1. naloga [15 točk]

Znana je naslednja časovna struktura netveganih moči obresti

t	0.5	1.0	1.5	2.0
$Y(0,t)$	1.20%	1.35%	1.55%	1.90%

Finančna institucija je izdala dveletno kuponsko obveznico, ki izplačuje letne kupone po 4% nominalni obrestni meri. Nominalna vrednost obveznice je 100 EUR, prvi kupon pa bo izplačan čez natanko eno leto.

4 (a) Določite ceno in Fisher-Weilovo trajanje obveznice.

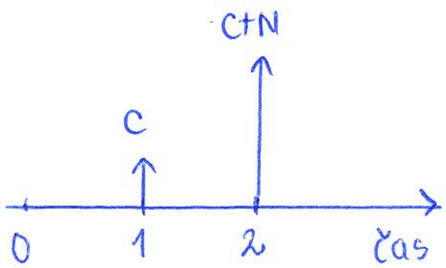
Pomoč: Trajanje obveznice je uteženo povprečje kuponskih datumov, v katerem so uteži enake deležem cene obveznice, ki pripadajo ustreznim denarnim tokovom.

3 (b) Kolikšna bi morala bita nominalna obrestna mera obveznice, da bi Fisher-Weilovo trajanje obveznice znašalo 1.8 let?

3 (c) Finančna institucija želi trgovati s terminskimi posli, napisanimi na kuponsko obveznico. Naj bo ročnost poslov 1 leto, tik po izplačilu takratnega kupona. Določite izročitveno ceno v poslu tako, da bo danes vrednost posla enaka 0.

5 (d) Pokažite, da si investitor lahko s portfeljem terminskih poslov iz naloge (c) zagotovi vnaprej znano moč obresti za investicijo zneska 100 000 EUR v obdobju $[1,2]$. Določite to moč obresti in pojasnite, zakaj se ujema z $Y(0,1,2)$.

(a)



$c = 4\%$

$N = 100$ EUR

$T = 2$

$C = 4$ EUR

$$P_0^{CB} = C \cdot D(0,1) + (C+N)\, D(0,2) =$$

$$= 4 \cdot e^{-0{,}0135} + 104\, e^{-2 \cdot 0{,}019} =$$

$$= \underline{\underline{104{,}07 \text{ EUR}}}$$ 2

$$D_{FW} = \frac{1}{P_0^{CB}} \left(1 \cdot C \cdot D(0,1) + 2 \cdot (C+N) \cdot D(0,2) \right) =$$

$$= \frac{1}{104{,}07} \cdot \left(4 \cdot e^{-0{,}0135} + 2 \cdot 104 \cdot e^{-0{,}019} \right) = \underline{\underline{1{,}9621 \text{ let}}}$$ 2

(b) $$D_{FW} = \frac{1 \cdot C\, D(0,1) + 2 \cdot (C+N)\, D(0,2)}{C \cdot D(0,1) + (C+N)\, D(0,2)}$$ 1

$$C \cdot D(0,1) + 2C \cdot D(0,2) + 2N\, D(0,2) = D_{FW}\, C \cdot D(0,1) + D_{FW} \cdot C \cdot D(0,2) + D_{FW} \cdot N \cdot D(0,2)$$

$$C\left[(1 - D_{FW})\, D(0,1) + (2 - D_{FW})\, D(0,2) \right] = (D_{FW} - 2)\, N \cdot D(0,2)$$

$$c = \frac{(D_{FW}-2)\cdot N\cdot D(0,2)}{(1-D_{FW})\cdot D(0,1) + (2-D_{FW})\cdot D(0,2)} =$$

$$= \frac{(1{,}8-2)\cdot 100\cdot e^{-2\cdot 0{,}019}}{(1-1{,}8)\cdot e^{-0{,}0135} + (2-1{,}8)\cdot e^{-0{,}019}} = \underline{32{,}27\ \text{EUR}}$$ (višina kupona) 2

$\underline{\underline{c = 32{,}27\ \%}}$ (nom. obrestna mera)

ⓒ Terminski posel na obveznico, $T=1$

$K = (P_0^{CB} - I(0,T))\cdot A(0,T)$

$I(0,T)$ vsebuje kupon, izplačan čez 1 leto

$I(0,T) = C D(0,1) = 4\cdot e^{-0{,}0135} = \underline{3{,}95\ \text{EUR}}$ 1

$K = (104{,}07 - 3{,}95)\cdot e^{+0{,}0135} = \underline{\underline{101{,}48\ \text{EUR}}}$ 2

ⓓ V času 1 kupi za 100 000 EUR obveznic po vnaprej dogovorjeni ceni K in jih drži do dospetja.

Kupiti mora $n = \frac{100\,000}{K} = \frac{100\,000}{101{,}48} = \underline{985{,}39 \text{ obveznic}}$ 1

Zato mora skleniti dolgo pozicijo v n terminskih poslih.

Ob dospetju obveznica bo prejel znesek (pazimo na kupone!)

$n\cdot(N+C) = 985{,}39\cdot(100+4) = \underline{102\,480{,}26\ \text{EUR}}$

Dosežena obrestna mera je $100\,000\cdot e^{y} = 102\,480{,}26$

$y = \ln\frac{102\,480{,}26}{100\,000} = \underline{\underline{2{,}45\%}}$ 1

$y(0,1,2) = \frac{1}{1}(2\cdot 0{,}019 - 1\cdot 0{,}0135) = \underline{2{,}45\ \%}$ 2

Ker si obe obrestni meri zagotovimo danes in veljata za isto obdobje v prihodnosti, morata biti enaki. 1

2. naloga [15 točk]

Na tvegan vrednostni papir S v času 0 napišemo dve evropski prodajni opciji, obe z zapadlostjo T. Prva opcija ima izvršilno ceno K_1, njena trenutna (v času 0) premija na trgu pa je p_1. Druga opcija ima izvršilno ceno K_2 in trenutno premijo na trgu p_2. Privzemite, da je $K_1 \leq K_2$.

7 (a) S konstrukcijo dveh arbitražnih strategij dokažite, da na trgu brez arbitraže velja

$$0 \leq p_2 - p_1 \leq (K_2 - K_1) \cdot D(0, T).$$

REŠI (B) IN (C), TUDI ČE (A) NE ZNAŠ.

Na vrednostni papir S v času 0 napišemo še dve evropski nakupni opciji, obe z zapadlostjo T. Prva opcija z izvršilno ceno K_1 ima premijo c_1, druga z izvršilno ceno K_2 pa premijo c_2.

4 (b) Naj bo trenutna cena vrednostnega papirja S enaka S_0. Zapišite paritetni enačbi, ki povezujeta premije c_1, c_2, p_1 in p_2.

4 (c) Določite spodnjo in zgornjo mejo za razliko premij $c_1 - c_2$.

(a) Privzamemo $0 > p_2 - p_1$, torej $p_1 - p_2 > 0$

$t=0$: kupi opcijo s K_2

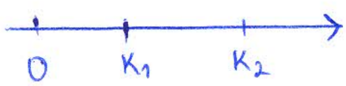
prodaj opcijo s K_1 1

$u_0 = -p_2 + p_1 > 0$

$t=T$: izvrši opcijo s K_2, če se splača

izplačaj opcijo s K_1, če je potrebno

$u_T = \max\{K_2 - S_T, 0\} - \max\{K_1 - S_T, 0\}$



- $0 < S_T < K_1 < K_2$: $u_T = K_2 - S_T - K_1 + S_T = K_2 - K_1 \geq 0$
- $K_1 < S_T < K_2$: $u_T = K_2 - S_T \geq 0$
- $K_1 < K_2 < S_T$: $u_T = 0$ 2

$\Rightarrow$ u je arbitraža, torej $0 \leq p_2 - p_1$ ✓

Privzamemo $p_2 - p_1 > (K_2 - K_1) D(0,T)$, torej $p_2 - p_1 - \underbrace{(K_2 - K_1)}_{\geq 0} D(0,T) > 0$

$t=0$: kupi opcijo s K_1

prodaj opcijo s K_2

investiraj $(K_2 - K_1) D(0,T)$ do T

$u_0 = -p_1 + p_2 - (K_2 - K_1) D(0,T) > 0$ 2

$t=T$: izvrši opcijo s K_1, če se splača

izplačaj opcijo s K_2, če je potrebno

prejmi $K_2 - K_1$

$u_T = \max\{K_1 - S_T, 0\} - \max\{K_2 - S_T, 0\} + K_2 - K_1$

- $0 \leq S_T \leq K_1 < K_2$: $u_T = K_1 - S_T - K_2 + S_T + K_2 - K_1 = 0$
- $0 < K_1 < S_T \leq K_2$: $u_T = -K_2 + S_T + K_2 - K_1 = S_T - K_1 > 0$
- $0 < K_1 < K_2 < S_T$: $u_T = K_2 - K_1 \geq 0$

V vseh primerih je $u_T \geq 0$ in u je arbitraža.
Torej $p_2 - p_1 \leq (K_2 - K_1) D(0,T)$. 2

(b) Paritete evropskih opcij

$p_1 + S_0 - I(0,T) = c_1 + K_1 D(0,T)$

$p_2 + S_0 - I(0,T) = c_2 + K_2 D(0,T)$ 4

(c) Iz paritet sledi $p_1 = c_1 + K_1 D(0,T) - S_0 + I(0,T)$
$p_2 = c_2 + K_2 D(0,T) - S_0 + I(0,T)$

$p_2 - p_1 = c_2 - c_1 + (K_2 - K_1) D(0,T)$ 2

Neenakost iz (a) nam pove

$0 \leq c_2 - c_1 + (K_2 - K_1) D(0,T) \leq (K_2 - K_1) D(0,T) \quad / -(K_2-K_1) D(0,T)$

$-(K_2 - K_1) D(0,T) \leq c_2 - c_1 \leq 0 \quad / \cdot (-1)$

$(K_2 - K_1) D(0,T) \geq c_1 - c_2 \geq 0$

$\underline{\underline{0 \leq c_1 - c_2 \leq (K_2 - K_1) D(0,T)}}$ 2

3. naloga [20 točk]

Proizvodno podjetje pri delu uporablja tri enake stroje, ki jih želi zamenjati z novejšimi in energijsko bolj učinkovitimi. En nov stroj stane 100 000 EUR. Podjetje nima privarčevanih sredstev, zato se z banko dogovori za najem kredita z odplačilno dobo 10 let in polletnimi obroki; prvi obrok bo plačan šest mesecev po najemu kredita. Nominalna obrestna mera za kredit znaša 6%. Podjetje banko zaprosi za tri različne ponudbe.

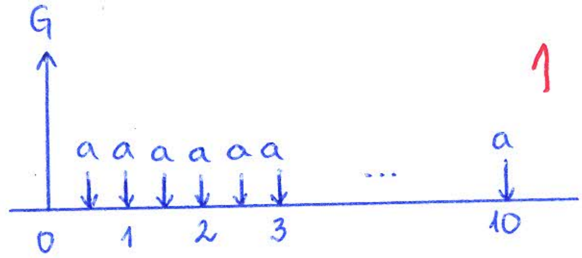
5 (a) V prvi ponudbi podjetje danes zamenja vse 3 stroje in v prihodnosti le še odplačuje kredit. Določite anuiteto opisanega kredita.

5 (b) Zaradi neprekinjenega poslovanja podjetje želi hkrati menjati po le en stroj, zato bi prvega zamenjali takoj, drugega čez eno leto, tretjega pa čez dve leti. Druga ponudba kredita zato vsebuje postopno črpanje glavnice v treh enakih zneskih tik pred menjavo posameznega stroja, časovna shema odplačevanja pa ostane nespremenjena. Določite anuiteto opisanega kredita. U ČASU 1 IN DVE PREJMEŠ DEL GLAVNICE IN HKRATI PLAČAŠ ANUITETI!

5 (c) Podjetje pričakuje, da bo s postopno menjavo strojev povečalo svoje prihodke, zato banko prosi, da v tretji ponudbi predstavi kredit z enako časovno dinamiko kot v (b), le da je zdaj vsak obrok za 2% višji od prejšnjega. Za opisani kredit določite višini prvega ~~in zadnjega~~ obroka.

5 (d) Podjetje sklene kredit po ponudbi iz (c). Pet let kasneje, to je po plačilu 10. obroka, je podjetje v stečaju. Kolikšno terjatev do podjetja lahko prijavi banka?

(a)



1

$G = 3 \cdot 100\,000 = 300\,000$ EUR

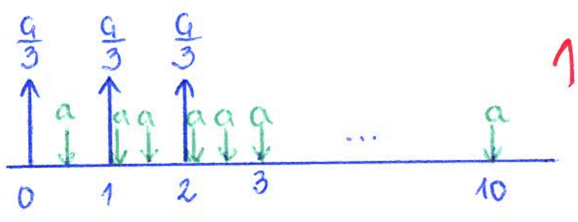
$n = 20$ (število anuitet)

$R = 6\%$

$r = 3\%$ obdobna obrestna mera

$$a = G \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = 300\,000 \cdot \frac{0{,}03 \cdot 1{,}03^{20}}{1{,}03^{20} - 1} = \underline{\underline{20\,164{,}71 \text{ EUR}}}$$ 4

(b) Kredit s postopnim črpanjem glavnice



1

Vse diskontiramo na čas 0, uporabimo načelo ekvivalence glavnic

$$\frac{G}{3} + \frac{G}{3} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \frac{G}{3}\left(\frac{1}{1+r}\right)^4 = a \cdot \frac{1}{1+r} + a\left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \dots + a\left(\frac{1}{1+r}\right)^{20}$$ 2

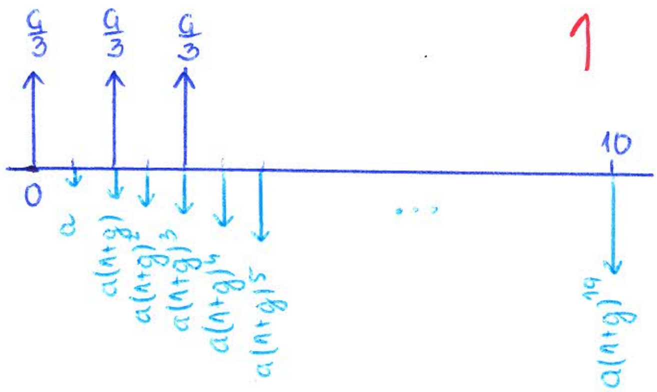
$$\frac{G}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+r}\right)^4\right) = \frac{a}{1+r}\left(1 + \left(\frac{1}{1+r}\right) + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{1+r}\right)^{20}\right)$$

$$\frac{G}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+r}\right)^4\right) = \frac{a}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{a\left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^{20}\right)}{r}$$

$$a = \frac{G \cdot r}{3} \cdot \frac{1+\left(\frac{1}{1+r}\right)^2+\left(\frac{1}{1+r}\right)^4}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{20}} = \frac{300000 \cdot 0{,}03}{3} \cdot \frac{1+\frac{1}{1{,}03^2}+\frac{1}{1{,}03^4}}{1-\frac{1}{1{,}03^{20}}} = \underline{\underline{19\,029{,}32 \text{ EUR}}}$$

2

ⓒ Kredit s postopnim črpanjem glavnice in naraščajočo anuiteto



1

$g = 2\%$ rast anuitet

$$\frac{G}{3} + \frac{G}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \frac{G}{3}\left(\frac{1}{1+r}\right)^4 = a\,\frac{1}{1+r} + a\,\frac{1+g}{(1+r)^2} + a\,\frac{(1+g)^2}{(1+g)^3} + \cdots + a\,\frac{(1+g)^{19}}{(1+g)^{20}}$$

2

$$\frac{G}{3}\left(1+\left(\frac{1}{1+r}\right)^2+\left(\frac{1}{1+r}\right)^4\right) = \frac{a}{1+r}\left(1+\frac{1+g}{1+r}+\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{19}\right)$$

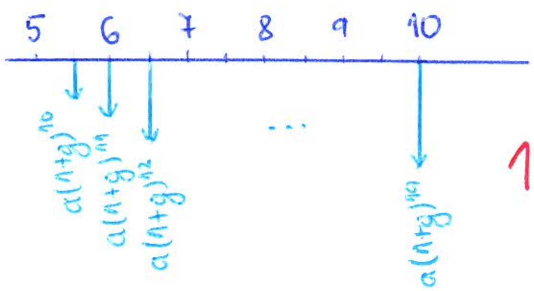
$$\frac{G}{3}\left(1+\left(\frac{1}{1+r}\right)^2+\left(\frac{1}{1+r}\right)^4\right) = \frac{a}{1+r}\cdot\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{20}}{1-\frac{1+g}{1+r}} = \frac{a}{r-g}\cdot\left(1+\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{20}\right)$$

2

$$a = \frac{G\cdot(r-g)}{3}\cdot\frac{1+\left(\frac{1}{1+r}\right)^2+\left(\frac{1}{1+r}\right)^4}{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{20}} = \frac{300000\cdot 0{,}01}{3}\cdot\frac{1+\frac{1}{1{,}03^2}+\frac{1}{1{,}03^4}}{1-\left(\frac{1{,}02}{1{,}03}\right)^{20}} = \underline{\underline{15\,970{,}73 \text{ EUR}}}$$

Zadnja anuiteta znaša $a(1+g)^{19} = \underline{\underline{23\,266{,}34 \text{ EUR}}}$

ⓓ



Na čas 5 diskontiramo vse še ne plačane anuitete

1

2

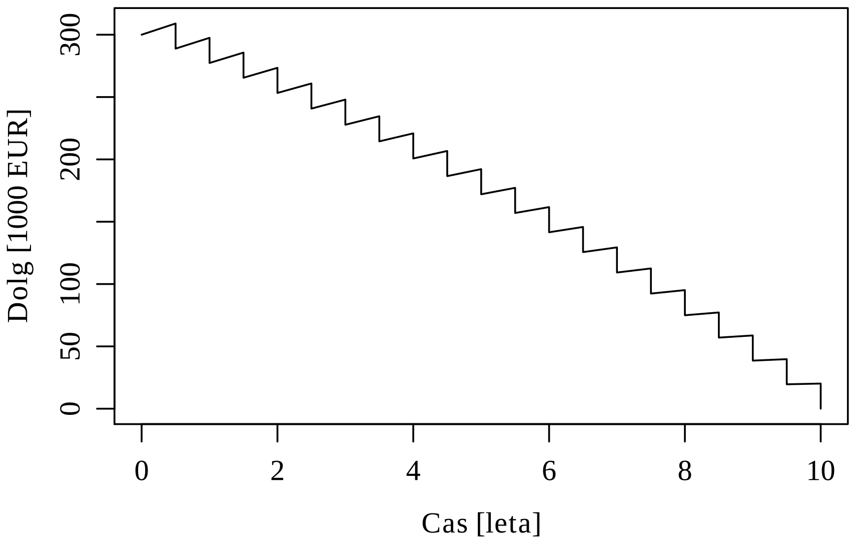
$$R_{10} = a(1+g)^{10}\cdot\frac{1}{1+r} + a(1+g)^{11}\cdot\left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \cdots + a(1+g)^{19}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{10} =$$

$$= a\,\frac{(1+g)^{10}}{1+r}\left(1+\frac{1+g}{1+r}+\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^9\right) = a\,\frac{(1+g)^{10}}{1+r}\;\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{10}}{1-\frac{1+g}{1+r}} =$$

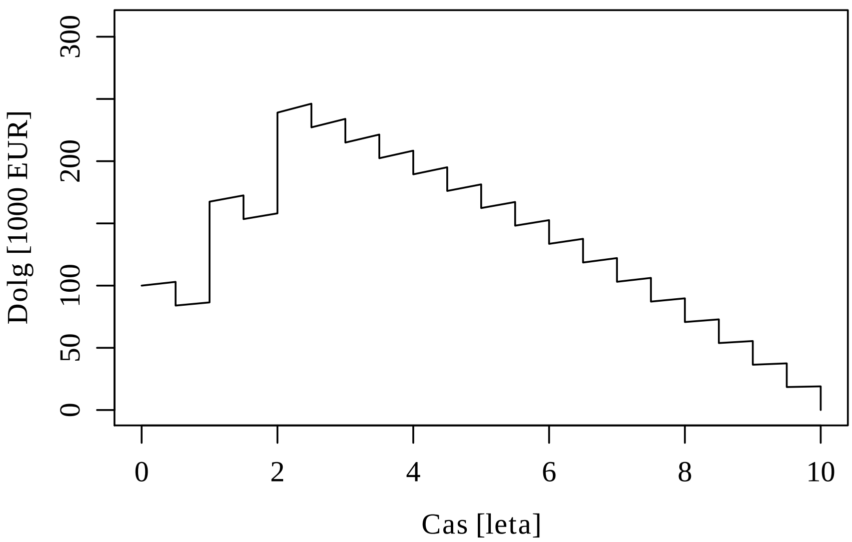
2

$$= a\,\frac{(1+g)^{10}}{r-g}\cdot\left(1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{10}\right) = 15\,970{,}73\cdot\frac{1{,}02^{10}}{0{,}01}\left(1-\left(\frac{1{,}02}{1{,}03}\right)^{10}\right) = \underline{\underline{180\,964{,}37 \text{ EUR}}}$$

Ponudba 1



Ponudba 2



Ponudba 3