1. kolokvij: 18. april 2011

1. naloga

(a) **[9 točk]**

Naj bo S_t cena vrednostnega papirja S v trenutku t.

Najprej iz enakosti $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$ izračunamo $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$.

Zapisano neenakost za opcijske premije dokažemo s konstrukcijo arbitražne strategije ob privzetku negirane neenakosti.

Naj bo $p_2 > \frac{1}{2}(p_1 + p_3)$, kar pomeni $2p_2 > p_1 + p_3$.

Po preoblikovanju dobimo $2p_2 - p_1 - p_3 > 0$ in skonstruiramo strategijo U.

- čas t: prodamo (izdamo) 2 prodajni opciji z izvršilno ceno K_2,
  kupimo prodajno opcijo z izvršilno ceno K_1,
  kupimo prodajno opcijo z izvršilno ceno K_3.

  Začetno izplačilo strategije znaša $U_t = 2p_2 - p_1 - p_3 > 0$.

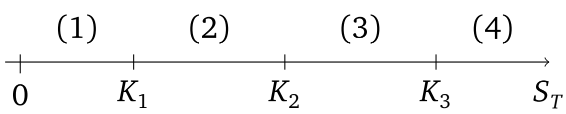
- čas T: izplačamo prodajni opciji z izvršilno ceno K_2, če je potrebno,
  izvršimo prodajno opcijo z izvršilno ceno K_1, če se splača,
  izvršimo prodajno opcijo z izvršilno ceno K_3, če se splača.

  Končno izplačilo strategije znaša

  $U_T = -2\max\{K_2 - S_T, 0\} + \max\{K_1 - S_T, 0\} + \max\{K_3 - S_T, 0\}$.

Dobljeni izraz poenostavimo z obravnavo na intervalih. Kritične točke so K_1, K_2 in K_3.

Zaradi zveznosti vseh funkcijskih predpisov ni pomembno, kam dodamo točke K_i.



(1) $S_T \leq K_1 < K_2 < K_3$

Izplačilo se poenostavi v $U_T = -2(K_2 - S_t) + K_1 - S_T + K_3 - S_T = K_1 + K_3 - 2K_2 = 0$ zaradi lastnosti izvršilnih cen.

(2) $K_1 < S_T < K_2 < K_3$

Izplačilo je $U_T = -2(K_2 - S_t) + K_3 - S_T = S_T - 2K_2 + K_3 = (K_3 - K_2) - (K_2 - S_T)$.

Ker je zaradi urejenosti in lastnosti izvršilnih cen ($K_1 < S_T < K_2$ in $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$) razlika med K_2 in S_T manjša od razlike med K_2 in K_3, je izplačilo strategije nenegativno.

(3) $K_1 < K_2 \leq S_T < K_3$

Dobimo $U_T = K_3 - S_T > 0$

(4) $K_1 < K_2 < K_3 \leq S_T$

Izplačilo je enako $U_T = 0$.

Strategija U je arbitražna.

(b) **[4 točke]**

Zapišemo paritetne relacije za obravnavane evropske nakupne in prodajne opcije in iz njih izrazimo premije prodajnih opcij. $D(t,T)$ je diskontni faktor za obdobje $[t,T]$.

$$\begin{aligned} p_1 + S_t = c_1 + K_1 D(t,T) \quad &\Rightarrow \quad p_1 = c_1 - S_t + K_1 D(t,T) \\ p_2 + S_t = c_2 + K_2 D(t,T) \quad &\Rightarrow \quad p_2 = c_2 - S_t + K_2 D(t,T) \\ p_3 + S_t = c_3 + K_3 D(t,T) \quad &\Rightarrow \quad p_3 = c_3 - S_t + K_3 D(t,T) \end{aligned}$$

Izraze za p_1, p_2 in p_3 vstavimo v neenačbo iz naloge (a) in dobimo

$$c_2 - S_t + K_2 D(t,T) \leq \frac{1}{2}\left(c_1 - S_t + K_1 D(t,T) + c_3 - S_t + K_3 D(t,T)\right)$$

Po krajšanju S_t dobimo

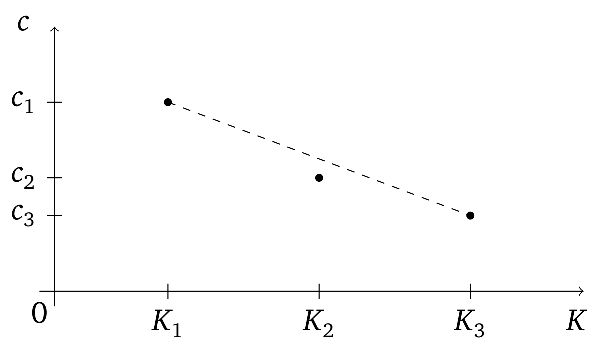
$$c_2 + K_2 D(t,T) \leq \frac{1}{2}\left(c_1 + c_3 + (K_1 + K_3) D(t,T)\right).$$

Z upoštevanjem $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$ dobimo

$$c_2 \leq \frac{1}{2}(c_1 + c_3).$$

(c) **[2 točki]**

Naloga (b) trdi, da je premija nakupne opcije s povprečno izvršilno ceno $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$ nižja od povprečne premije, to je $c_2 \leq \frac{1}{2}(c_1 + c_3)$.



2. naloga

(a) **[3 točke]**

Sklenjena valutna zamenjava je s stališča agencije sestavljena iz trenutne prodaje N enot tuje valute po trenutnem menjalnem tečaju in nakupa N enot tuje valute po menjalnem tečaju K ob dospetju zamenjave. Terminski nakup dosežemo s sklenitvijo dolge pozicije v valutnem terminskem poslu z nominalno vsoto N, terminskim menjalnim tečajem K ter ročnostjo, ki je enaka dospetju zamenjave, in nakupom tuje valute v prihodnosti po takratnem menjalnem tečaju.

(b) **[5 točk]**

Nakup ali prodaja tuje valute po vsakokratnem trenutnem menjalnem tečaju ima vedno neto vrednost enako 0. Vrednost valutne zamenjave bo zato enaka 0, če bo vrednost valutnega terminskega posla enaka 0.

Čas sklenitve valutne zamenjave je $t = -\frac{1}{12}$, njeno dospetje pa $T = \frac{1}{6}$.

Izberimo evro za domačo valuto in kuno za tujo. Ob sklenitvi je menjalni tečaj znašal $S_{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{7.38}$. Vrednost zamenjave bi bila enaka 0 pri

$$K = S_{-\frac{1}{12}} \cdot D^{\text{HRK}}(-\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{6}) \cdot A^{\text{ EUR}(-\frac{1}{12},\frac{1}{6}) = \frac{1}{7.38} \cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 0.0242} \cdot e^{\frac{1}{4}\cdot 0.01172} = 0.1351.}$$

(c) **[4 točke]**

Agencija bi v prihodnosti kune rada kupila po menjalnem tečaju $K' = \frac{1}{7.38} = 0.1355$, torej dražje, kot bi si lahko zagotovila z valutnim poslom iz (b). Vrednost zamenjave pri K' je bila ob sklenitvi zato negativna in je znašala

$$V^{\text{FW}}_{-\frac{1}{12}} = (K - K') \cdot N \cdot D^{\text{ EUR}(-\frac{1}{12},\frac{1}{6}).}$$

Dobimo

$$V^{\text{FW}}_{-\frac{1}{12}} = (0.1351 - 0.1355) \cdot 1\,000\,000 \cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 0.01172} = -420.87 \ \text{ EUR}.$$

Agencija ob sklenitvi od banke prejme 420.87 EUR.

(d) **[3 točke]**

Tudi danes je vrednost valutne zamenjave enaka vrednosti valutnega terminskega posla. Označimo $S_0 = \frac{1}{7.3555}$ današnji menjalni tečaj.

Če bi posel sklenili danes, bi vanj zapisali terminski menjalni tečaj

$$K'' = S_0 \cdot D^{\text{HRK}}(0, \tfrac{1}{6}) \cdot A^{\text{ EUR}(0,\frac{1}{6}),}$$

vrednost sklenjene zamenjave je zato

$$V^{\text{FW}}_0 = (K'' - K') \cdot N \cdot D^{\text{ EUR}(0,\frac{1}{6}) = N\left(S_0 \cdot D^{\text{HRK}}(0,\frac{1}{6}) - K' \cdot D^{\text{ EUR}(0,\frac{1}{6})}\right).}$$

Dobimo

$$V^{\text{FW}}_0 = 1\,000\,000 \left(\frac{1}{7.3555} \cdot e^{-\frac{1}{6}\cdot 0.0148} - \frac{1}{7.38} \cdot e^{-\frac{1}{6}\cdot 0.01206}\right) = 388.48 \ \text{ EUR}.$$

3. naloga

(a) **[3 točke]**

Vrednost posla bo enaka 0 pri $L_{\text{FRA}} = L(0, \frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 + 0.027}{1 + \frac{1}{2} \cdot 0.0175} - 1 \right) = 3.6183\%.$

(b) **[4 točke]**

Naj bo $N = 100\ 000$ EUR in $L'_{\text{FRA}} = 3.45\%$.

Za imetnika dolge pozicije je vrednost takega FRA enaka

$$V_0^{\text{FRA}} = N(1 - \tfrac{1}{2})(L_{\text{FRA}} - L'_{\text{FRA}})D(0,1) =$$

$$= 100\ 000 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (3.6183\% - 3.45\%) \cdot \tfrac{1}{1+0.027} = 81.96 \text{ EUR}.$$

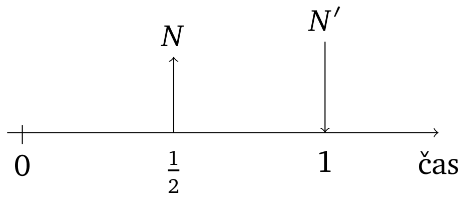
Če komitent sklene dolgo pozicijo, banki plača 81.96 EUR.

Če komitent sklene kratko pozicijo, od banke prejme 81.96 EUR.

(c) **[5 točk]**

Komitent si želi v obdobju $[\frac{1}{2}, 1]$ sposoditi znesek N po 3.45% obrestni meri. Ob dospetju banki zato vrne $N' = N(1 + \frac{1}{2} \cdot 0.0345) = 101725$ EUR.

Narišimo željene denarne tokove:



Za prvi denarni tok naj komitent danes investira $N \cdot D(0, \frac{1}{2})$ EUR do časa $\frac{1}{1}$, za drugega pa naj si danes sposodi $N' \cdot D(0,1)$ EUR do časa 1.

Neto denarni tok komitenta danes znaša

$$-N \cdot D(0, \tfrac{1}{2}) + N' \cdot D(0,1) = -\tfrac{100000}{1+\frac{1}{2}\cdot 0.0175} + \tfrac{101725}{1+0.027} = -81.96 \text{ EUR}.$$

(d) **[8 točk]**

Nalogo rešimo postopoma. Možnih je več rešitev.

Banka danes za dano ceno ponuja previsoko obrestno mero v prihodnosti, zato si želimo v prihodnosti po tej obrestni meri (3.54%) denar pri banki deponirati. To storimo s sklenitvijo kratke pozicije v terminskem poslu na terminsko obrestno mero ter odločitvijo, da v času $\frac{1}{2}$ pri banki deponiramo znesek 100 000 EUR po tržni obrestni meri do časa 1.

Hkrati si s sklenitvijo strategije iz (c) lahko zagotovimo terminsko izposojo zneska 100 000 EUR po obrestni meri 3.45%. Današnji ceni se izničita.

Če privzamemo, da je vrednost terminskega posla izplačana ob dospetju, v času 1 zaslužimo razliko v obrestnih merah.

Zaslužek znaša $N \cdot \frac{1}{2} \cdot (3.54\% - 3.45\%) = 45$ EUR.

Za željeni zaslužek v času 1 še celotno strategijo pomnožimo z $\frac{1000}{45} = \frac{200}{9} = 22.22$.

Pregledno zapišemo strategijo U.

- čas 0: sklenemo kratko pozicijo v 22.22 terminskih poslih na obrestno mero,
  investiramo $22.22 \cdot N \cdot D(0, \frac{1}{2})$ do časa $\frac{1}{2}$,
  sposodimo si $22.22 \cdot N' \cdot D(0, 1)$ do časa 1.

  Izplačilo strategije znaša $U_0 = 22.22 \cdot (+81.96 - 99\,132.59 + 99\,050.63) = 0$.

- čas $\frac{1}{2}$: investiramo $22.22 \cdot N$ po tržni obrestni meri $L(\frac{1}{2}, 1)$,
  prejmemo $22.22 \cdot N \cdot D(0, \frac{1}{2})$ z obrestmi.

  Dobimo $U_{\frac{1}{2}} = 22.22 \cdot (-100\,000 + 100\,000) = 0$.

- čas 1: prejmemo $22.22 \cdot N$ z obrestmi po tržni obrestni meri,
  vnovčimo 22.22 terminskih poslov z obrestno mero L'_{FRA},
  vrnemo $22.22 \cdot N' \cdot D(0, 1)$ z obrestmi.

  Končno izplačilo $U_1 = 22.22 \cdot \Big(100\,000 \cdot (1 + \frac{1}{2} L(\frac{1}{2}, 1)) -$

  $$-100\,000 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (L(\tfrac{1}{2}, 1) - 3.54\%) - 101\,725\Big) = 1000.$$

U je iskana arbitražna strategija.