalom Δ in obrestno mero L_{SWAP},
- kratka pozicija v klasični zamenjavi z dospetjem T, navidezno glavnico N, medkuponskim intervalom Δ in obrestno mero L_{SWAP}.

Zamenjava z zamikom kot portfelj dolgih pozicij v n dogovorih o terminski obrestni meri:

- generični FRA ima datum poravnave t_{i-1}, dospetje t_i, navidezno glavnico N in obrestno mero $L_{\text{FRA}} = L_{\text{SWAP}}$.
- Pri tem privzamemo, da se vrednost FRA izplača ob dospetju in ne na dan poravnave.

(b) **[4 točke]**

Dodamo izmenjavo navideznih glavnic ob dospetju in posebej vrednotimo fiksne in spremenljnive denarne tokove.



Fiksni kuponi znašjo $C = N\Delta L_{\text{SWAP}} = 100000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.05 = 2500$ EUR.

Sedanjo vrednost fiksnih denarnih tokov določimo z diskontiranjem.

$$V_0^{\text{CB}} = C\Big(D(0,\tfrac{3}{2}) + D(0,2) + D(0,\tfrac{5}{2}) + D(0,3)\Big) + ND(0,3) =$$

$$= 2500\Big(\frac{1}{1+\frac{3}{2}\cdot 0.032} + \frac{1}{1+2\cdot 0.037} + \frac{1}{1+\frac{5}{2}\cdot 0.04} + \frac{1}{1+3\cdot 0.0435}\Big) + 100000 \cdot \frac{1}{1+3\cdot 0.0435} = 97653.82 \text{ EUR}.$$

Spremenljive denarne tokove repliciramo z investicijo zneska $ND(0,1)$ do trenutka 1.

Dobljeni znesek N v trenutku 1 investiramo do časa $\frac{3}{2}$, nato izplačamo obresti in reinvestiramo nominalno vrednost do časa 2. Postopek ponavimo še v trenutkih 2 in $\frac{5}{2}$, v času 3 pa izplačamo obresti in nominalno vrednost.

$V_0^{\mathrm{FL}} = ND(0,1) = \frac{100000}{1+1\cdot 0.0275} = 97323.60$ EUR.

Vrednost zamenjave z zamikom znaša $V_0^{\mathrm{SWAP}} = V_0^{\mathrm{FL}} - V_0^{\mathrm{CB}} = -330.22$ EUR.

(c) **[4 točke]**

Veljati mora $V_0^{\mathrm{FL}} = V_0^{\mathrm{CB}}$, kar pomeni

$N\Delta L_{\mathrm{SWAP}}\Big(D(0,\frac{3}{2}) + D(0,2) + D(0,\frac{5}{2}) + D(0,3)\Big) + ND(0,3) = ND(0,1).$

Krajšamo N in izrazimo $L_{\mathrm{SWAP}} = \dfrac{D(0,1) - D(0,3)}{\Delta\Big(D(0,\frac{3}{2}) + D(0,2) + D(0,\frac{5}{2}) + D(0,3)\Big)} = 4.82\%.$

(d) **[3 točke]**

Sklepamo podobno kot v (c) in dobimo

$$L_{\mathrm{SWAP}} = \frac{D(0,T) - D(0,U)}{\Delta\Big(D(0,T) + D(0,T+\Delta) + \cdots + D(0,U)\Big)} = \frac{D(0,t_0) - D(0,t_n)}{\Delta\sum_{i=1}^{n} D(0,t_i)}.$$

Pri $T = t_0 = 0$ dobimo $D(0,0) = 1$ in formulo iz klasičnih zamenjav.

3. naloga

(a) **[6 točk]**

Naj bo $K_1 \le K_2$ in privzemimo, da je $c_1 < c_2$, torej $c_2 - c_1 > 0$.

Pripravimo strategijo U.

- čas t: prodamo (izdamo) nakupno opcijo z izvršilno ceno K_2,
  kupimo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_1.

  Začetno izplačilo strategije znaša $U_t = c_2 - c_1 > 0$.

- čas T: izplačamo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_2, če je potrebno,
  izvršimo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_1, če se splača.

  Končno izplačilo strategije znaša $U_T = -\max\{S_T - K_2, 0\} + \max\{S_T - K_1, 0\}$.

Izraz obravnavamo na disjunktnih intervalih.

(1) $S_T < K_1 \le K_2$

Izplačilo se poenostavi v $U_T = -0 + 0 = 0$.

(2) $K_1 \le S_T \le K_2$

Izplačilo je $U_T = -0 + S_T - K_1 > 0$.

(3) $K_1 \le K_2 < S_T$

Dobimo $U_T = -S_T + K_2 + S_T - K_1 = K_2 - K_1 \ge 0$

U je arbitražna strategija.

(b) **[7 točk]**

Naj bo $K_1 < K_3$ in $K_2 = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_3$.

Privzemomo, da je $c_2 > \lambda c_1 + (1-\lambda)c_3$.

Po preoblikovanju dobimo $c_2 - \lambda c_1 - (1-\lambda)c_3 > 0$ in skonstruiramo strategijo V.

- čas t: prodamo (izdamo) nakupno opcijo z izvršilno ceno K_2,
  kupimo λ nakupne opcije z izvršilno ceno K_1,
  kupimo $(1-\lambda)$ nakupne opcije z izvršilno ceno K_3.

  Začetno izplačilo strategije znaša $V_t = c_2 - \lambda c_1 - (1-\lambda)c_3 > 0$.

- čas T: izplačamo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_2, če je potrebno,
  izvršimo λ nakupne opcije z izvršilno ceno K_1, če se splača,
  izvršimo λ nakupne opcije z izvršilno ceno K_3, če se splača.

  Končno izplačilo strategije znaša

  $$V_T = -\max\{S_T - K_2, 0\} + \lambda \max\{S_T - K_1, 0\} + (1-\lambda)\max\{S_T - K_3, 0\}.$$

Dobljeni izraz poenostavimo z obravnavo na intervalih. Kritične točke so K_1, K_2 in K_3.

(1) $S_T \leq K_1 < K_2 < K_3$

Izplačilo se poenostavi v $V_T = -0 + \lambda \cdot 0 + (1-\lambda)\cdot 0 = 0$.

(2) $K_1 < S_T < K_2 < K_3$

Izplačilo je $V_T = \lambda(S_T - K_1) > 0$.

(3) $K_1 < K_2 \leq S_T < K_3$

Dobimo $V_T = -S_T + K_2 + \lambda S_T - \lambda K_1 = (1-\lambda)(K_3 - S_T) \geq 0$.
Do rezultata smo prišli tako, da smo K_2 nadomestili z $\lambda K_1 + (1-\lambda)K_3$.

(4) $K_1 < K_2 < K_3 \leq S_T$

Izplačilo je enako $V_T = -S_T + K_2 + \lambda S_T - \lambda K_1 + (1-\lambda)S_T - (1-\lambda)K_3 = 0$.

V je arbitražna strategija.

(c) **[3 točke]**

Zapišemo paritetne relacije za obravnavane evropske nakupne in prodajne opcije. $D(t,T)$ je diskontni faktor za obdobje $[t,T]$.

$p_1 + S_t = c_1 + K_1 D(t,T)$

$p_2 + S_t = c_2 + K_2 D(t,T)$

$p_3 + S_t = c_3 + K_3 D(t,T)$

(d) **[4 točke]**

Iz paritet iz (c) izrazimo premije nakupnih opcij

$c_1 = p_1 + S_t - K_1 D(t,T)$,

$c_2 = p_2 + S_t - K_2 D(t,T)$,

$c_3 = p_3 + S_t - K_3 D(t,T)$,

in jih vstavimo v že dokazano neenakost iz naloge (b). Dobimo

$p_2 + S_t - K_2 D(t,T) \le \lambda(p_1 + S_t - K_1 D(t,T)) + (1-\lambda)(p_3 + S_t - K_3 D(t,T)).$

Neenakost se po krajšanju poenostavi v

$p_2 \le \lambda p_1 + (1-\lambda) p_3,$

kar pomeni konveksnost premije prodajne opcije kot funkcije izvršilne cene.

Pisni izpit: 4. julij 2011

1. naloga

(a) **[8 točk]**

Opisani model ima 2 možni stanji v času 1 in dva vrednostna papirja, ki ju predstavimo z vektorjem cen $c = \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix}$ in matriko izplačil $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$.

Izberemo netvegano obveznico B^1 za numerar in izračunamo vektor diskontiranih cen $\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{F}{D} \end{bmatrix}$ ter matriko diskontiranih izplačil $\widetilde{M} = M$.

Za do tveganja nevtralni verjetnosti $q_1 = Q(\text{solventnost})$ in $q_2 = Q(\text{bankrot})$ mora veljati

$E_Q(\tilde{B}_1^1) = \tilde{B}_0^1 \quad \Longrightarrow \quad q_1 + q_2 = 1$

$E_Q(\tilde{B}_1^2) = \tilde{B}_0^2 \quad \Longrightarrow \quad q_1 + \delta q_2 = \frac{F}{D}.$

Ker je $\delta < 1$, je sistem enolično rešljiv in ima rešitvi $q_1 = \frac{\frac{F}{D} - \delta}{1-\delta}$ in $q_2 = \frac{1 - \frac{F}{D}}{1-\delta}$.

Po 1. izreku finančne matematike je trg brez arbitraže natanko tedaj, ko na trgu obstaja do tveganja nevtračna verjetnost, torej ko sta q_1 in q_2 oba hkrati pozitivna.

Upoštevamo, da je imenovalec $1 - \delta > 0$ in določimo pogoje

$q_1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{F}{D} - \delta > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{F}{D} > \delta,$

$q_2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{F}{D} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 > \frac{F}{D}.$

Rezultata združimo v potreben in zadosten pogoj $\delta < \frac{F}{D} < 1$.

(b) **[2 točki]**

To je $q_2 = \frac{1-\frac{F}{D}}{1-\delta}$

(c) **[5 točk]**

Naj bo p naravna verjetnost bankrota. Donos prve obveznice glede na naravno verjetnost je (neprava) slučajna spremenljivka r_{B^1} z verjetnostno funkcijo

$r_{B^1} \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1-D}{D} & \frac{1-D}{D} \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

Pričakovani donos zato znaša $E_P(r_{B^1}) = \frac{1-D}{D}$.

Donos druge obveznice je (prava) slučajna spremenljivka r_{B^2} z verjetnostno funkcijo

$r_{B^2} \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1-F}{F} & \frac{\delta-F}{F} \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

Pričakovani donos zato znaša $E_P(r_{B^2}) = \frac{1-F}{F}(1-p) + \frac{\delta-F}{F}p$.

Potrebne in zadostne pogoje za p, pod katerimi je $E_P(r_{B^2}) > E_P(r_{B^1})$ dobimo z reševanjem neenačbe $\frac{1-F}{F}(1-p) + \frac{\delta-F}{F}p > \frac{1-D}{D}$.

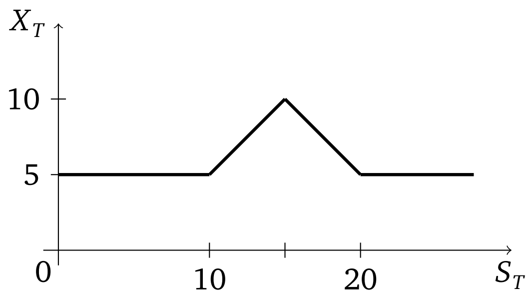
Pazimo, da je $0 \leq \delta < 1$ in dobimo rešitev $p < \frac{1-\frac{F}{D}}{1-\delta} = q_2$.

Rezultat je pričakovan. Pri $p = q_2$ je naravna verjetnost P enaka do tveganja nevtralni verjetnosti Q, zato je pričakovan donos tvegane obveznice B^2 enak pričakovanemu donosu netvegane B^1. Naravni pričakovani donos tvegane obveznice bo višji od netveganega donosa, če bo naravna verjetnost bankrota izdajatelja nižja od netvegane verjetnosti tega izida.

2. naloga

(a) **[3 točke]**

Narišemo graf fukcije $X_T(S_T)$.

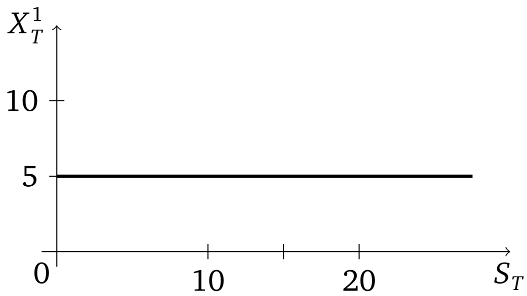


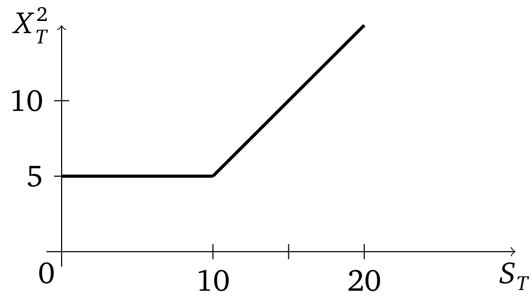
Gre za zvezno odsekoma linearno funkcijo. Če izplačilom odštejemo znesek 5, to je $X_T - 5$, dobimo opcijsko strategijo metuljev korak.

(b) **[4 točke]**

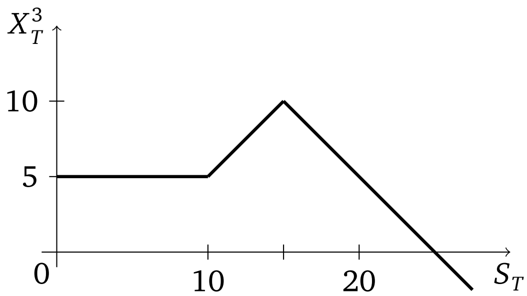
Izplačilo sestavimo po korakih. Vsi spodnji grafi prikazujejo izplačila ob zapadlosti T.

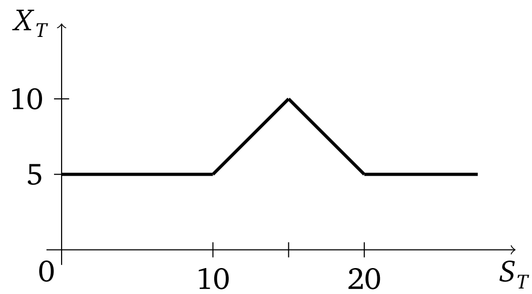
- Na banki investiramo $5D(0,T) = 5e^{-\frac{1}{4}\cdot 0.08} = 4.90$ EUR.
- Kupimo evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno 10 in zapadostjo T.





- Prodamo dve evropski nakupni opciji z izvršilno ceno 15 in zapadostjo T.
- Kupimo evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno 20 in zapadostjo T.





Rezultat analitično preverimo s poenostavitvijo spodnjega izraza na disjunktnih intervalih.

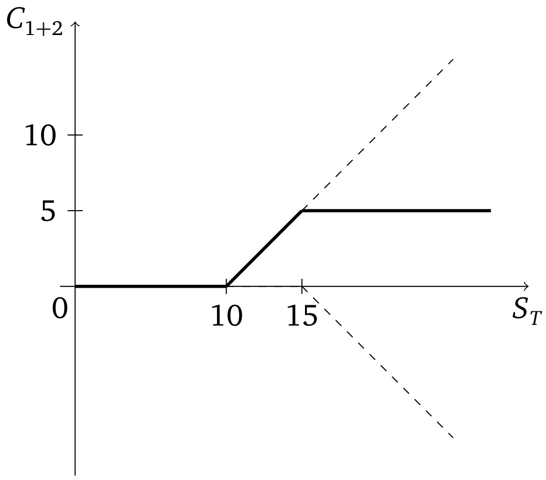
$X_T = 5 + \max\{S_T - 10, 0\} - 2\max\{S_T - 15, 0\} + \max\{S_T - 20, 0\}$.

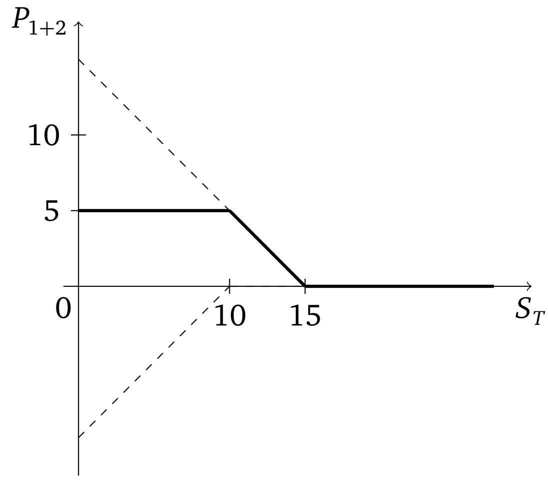
(c) **[4 točke]**

Depozit na banki, ki izplača 5 ob zapadlosti, izrazimo z izplačili opcij. Portfelju opcij iz naloge (b) zato dodamo še naslednje opcije:

- Kupimo evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno 10 in zapadostjo T.

- Prodamo evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno 15 in zapadostjo T.
- Kupimo evropsko prodajno opcijo z izvršilno ceno 15 in zapadostjo T.
- Prodamo evropsko prodajno opcijo z izvršilno ceno 10 in zapadostjo T.





Izplačila naštetega portfelja se seštejejo v konstantno izplačilo 5.

(d) **[4 točke]**

Uporabimo portfelj iz naloge (b) in Black-Scholesovo formulo

$c_0^{\mathrm{E}} = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-YT}\Phi(d_2)$, kjer je $d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+YT+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$ in $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+YT-\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Pri $K = 10$ dobimo $c_0^{\mathrm{E}_1} = 12\Phi\left(\frac{\ln\frac{12}{10}+0.02+0.02}{0.2}\right) - 10e^{-0.02}\Phi\left(\frac{\ln\frac{12}{10}+0.02-0.02}{0.2}\right)$.

Poračunamo in dobimo $12\Phi(1.1116) - 10e^{-0.02}\Phi(0.9116) = 2.3742$ EUR.

Pri $K = 15$ dobimo $c_0^{\mathrm{E}_2} = 12\Phi(-0.9157) - 15e^{-0.02}\Phi(-1.1157) = 0.2141$ EUR,

pri $K = 20$ pa dobimo $c_0^{\mathrm{E}_3} = 12\Phi(-2.3541) - 20e^{-0.02}\Phi(-2.5541) = 0.0071$ EUR.

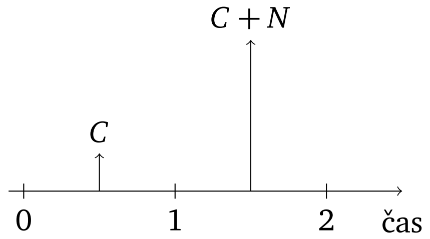
Upoštevamo zgradbo portfelja iz (b) in dobimo

$\pi_0(X) = 4.90 + c_0^{\mathrm{E}_1} - 2c_0^{\mathrm{E}_2} + c_0^{\mathrm{E}_3} = 6.854$ EUR.

3. naloga

(a) **[5 točk]**

Narišemo prihodnje denarne tokove obveznice (glede na danes).



Upoštevamo $N = 1000$ EUR, $C = cN = 0.03 \cdot 1000 = 30$ EUR in $P_0^{\text{CB}} = 1025$ EUR ter uporabimo formulo za vrednotenje obveznic. Dobimo enačbo
$P_0^{\text{CB}} = CD(0, \frac{1}{2}) + (N + C)D(0, \frac{3}{2})$.

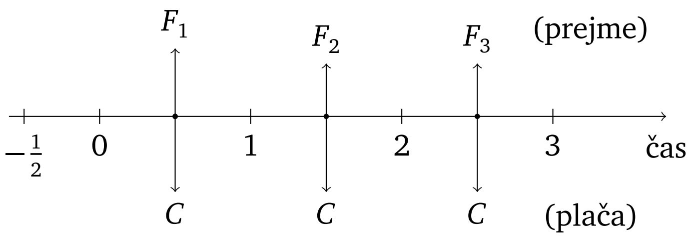
Upoštevamo $D(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot 0.018}$ in izračunamo $D(0, \frac{3}{2}) = \dfrac{1025 - \frac{30}{1+\frac{1}{2}\cdot 0.018}}{1030} = 0.9663$,
od koder dobimo $L(0, \frac{3}{2}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{D(0,\frac{3}{2})} - 1) = 2.33\%$.

(b) **[4 točke]**

Uporabimo formulo za izračun terminske obrestne mere pri navadnem obrestovanju
$L(0, 1, 2) = \frac{1}{2-1}\left(\frac{1+2L(0,2)}{1+1L(0,1)} - 1\right)$, od koder izrazimo
$L(0, 2) = \frac{L(0,1)+L(0,1,2)+L(0,1)L(0,1,2)}{2} = 2.79\%$.

(c) **[6 točk]**

Narišemo shemo prihodnjih denarnih tokov za imetnika dolga pozicije. Njihova sedanja vrednost mora biti $V_0^{\text{SWAP}} = -860.00$ EUR.



Denarnima tokovoma v trenutku $\frac{5}{2}$ dodamo znesek N in uporabimo vrednotenje zamenjave kot portfelja obveznic. $V_0^{\text{SWAP}} = P_0^{\text{FL}} - P_0^{\text{CB}}$.

Izračunamo naslednji spremenljivi kupon $F_1 = NL(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 100000 \cdot 0.015 = 1500$ EUR in izračunamo sedanjo vrednost spremenljivih denarnih tokov
$P_0^{\text{FL}} = (N + F_1)D(0, \frac{1}{2}) = \frac{101500}{1+\frac{1}{2}\cdot 0.018} = 100594.65$ EUR.

Fiksni kuponi znašajo $C = NL_{\text{SWAP}} = 100000 \cdot 0.03 = 3000$ EUR. Z diskontiranjem izračunamo še sedanjo vrednost fiksnih denarnih tokov

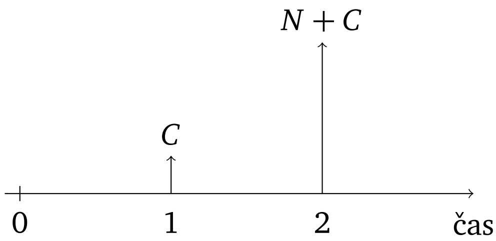
$P_0^{\mathrm{CB}} = C(D(0,\frac{1}{2}) + D(0,\frac{3}{2})) + (C+N)D(0,\frac{5}{2})$, pri čemer diskontnega faktorja $D(0,\frac{5}{2})$ ne poznamo, vemo pa, da je $P_0^{\mathrm{CB}} = P_0^{\mathrm{FL}} - V_0^{\mathrm{SWAP}}$, kar že poznamo.

Po enačenju dobimo $D(0,\frac{5}{2}) = \frac{P_0^{\mathrm{FL}} - V_0^{\mathrm{SWAP}} - CD(0,\frac{1}{2}) - CD(0,\frac{3}{2})}{C+N} = 0.9280$.

Od tod izračunamo $L(0,\frac{5}{2}) = 3.10\%$.

(d) **[5 točk]**

Banka B uporablja obrestne mere $\widetilde{L}(0,T) = L(0,T) + 1.2\%$ in diskontne faktorje $\widetilde{D}(0,T) = \frac{1}{1+T\widetilde{L}(0,T)}$. Narišemo denarne tokove obveznice in določimo višino kupona C tako, da bo cena obveznice enaka N.



Veljati mora $N = C(\widetilde{D}(0,1) + \widetilde{D}(0,2)) + N\widetilde{D}(0,2)$.

Od tod dobimo $C = \frac{N(1-\widetilde{D}(0,2))}{\widetilde{D}(0,1)+\widetilde{D}(0,2)} = 39.03$ EUR.

Pisni izpit: 31. avgust 2011

1. naloga

(a) **[4 točke]**

Vpeljimo oznake $S_0 = 1835.00$ USD, $T = \frac{1}{4}$, $n = 100$, $d = -5$ USD, $t_1 = \frac{1}{12}$, $t_2 = \frac{1}{6}$, $t_3 = \frac{1}{4}$.

Izročitveno ceno za unčo zlata izračunamo po formuli $K = (S_0 - I(0,T))A(0,T)$, kjer je $I(0,T)$ sedanja vrednost vseh stroškov hranjena zlata do ročnosti posla.

$$I(0,T) = d(D(0,t_1) + D(0,t_2) + D(0,t_3)) =$$
$$= -5(e^{-\frac{1}{12}\cdot 0.0055} + e^{-\frac{1}{6}\cdot 0.0069} + e^{-\frac{1}{4}\cdot 0.0083}) = -14.9816 \text{ USD}.$$

Dobimo $K = (1835 + 14.9816)e^{\frac{1}{4}\cdot 0.0083} = 1853.82$ USD.

(b) **[4 točke]**

Za 100 unč zlata bo zlatarna morala plačati $100K = 185382.43$ USD.

Določimo še terminski menjalni tečaj med ameriškim dolarjem in švicarskim frankom v trenutku T.

Vzemimo frank za domačo (d) in dolar za tujo (f) valuto. Danes velja $1f = S_0 d$.

Iz menjalnega tečaja 1 USD = 0.8174 CHF zato razberemo $S_0 = 0.8174$.

Ob ročnosti posla bo veljalo $1f = Kd$.

Terminski menjalni tečaj določimo po formuli $K = S_0 \cdot \frac{D^d(0,T)}{D^f(0,T)}$.

Dobimo $K = 0.8174 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{4}\cdot 0.0083}}{e^{-\frac{1}{4}\cdot 0.0070}} = 0.8171$.

Za 100 unč zlata bo zlatarna plačala $185382.43 \cdot 0.8171 = 151482$ CHF.

(c) **[7 točk]**

V trenutku $t = \frac{1}{2}$ izračunajmo vrednost terminskega posla na zlato.

Uporabimo formulo $V_t^{\mathrm{FW}} = (F_t - K)D(t,T)$.

Izročitvena cena unče zlata, ki bi jo zapisali v tem trenutku, bi znašala $F_t = (S_t - I(t,T))A(t,T)$.

Izračunamo $I(t,T) = -5(e^{-\frac{1}{12}\cdot 0.0055} + e^{-\frac{1}{6}\cdot 0.0065}) = -9.9923$ USD.

Dobimo $F_t = (1890 + 9.9923)e^{\frac{1}{6}\cdot 0.0065} = 1902.05$ USD in

$V_t^{\mathrm{FW}} = (1902.05 - 1853.82)e^{-\frac{1}{6}\cdot 0.0065} = 48.18$ USD za 1 posel.

100 sklenjenih poslov je zato vrednih 4818 USD.

Hkrati izračunamo še vrednost valutnega terminskega posla.

Uporabimo formulo $V_t^{\mathrm{FW}} = S_t D^f(t,T) - KD^d(t,T)$.

Dobimo $V_t^{\mathrm{FW}} = 0.7985e^{-\frac{1}{6}\cdot 0.0065} - 0.8171e^{-\frac{1}{6}\cdot 0.0055} = -0.018716$ CHF.

Posel za nakup 185382.43 USD je zato vreden $185382.43 \cdot (-0.018716) = -3469.60$ CHF.

2. naloga

(a) **[4 točke]**

Model ima 3 možna stanja v času 1 in tri vrednostne papirje, ki jih predstavimo z vektorjem cen $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ in matriko izplačil $M = \begin{bmatrix} 1.2 & 4 & 8 \\ 1.2 & x & 9 \\ 1.2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$.

Trg ni poln, ko je rang matrike M manjši od števila možnih stanj v trenutku 1.

Rang matrike M bo manjši od 3 natanko tedaj, ko bo $\det(M) = 0$.

Računamo $\begin{vmatrix} 1.2 & 4 & 8 \\ 1.2 & x & 9 \\ 1.2 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 1.2(4x - 20)$. Trg ni poln, ko je $x = 5$.

Pri $x = 5$ so stolpci matrike M odvisni in pripadajoči vektorji napenjajo podprostor v prostoru $\mathbb{R}^3$. Očitno gre za ravnino. Njeno enačbo določimo s pomočjo normale

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dosegljive pogojne terjatve so $\mathscr{M} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ; 3x - 4y + z = 0 \right\}$.

(b) **[7 točk]**

Izberemo netvegano obveznico za numerar in izračunamo vektor diskontiranih cen $\tilde{c} = c$ in matriko diskontiranih izplačil $\widetilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{1.2} & \frac{8}{1.2} \\ 1 & \frac{x}{1.2} & \frac{9}{1.2} \\ 1 & \frac{8}{1.2} & \frac{12}{1.2} \end{bmatrix}$.

Za do tveganja nevtralne verjetnosti (q_1, q_2, q_3) dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 1\, q_1 + \ 1\, q_2 + \ 1\, q_2 &= 1 \\ \tfrac{4}{1.2}\, q_1 + \tfrac{x}{1.2}\, q_2 + \tfrac{8}{1.2}\, q_2 &= 5 \\ \tfrac{8}{1.2}\, q_1 + \tfrac{9}{1.2}\, q_2 + \tfrac{12}{1.2}\, q_2 &= 8 \end{aligned}$$

Zadnji dve enačbi pomnožimo z 1.2 ter ju zamenjamo in sistem rešimo z Gaussovim algoritmom

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 12 & 9.6 \\ 4 & x & 8 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1.6 \\ 0 & 0 & 5-x & 2.1 - 0.4x \end{array}\right]$$

Ker je $x \neq 5$, je sistem rešljiv in ima rešitev $q_1 = \frac{3.3 - 0.6x}{5-x}$, $q_2 = \frac{-0.4}{5-x}$ in $q_3 = \frac{2.1 - 0.4x}{5-x}$.

(c) **[4 točke]**

Nadaljujemo račun iz naloge (b). Trg je brez arbitraže natanko tedaj, ko na njem obstaja do tveganja nevtralna verjetnost, torej ko so vsi q_i iz naloge (b) pozitivni.

q_2 je pozitiven, ko je imenovalec $5 - x < 0$, torej pri $x > 5$. V tem primeru sta tudi imenovalca v izrazih za q_1 in q_3 negativna, zato dodatne pogoje določimo tako, da sta le-tam tudi števca negativna.

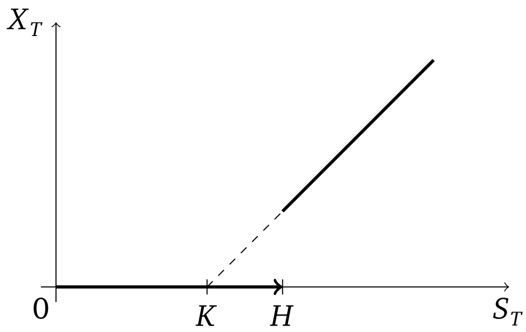
Dobimo $3.3 - 0.6x < 0$, kar pomeni $x > 5.5$, in $2.1 - 0.4x < 0$, kar pomeni $x > 5.25$.

Vse verjetnsti so pozitivne natanko tedaj, ko je $x > 5.5$.

3. naloga

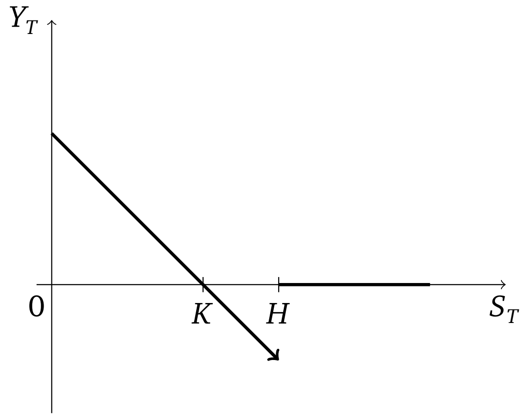
(a) **[3 točke]**

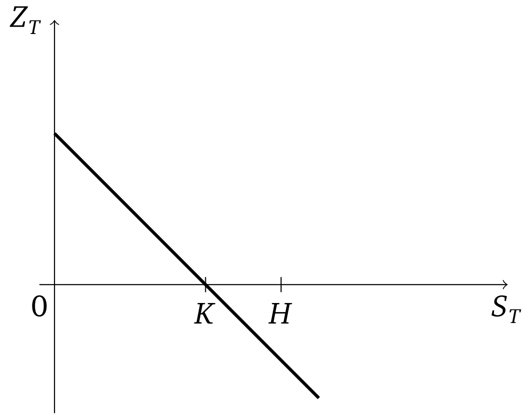
Narišemo izplačila $X_T = \begin{cases} S_T - K; & S_T \geq H \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$



(b) **[6 točk]**

Najprej narišimo še izplačila prodajne opcije z vrzeljo $Y_T = \begin{cases} K - S_T; & S_T < H \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$ ter izplačilo $Z_T = K - S_T$.





Opazimo, da velja $X_T + Z_T = Y_T$. Pariteta od tod sledi po zakonu ene cene.

Navedimo še dokaz s konstrukcijo portfeljev. V času t pripravimo portfelja U in V.

Portfelj U:

- dolga pozicija v prodajni opciji z vrzeljo

Portfelj V:

- dolga pozicija v nakupni opciji z vrzeljo
- kratka pozicija v delnici
- znesek $KD(t, T)$ na bančnem računu

Vrednosti portfeljev v trenutku t znašata $U_t = p_0^G$ in $V_t = c_0^G - S_t + KD(t, T)$.

Pogledamo še vrednosti (izplačila) portfeljev ob zapadlosti T.

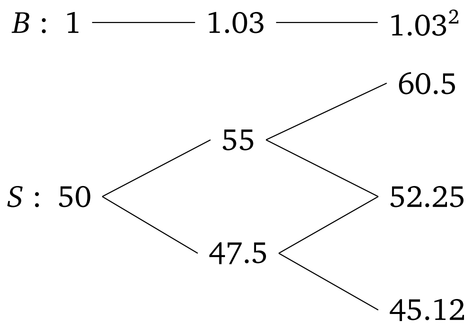
$U_T = \begin{cases} K - S_T; & S_T < H \\ 0; & S_T \geq H \end{cases}$

$$V_T = \begin{cases} S_T - K; & S_T \geq H \\ 0; & S_T < H \end{cases} + K - S_T = \begin{cases} 0; & S_T \geq H \\ K - S_T; & S_T < H \end{cases}$$

Iz enakosti $U_T = V_T$ zato po zakonu ene cene sledi $U_t = V_t$, kar smo želeli pokazati.

(c) **[5 točk]**

Pri podatkih $S_0 = 50$ EUR, $R = 3\%$, $u = 1.1$, $d = 0.95$ in $T = 2$ narišemo binomsko drevo.



Izračunamo še do prihodnosti nevtralno prehodno verjetnost $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{8}{15}$.

Izplačila opcije ob zapadlosti znašajo

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo X_2	Verjetnost Q
u^2	60.5	10.5	$(\frac{8}{15})^2$
ud	52.25	0	$2 \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{15}$
d^2	45.12	0	$(\frac{7}{15})^2$

Ceno pogojne terjetve določimo z diskontiranjem pričakovanih izplačil
$c_0^G = \frac{10.5}{1.03^2} \cdot (\frac{8}{15})^2 = 2.8152$ EUR.

(d) **[6 točk]**

Izplačilo je enako izplačilu klasične evropske nakupne opcije, le spodnja meja indeksov je drugačna. Zanima nas najmanjše potrebno število skokov navzgor, da se opcijo ob zapadlosti splača izvršiti.

Definiramo $m = \left\lfloor \frac{\ln H - \ln S_0 d^T}{\ln u - \ln d} \right\rfloor + 1$ ter $q = \frac{1+R-d}{u-d}$

in zapišemo $c_0^G = \frac{1}{(1+R)^T} \sum_{j=m}^{T} \binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} (S_0 u^j d^{T-j} - K)$.

Pisni izpit: 12. september 2011

1. naloga

(a) **[4 točke]**

Pri podatkih $S_0 = 80$ EUR, $R = 2\%$, $u = 1.05$, $d = 0.95$ in $T = 2$ narišemo binomsko drevo.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=small]
B:\ 1 \arrow[r, dash] & 1.02 \arrow[r, dash] & 1.02^2 \\
 & & 88.2 \\
 & 84 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
S:\ 80 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & 79.8 \\
 & 76 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & 72.2
\end{tikzcd}
$$

ter izračunamo do prihodnosti nevtralno prehodno verjetnost $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{7}{10}$.
Premija opcije v času 1 je slučajna premenljivka z dvema možnima vrednostima.

- V vozlišču u lahko pričakujemo naslednja izplačila

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo C_2	Verjetnost Q
u^2	88.2	6.2	$\frac{7}{10}$
ud	79.8	0	$\frac{3}{10}$

  zato cena opcije znaša $c_u^{\mathrm{E}} = \frac{6.2}{1.02} \cdot \frac{7}{10} = 4.2549$ EUR.
- V vozlišču d sta obe možni končni izplačili enaki 0, zato $c_d^{\mathrm{E}} = 0$ EUR.

Cena opcije v trenutku 1 je zato slučajna spremenljivka $c_1^{\mathrm{E}} \overset{Q}{\sim} \begin{pmatrix} 4.2549 & 0 \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

(b) **[4 točke]**

Tudi tu je premija opcije v času 1 slučajna premenljivka z dvema možnima vrednostima.

- V vozlišču u lahko pričakujemo naslednja izplačila

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo P_2	Verjetnost Q
u^2	88.2	0	$\frac{7}{10}$
ud	79.8	2.2	$\frac{3}{10}$

  zato cena opcije znaša $p_u^{\mathrm{E}} = \frac{2.2}{1.02} \cdot \frac{3}{10} = 0.6471$ EUR.
- V vozlišču d lahko pričakujemo naslednja izplačila

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo Y_2	Verjetnost Q
ud	79.8	2.2	$\frac{7}{10}$
d^2	72.2	9.8	$\frac{3}{10}$

zato cena opcije znaša $p_d^{\mathrm{E}} = \frac{1}{1.02}(2.2 \cdot \frac{7}{10} + 9.8 \cdot \frac{3}{10}) = 4.3922$ EUR.

Cena opcije v trenutku 1 je zato slučajna spremenljivka $p_1^{\mathrm{E}} \overset{Q}{\sim} \begin{pmatrix} 0.6471 & 4.3922 \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

(c) **[4 točke]**

Opcijo izbire vrednotimo ob predpostavki, da bo imetnik v trenutku odločitve izbral opcijski tip, ki je vreden več. Tako se bo v času 1 v stanju u odločil za nakupno z vrednostjo 4.2549 EUR, v stanju d pa za prodajno z vrednostjo 4.3922 EUR.

Cena opcije izbire zato znaša $c_0 = \frac{1}{1.02}(4.2549 \cdot \frac{7}{10} + 4.3922 \cdot \frac{3}{10}) = 4.2118$ EUR.

(d) **[3 točke]**

Ker je investitor indiferenten do nakupa ali prodaje osnovnega instrumenta, gre za špekulanta. Prepričan je, da bo v času življenja opcije (do trenutka odločitve) dobil informacije, ki bodo nakazovale prihodnje gibanje tečajev.

2. naloga

(a) **[3 točke]**

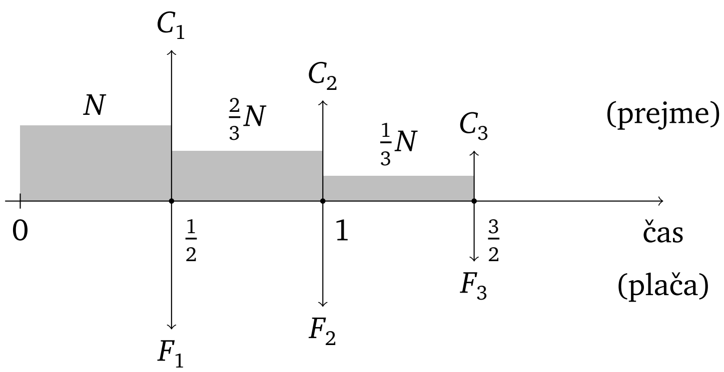
Dolga pozicija v amortizacijski zamenjavi je enakovredna portfelju dolgih pozicij v dogovorih o terminski obrestni meri, kjer ima $i-$ti dogovor navidezno glavnico N_i, datum poravnave t_{i-1}, dan dospetja t_i in dogovorjeno obrestno mero $L_{\mathrm{FRA}} = L_{\mathrm{SWAP}}$.

Pri tem upoštevamo, da je prvi dogovor v resnici kar trenutna bančna transakcija, in privzamemo, da se vrednosti FRAjev izplačajo ob dospetju in ne ob dnevu poravnave.

(b) **[8 točk]**

Uporabimo $N = 100\,000$ EUR, $n = 3$ in $\Delta = \frac{1}{2}$ in izračunamo $N_1 = N$, $N_2 = \frac{2}{3}N$ in $N_3 = \frac{1}{3}N$.

Narišemo prihodnje denarne tokove za imetnika kratke pozicije.



Vrednotimo kot portfelj FRAjev z različnimi navideznimi glavnicami.

$V_0^{\mathrm{SWAP}} = \sum_{i=1}^{n} N_i \Delta (L_{\mathrm{SWAP}} - L(0, t_{i-1}, t_i)) D(0, t_i)$,

pri čemer upoštevamo $L(0, 0, \frac{1}{2}) = L(0, \frac{1}{2}) = 1.50\%$,

$L(0, \frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \left(\frac{1+1 \cdot L(0,1)}{1+\frac{1}{2} \cdot L(0,\frac{1}{2})} - 1 \right) = 0.01985$ in $L(0, 1, \frac{3}{2}) = 0.03047$.

Dobimo $V_0^{\mathrm{SWAP}} = 50000(0.025 - 0.015) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2} \cdot 0.015} + 50000 \cdot \frac{2}{3}(0.025 - 0.01985) \cdot \frac{1}{1+1 \cdot 0.0175} + 50000 \cdot \frac{1}{3}(0.025 - 0.03047) \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{2} \cdot 0.022} = 576.75$ EUR.

(c) **[4 točke]**

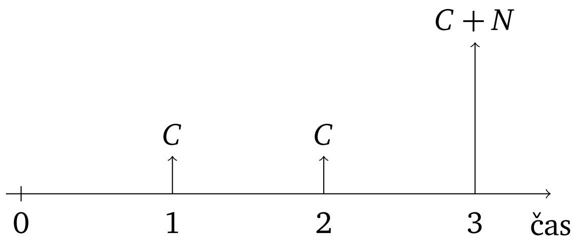
Rešujemo enačbo $0 = \sum_{i=1}^{n} N_i \Delta(L_{\text{SWAP}} - L(0, t_{i-1}, t_i))D(0, t_i)$ oziroma
$0 = \frac{N}{2}(L_{\text{SWAP}} - L(0, \frac{1}{2})) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}L(0,\frac{1}{2})} + \frac{N}{3}(L_{\text{SWAP}} - L(0, \frac{1}{2}, 1)) \cdot \frac{1}{1+L(0,1)} + \frac{N}{6}(L_{\text{SWAP}} - L(0, 1, \frac{3}{2})) \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{2}L(0,\frac{3}{2})}$.

Dobimo $L_{\text{SWAP}} = \dfrac{\frac{N}{2} \cdot \frac{L(0,\frac{1}{2})}{1+\frac{1}{2}L(0,\frac{1}{2})} + \frac{N}{3} \cdot \frac{L(0,\frac{1}{2},1)}{1+L(0,1)} + \frac{N}{6} \cdot \frac{L(0,1,\frac{3}{2})}{1+\frac{3}{2}L(0,\frac{3}{2})}}{\frac{N}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}L(0,\frac{1}{2})} + \frac{N}{3} \cdot \frac{1}{1+L(0,1)} + \frac{N}{6} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{2}L(0,\frac{3}{2})}} = 1.92\%$

3. naloga

(a) **[4 točke]**

Ceno obveznice določimo z diskontiranjem njenih prihodnjih denarnih tokov.



Pri podatkih $N = 100$ EUR in $c = 5\%$ izračunamo $C = cN = 5$ EUR in
$P_0^{\text{CB}} = C(D(0,1)+D(0,2))+(C+N)D(0,3) = 5(e^{-0.0275}+e^{-2\cdot 0.037})+105e^{-3\cdot 0.0435} = 101.66$ EUR.

(b) **[5 točk]**

Za premijo prodajne opcije z zapadlostjo $T = 2$ v času 0 veljata oceni

$\max\{KD(0,T)+I(0,T)-S_0, 0\} \leq p_0^{\text{E}} \leq KD(0,T)$,

pri čemer je $S_0 = P_0^{\text{CB}}$ in $I(0,T) = 5(e^{-0.0275} + e^{-2\cdot 0.037}) = 9.5077$ EUR sedanja vrednost kuponov, izplačanih v času življenja opcije.

Izračunamo še $KD(0,T) = 100e^{-2\cdot 0.037} = 92.8672$ EUR in dobimo

0.7132 EUR $\leq p_0^{\text{E}} \leq 92.8672$ EUR.

(c) **[7 točk]**

Ker na trgu velja $p_0^{\text{E}} = 0.5$, kar pade izven meja iz naloge (b), je mogoča arbitraža.

Na trgu velja $p_0^{\text{E}} < KD(0,T) + I(0,T) - P_0^{\text{CB}}$, torej $-p_0^{\text{E}} + KD(0,T) + I(0,T) - P_0^{\text{CB}} > 0$, kar nam pomaga skonstruirati arbitražno strategijo.

- čas $t = 0$: kupimo prodajno opcijo,
  sposodimo si znesek $KD(0,2)$ do časa 2,
  sposodimo si znesek $CD(0,1)$ do časa 1,
  sposodimo si znesek $CD(0,2)$ do časa 2,
  kupimo obveznico.

  Začetno izplačilo strategije znaša $U_0 = -p_0^{\mathrm{E}} + KD(0,T) + I(0,T) - P_0^{\mathrm{CB}} > 0$.

- čas $t = 1$: prejmemo kupon,
  vrnemo znesek $CD(0,1)$ z obrestmi.

  Vmesmo izplačilo strategije znaša $U_1 = C - C = 0$.

- čas $t = 2$: prejmemo kupon,
  vrnemo znesek $CD(0,2)$ z obrestmi,
  izvršimo prodajno opcijo, če se to splača,
  vrnemo znesek $KD(0,2)$ z obrestmi,
  prodamo obveznico.

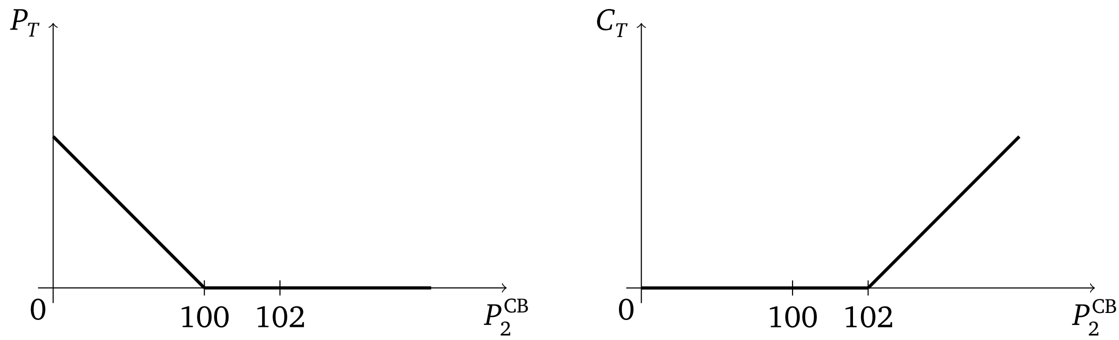
  Končno izplačilo strategije znaša

  $$U_2 = C - C + \max\{K - P_2^{\mathrm{CB}}, 0\} - K + P_2^{\mathrm{CB}} = \max\{0, P_2^{\mathrm{CB}} - K\} \geq 0.$$

Strategija U je arbitražna

(d) **[4 točke]**

Najprej prikažimo izplačila opcij ob zapadlosti kot funkcijo cene obveznice v času 2.



Opazimo, da opciji ponujata enaki izplačili le tedaj, ko nobena izmed njiju ne izplača ničesar, torej ko po izplačilu kupona v času 2 velja $100 \leq P_2^{\mathrm{CB}} \leq 102$.

To je $100 \leq 105e^{-Y(2,3)} \leq 102$, kar privede do rešitve $2.90\% \leq Y(2,3) \leq 4.88\%$.