1. kolokvij: 19. april 2010

1. naloga

(a) **[4 točke]**

Podatki: $S_0 = 60$ EUR, $T = 1$, dividenda $d = 5$ EUR ob $t = \frac{3}{4}$.

Izročitveno ceno K_1 izračunamo po formuli $K_1 = (S_0 - I(0,1)) \cdot A(0,1)$, kjer je $I(0,1)$ sedanja vrednost dividend, izplačanih v času veljavnosti posla.

Torej je $I(0,1) = d \cdot D(0, \frac{3}{4}) = 5 \cdot e^{-\frac{3}{4} \cdot 0.022} = 4.9182$ EUR.

Upoštevamo še $A(0,1) = e^{0.0245}$ in dobimo $K_1 = 56.45$ EUR.

Začetna vrednost sklenjenega posla je 0 po definiciji.

(b) **[4 točke]**

Investitor ima dogovorjeno izročitveno ceno $K_2 = 55$ EUR, danes pa bi lahko sklenil izročitveno ceno K_1. Ker je $K_2 < K_1$ (danes bi si lahko zagotovil višjo prodajno ceno), je za investitorja vrednost posla negativna.

$V_0' = (K_2 - K_1) \cdot D(0,1) = (55 - 56.45)e^{-0.022} = -1.41$ EUR.

Pri tem smo uporabili formulo za vrednost posla za imetnika kratke pozicije.

(c) **[7 točk]**

Najprej izračunamo terminsko moč obresti $Y(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4} Y(0, \frac{3}{4}) - \frac{1}{2} Y(0, \frac{1}{2}) \right) = 3.10\%$.

Denarni tok $x \cdot S_{\frac{1}{2}}$ si lahko zagotovimo s prodajo x delnic v času $\frac{1}{2}$. Dobljeni znesek investiramo do časa $\frac{3}{4}$ po dogovorjeni terminski obrestni meri. x določimo tako, da je $x \cdot S_{\frac{1}{2}} \cdot A(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = 0.1 S_{\frac{1}{2}}$.

Upoštevamo, da je terminski obrestovalni faktor $A(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = e^{\frac{1}{4} Y(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})} = 1.00778$, in dobimo $x = 0.09923$.

Strategija U:

$t = 0$: kupi delež x delnice Aaa,
dogovori se za $Y(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

$U_0 = -x \cdot S_0 = -5.95$ EUR

$t = \frac{1}{2}$: prodaj x delnice Aaa,
investiraj znesek do časa $\frac{3}{4}$.

$U_{\frac{1}{2}} = +x \cdot S_{\frac{1}{2}} - x \cdot S_{\frac{1}{2}} = 0$

$t = \frac{3}{4}$: zaključi investicijo.

$U_{\frac{3}{4}} = +x \cdot S_{\frac{1}{2}} \cdot A(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = 0.1 \cdot S_{\frac{1}{2}}$

Ker se denarni tokovi strategije U v trenutkih $\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{4}$ ujemajo z obravnavano dividendo, je njena sedanja vrednost enaka začetni vrednosti strategije, torej 5.95 EUR.

2. naloga

(a) **[3 točke]**

Uporabimo znano formulo $Y(0,T,U) = \frac{U \cdot Y(0,U) - T \cdot Y(0,T)}{U-T}$ in definicijo funkcije F in dobimo $Y(0,T,U) = \frac{U \cdot F(U) - T \cdot F(T)}{U-T}$.

(b) **[4 točke]**

Računamo $f(0,T) = \lim\limits_{U \searrow T} Y(0,T,U) = \lim\limits_{U \searrow T} \frac{U \cdot F(U) - T \cdot F(T)}{U-T}$.

Z zadnjem izrazu prepoznamo definicijo odvoda produkta $T \cdot F(T)$ v točki T.

Torej $f(0,T) = (T \cdot F(T))' = F(T) + T \cdot F'(T)$.

(c) **[6 točk]**

$\lim\limits_{T \searrow 0} F(T) = \lim\limits_{T \searrow 0} \left(\beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1-e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} - \beta_2 e^{-T/\alpha} \right) = \beta_0 + \beta_1.$

Pri tem smo upoštevali $\lim\limits_{T \searrow 0} \frac{1-e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{T \searrow 0} e^{-T/\alpha} = 1$ po L'Hospitalovemu pravilu.

$\lim\limits_{T \to \infty} F(T) = \lim\limits_{T \to \infty} \left(\beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1-e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} - \beta_2 e^{-T/\alpha} \right) = \beta_0.$

Za izračun intenzivnosti terminske obrestne mere uporabimo točko (b) in računamo

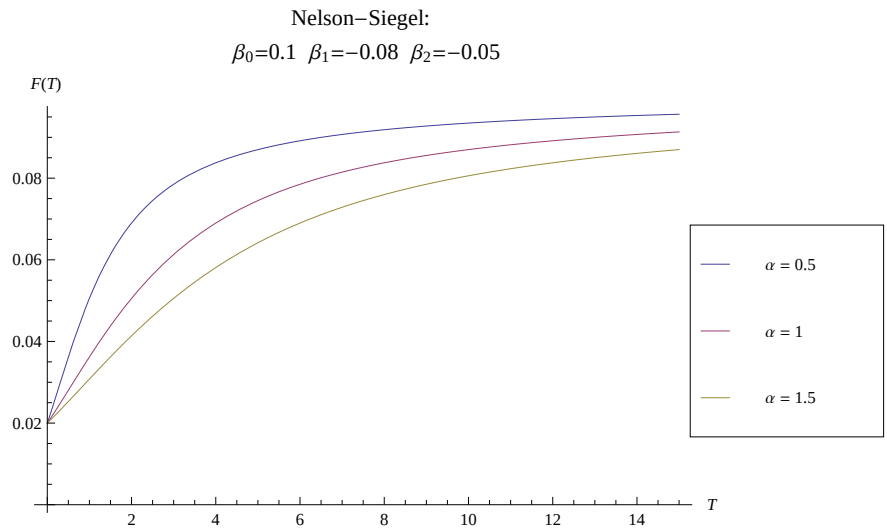
$f(0,T) = F(T) + T \cdot F'(T) =$

$= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1-e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} - \beta_2 e^{-T/\alpha} + T \left((\beta_1 + \beta_2) \frac{-e^{-T/\alpha}(-1/\alpha)(T/\alpha) - (1/\alpha)(1-e^{-T/\alpha})}{(T/\alpha)^2} - \beta_2 e^{-T/\alpha}(-1/\alpha) \right) =$

$= \beta_0 + \beta_1 e^{-T/\alpha} + \frac{T\beta_2}{\alpha} e^{-T/\alpha}$

(d) **[2 točk]**

Parameter α pomeni razteg/skrčitev funkcije v vodoravni smeri (os T).



Grafični prikaz časovne strukture pri različnih vrednostih α.

3. naloga

(a) **[5 točke]**

Podatki: mesečno vplačilo $a = 800$ EUR, $R = 6\%$, ciljni znesek $N = 0.2 \cdot 120\,000 = 24\,000$ EUR.

Varčevalna shema

Označimo z $x = 1 + \frac{R}{12} = 1.005$ mesečni obrestovalni faktor in izračunamo stanje po vplačilu obroka v trenutku n, torej po vplačilu $(n+1)$-ega obroka.

$a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n = a(1 + x + \cdots + x^n) = a \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Zanima nas najmajši celoštevilski n, pri katerem je $a \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \geq 24\,000$.

Pri reševanju neenačbe pazimo na neenačaje, saj je $x > 1$, torej $(1-x) < 0$ in $\log x > 0$. Logaritem je naraščajoča funkcija, zato logaritmiranje ohranja neenakosti.

Dobimo rezultat $n \geq \frac{\log(30x-29)}{\log(x)} - 1 = 27.02$.

Prava izbira je torej $n = 28$.

Opomba. Po vplačilu 28. obroka ob koncu 27. meseca privarčevanih sredstev še ni dovolj za polog ob nakupu stanovanja. Razliko v naslednjem mesecu prinesejo obresti, zato je v resnici zadnji (29.) vplačani obrok enak 0.

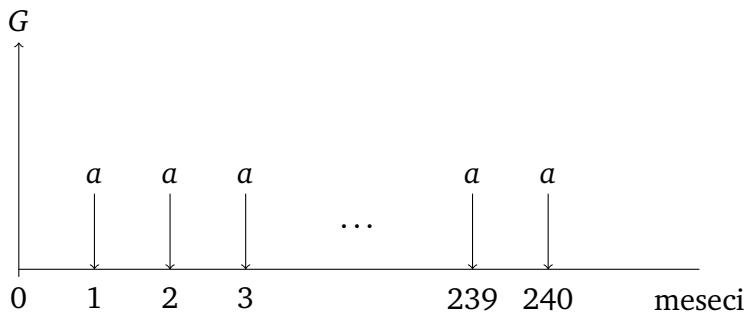
(b) **[8 točke]**

Glavnica kredita znaša $G = 0.8 \cdot 120\,000$ EUR $= 96\,000$ EUR.

Brez škode za splošnost trenutek najema kredita označimo z 0.

Odplačilna doba je $n = 240$ mesecev, $R_1 = 7\%$, $R_2 = 8\%$ in $R_3 = 6\%$.

Amortizacijski načrt



Banka A:

Naj bo $y_1 = (1 + \frac{R_1}{12})^{-1} = 0.9942$ mesečni diskontni faktor in a_1 iskana anuiteta.

Iz ekvivalence sledi $G = a_1 y_1 + a_1 y_1^2 + \cdots + a_1 y_1^{240} = a_1 y_1 (1 + y_1 + \cdots + y_1^{239}) = a_1 y_1 \frac{1-y_1^{240}}{1-y_1}$.

Torej $a_1 = \frac{G(1-y_1)}{y_1(1-y_1^{240})} = 744.29$ EUR.

Banka B:

Naj bosta $y_2 = (1+\frac{R_2}{12})^{-1} = 0.9934$ in $y_3 = (1+\frac{R_3}{12})^{-1} = 0.9950$ mesečna diskontna faktorja in a_2 iskana anuiteta.

Veljati mora

$$G = a_2 y_2 + a_2 y_2^2 + \cdots + a_2 y_2^{120} + a_2 y_2^{120} y_3 + a_2 y_2^{120} y_3^2 + \cdots + a_2 y_2^{120} y_3^{120} =$$

$$= a_2 y_2 (1 + y_2 + \cdots + y_2^{119}) + a_2 y_2^{120} (1 + y_3 + \cdots + y_3^{119}) =$$

$$= a_2 y_2 \frac{1-y_2^{120}}{1-y_2} + a_2 y_2^{120} y_3 \frac{1-y_3^{120}}{1-y_3}$$

$$= a_2 \left(y_2 \frac{1-y_2^{120}}{1-y_2} + y_2^{120} y_3 \frac{1-y_3^{120}}{1-y_3} \right).$$

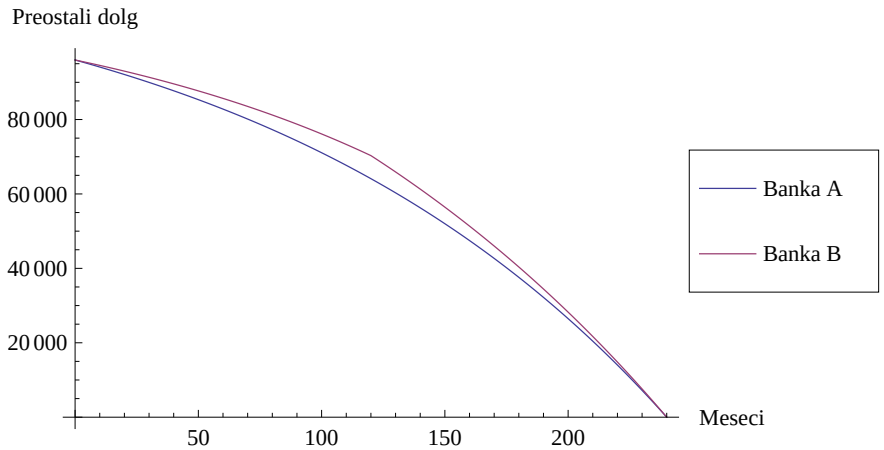
Od tod dobimo $a_2 = \dfrac{G}{y_2 \frac{1-y_2^{120}}{1-y_2} + y_2^{120} y_3 \frac{1-y_3^{120}}{1-y_3}} = 780.48$ EUR.

(c) **[2 točk]**

Obresti se vsak mesec obračunajo na osnovi preostalega dolga.

Banka A zaračunava konstantne obresti skozi celotno amortizacijsko obdobje.

Banka B zaračunava visoke obresti v času, ko je preostali dolg visok, in nizke, ko je preostali dolg nizek. Zato je banka B dražja.



Grafični prikaz upadanja dolga pri banki A in pri banki B.

(d) **[5 točk]**

Osnova za reprogram kredita je preostali dolg po plačilu 120. mesečnega obroka. Uporabljamo rezultate iz banke A in $R_4 = 7.5\%$.

Nova glavnica znaša $G' = R_{120} = a_1 y_1 \frac{1-y_1^{120}}{1-y_1} = 64\,102.72$ EUR.

Novi mesečni diskontni faktor je $y_4 = (1 + \frac{R_4}{12})^{-1} = 0.9938$.

Anuiteta v reprogramu je torej $a_3 = \frac{G'(1-y_4)}{y_4(1-y_4^{240})} = 516.41$ EUR.

Pri tem pazimo, da nova odplačilna doba zopet znaša 20 let.