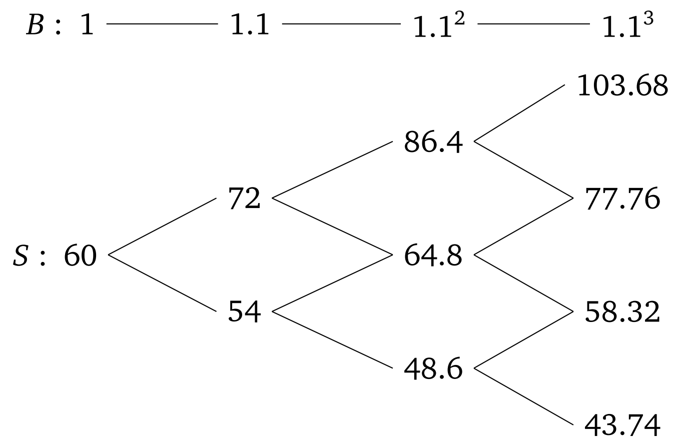
2. kolokvij: 6. junij 2011

1. naloga

(a) **[4 točke]**

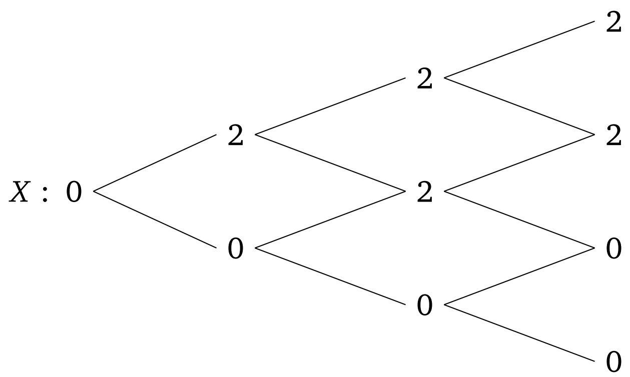
Pri podatkih $S_0 = 60$ EUR, $R = 10\%$, $u = 1.2$, $d = 0.9$ in $T = 3$ narišemo binomsko drevo.



Za numerar vzamemo bančni račun. Prehodni verjetnosti za dvig in padec cene delnice sta neodvisni od časa in stanj in v celotnem modelu znašata $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{2}{3}$ in $1 - q = \frac{1}{3}$.

(b) **[4 točke]**

Vsa izplačila pogojne terjatve $X_t = 2 \cdot 1_{\{S_t > 60\}}$, $t \in \{1, 2, 3\}$, so prikazana na spodnjem drevesu. Izplačila so neodvisna od poti do posameznega stanja.



Ceno pogojne terjetve določimo z diskontiranjem pričakovanih izplačil glede na do prihodnosti nevtralno verjetnost.

$\pi_0(X) = \frac{2}{1.1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{1.1^2} \cdot (\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{1.1^2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{1.1^3} \cdot (\frac{2}{3})^3 + \frac{2}{1.1^3} \cdot 3 \cdot (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} = 3.7944$ EUR.

(c) **[4 točke]**

Izplačila opcije ob zapadlosti 2 so enaka

$$Y_2 = \max\{S_2 - 60, 0\} \cdot 1_{\{\max\{S_0, S_1, S_2\} \leq 70\}}$$

in so odvisna od poti cene delnice v obdobju $[0, 2]$. Delamo s polnim drevesom dogodkov in pridemo do končnih izplačil ter pripadajočih verjetnosti

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo Y_2	Verjetnost Q
u^2	86.4	0	$(\frac{2}{3})^2$
ud	64.8	0	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$
du	64.8	4.8	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$
d^2	48.6	0	$(\frac{1}{3})^2$

Ceno pogojne terjetve določimo z diskontiranjem pričakovanih izplačil
$\pi_0(Y) = \frac{4.8}{1.1^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0.8815$ EUR.

(d) **[3 točke]**

Izplačila v trenutku 1 izračunamo po formuli $Z_1 = \max\{S_1 - 60, 0\}$.

Stanje	Cena delnice S_1	Izplačilo Z	Verjetnost Q
u	72	12	$\frac{2}{3}$
d	54	0	$\frac{1}{3}$

Ceno pogojne terjetve določimo z diskontiranjem pričakovanih izplačil
$\pi_0(Z) = \frac{12}{1.1} \cdot \frac{2}{3} = 7.2727$ EUR.

2. naloga

(a) **[3 točke]**

Drevo dogodkov

$$B:\ 1 \;\text{———}\; 1.02 \;\text{———}\; 1.02^2$$

$$\begin{tikzcd}
 & & 54 \\
 & 52 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
S:\ 50 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & 49 \\
 & 47 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & 44
\end{tikzcd}$$

(b) **[6 točk]**

Izberemo bančni račun B za numerar in opazimo, da je vsak enoobdobni model v resnici binomski s parametrom $R = 2\%$ in primerno izbranima u in d.

$$B:\ 1 \;\text{———}\; 1.02$$

$$\begin{tikzcd}
 & 52 \\
S: 50 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & 47
\end{tikzcd}$$

$$u_1 = \frac{52}{50} \qquad d_1 = \frac{47}{50}$$

$$q_1 = \frac{1+R-d_1}{u_1-d_1} = \frac{1.02-\frac{47}{50}}{\frac{52}{50}-\frac{47}{50}} = 0.8$$

$$B:\ 1.02 \ \text{———}\ 1.02^2$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & 54 \\ S: 52 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 49 \end{tikzcd}$$

$$u_2 = \frac{54}{52} \qquad d_2 = \frac{49}{52}$$

$$q_2 = \frac{1+R-d_2}{u_2-d_2} = \frac{1.02-\frac{49}{52}}{\frac{54}{52}-\frac{49}{52}} = 0.808$$

$$B:\ 1.02 \ \text{———}\ 1.02^2$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & 49 \\ S: 47 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 44 \end{tikzcd}$$

$$u_3 = \frac{49}{47} \qquad d_3 = \frac{44}{47}$$

$$q_3 = \frac{1+R-d_3}{u_3-d_3} = \frac{1.02-\frac{44}{47}}{\frac{49}{47}-\frac{44}{47}} = 0.788$$

Ker so vse prehodne do prihodnosti nevtralne verjetnosti pozitivne, v modelu obstaja do prihodnosti nevtralna verjetnost in je zato po 1. izreku finančne matematike trg brez arbitraže.

(c) **[6 točk]**

Izplačila prodajne opcije izračunamo po formuli $X_2 = \max\{K - S_2, 0\}$ in so prikazana na drevesu.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & & 0 \\ & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ X:\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 2 \\ & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & 7 \end{tikzcd}$$

Izvedbeno strategijo določamo rekurzivno. Naj α označuje število enot bančnega računa in β število delnic v dinamičnem portfelju.

V času $t = 1$ v vozlišču u rešujemo naslednji linearni sistem enačb z neznankama α_u in β_u

$$\begin{aligned} \alpha_u B_{uu} + \beta_u S_{uu} &= X_{uu} \\ \alpha_u B_{ud} + \beta_u S_{ud} &= X_{ud} \end{aligned}$$

Vstavimo podatke in dobimo sistem

$$\begin{aligned} 1.02^2\alpha_u + 54\beta_u &= 0 \\ 1.02^2\alpha_u + 49\beta_u &= 2 \end{aligned}$$

z rešitvijo $\alpha_u = 20.7612$ in $\beta_u = -0.4$ ter vrednostjo portfelja

$V_u = \alpha_u B_u + \beta_u S_u = 20.7612 \cdot 1.02 - 0.4 \cdot 52 = 0.3765$ EUR.

Istočasno v vozlišču d rešujemo sistem

$$\begin{aligned} 1.02^2\alpha_d + 49\beta_d &= 2 \\ 1.02^2\alpha_d + 44\beta_d &= 7 \end{aligned}$$

z rešitvijo $\alpha_d = 49.0196$ in $\beta_d = -1$ ter vrednostjo portfelja

$V_d = 49.0196 \cdot 1.02 - 1 \cdot 47 = 3.00$ EUR.

Nadaljujemo v času 0 s sistemom enačb za začetni portfelj (α_0, β_0)

$$\begin{aligned} 1.02\alpha_0 + 52\beta_0 &= 0.3765 \\ 1.02\alpha_0 + 47\beta_0 &= 3.00 \end{aligned}$$

z rešitvijo $\alpha_0 = 27.1188$ in $\beta_d = -0.5247$.

Premija opcije je enaka ceni začetnega portfelja

$p_0^E = V_0 = 27.1188 \cdot 1 - 0.5247 \cdot 50 = 0.8835$ EUR.

3. naloga

(a) **[6 točk]**

Model ima 3 možna stanja v času 1 in dva vrednostna papirja, ki ju predstavimo z vektorjem cen $c = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$ in matriko izplačil $M = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 10 & 8 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$.

Poiščemo vektor cen stanj ψ, za katerega je $M^T\psi = c$. Komponente $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ dobimo iz sistema

$$\begin{aligned} 10\psi_1 + 10\psi_2 + 12\psi_3 &= 10 \\ 5\psi_1 + 8\psi_2 + 13\psi_3 &= 9 \\ \psi_1, \psi_2, \psi_3 &> 0 \end{aligned}$$

Izberemo ψ_3 za parameter in izrazimo $\psi_1 = \frac{17\psi_3 - 5}{15}$ in $\psi_2 = \frac{4 - 7\psi_3}{3}$.

Stroga pozitivnost vseh komponent določi omejitev $\frac{5}{17} < \psi_3 < \frac{4}{7}$ za parameter ψ_3.

Družina vektorjev cen stanj

$$\Psi = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{17\psi_3 - 5}{15} \\ \frac{4 - 7\psi_3}{3} \\ \psi_3 \end{bmatrix} ; \; \frac{5}{17} < \psi_3 < \frac{4}{7} \right\}$$

ni prazna, zato trg ne dopušča arbitraže.

(b) **[4 točke]**

Vrednost dolge pozicije v terminskem poslu ob ročnosti 1 je enaka $S_1 - K$, kjer je $K = 10$ izročitvena cena. Pogojno terjatev X lahko zapišemo z vektorski obliki $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Njeno ceno določimo z vektorji cen stanj $\hat{\pi}_0(X) = \langle X, \psi \rangle = 2\psi_3$.

Ko ψ_3 preteče interval $(\frac{5}{17}, \frac{4}{7})$, za dopustne cene terjatve X dobimo odprt interval $(\frac{10}{17}, \frac{8}{7})$, zato terjatev ni dosegljiva na trgu $\{S, W\}$.

(c) **[6 točk]**

Dodan bančni račun je instrument B z začetno ceno $B_0 = 1$ in končnim izplačilom $B_1 = 1 + R$ v vseh stanjih modela. Njegova izplačila in ceno mora povezovati družina cenovnih funkcionalov iz naloge (a). Veljati mora $\hat{\pi}_0 \left(\begin{bmatrix} 1+R \\ 1+R \\ 1+R \end{bmatrix} \right) = 1$, kar pomeni $(1+R)(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = 1$.

Z upoštevanjem predpisov za ψ_1 in ψ_2 od tod izrazimo $R = \frac{\psi_3}{5-\psi_3}$ in določimo največjo in najmanjšo možno vrednost, ko ψ_3 preteče dopustni interval.

Upoštevamo, da je funkcija $f(x) = \frac{x}{x-5}$ naraščajoča na intervalu $(0,5)$, zato spodnjo mejo dobimo pri $\psi_3 = \frac{5}{17}$ in znaša $\frac{1}{16}$, zgornjo mejo pa pri $\psi_3 = \frac{4}{7}$ in znaša $\frac{4}{31}$.

Veljati mora $R \in (\frac{1}{16}, \frac{4}{31}) = (6.25\%, 12.90\%)$.

(d) **[4 točke]**

Ker je $R = 10\%$, iz enačbe $\frac{1}{10} = \frac{\psi_3}{5-\psi_3}$ izračunamo $\psi_3 = \frac{5}{11}$ in s tem določimo konkretni vektor cen stanj $\psi' = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \\ \frac{5}{11} \end{bmatrix}$ za trg $\{B, S, W\}$.

Mavrična opcija ob zapadlosti 1 ponuja izplačila $Y_1 = \max\Big\{\max\{S_1, W_1\} - K, 0\Big\}$, kar znese

$$Y = \begin{bmatrix} \max\{10-9,0\} \\ \max\{10-9,0\} \\ \max\{13-9,0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Določimo še njeno ceno $\pi_0(Y) = \langle Y, \psi' \rangle = 1 \cdot \frac{2}{11} + 1 \cdot \frac{3}{11} + 4 \cdot \frac{5}{11} = \frac{25}{11}$.