Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

FINANČNA MATEMATIKA 1

2. kolokvij

11. junij 2012

Ime in priimek: _____ Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 3, rešiti morate vse. Skupaj lahko zberete 50 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, na katerem so naloge.

Pazite na zadostno natančnost pri računanju. Vse odgovore utemeljite.
Na voljo imate 120 minut. Veliko uspeha!

Naloga	a	b	c	d	Skupaj
1.					
2.				•	
3.					
Skupaj	•	•	•	•	

1. naloga [15 točk]

Predvideno gibanje cene delnice v prihodnosti naj opisuje binomski model s tremi obdobji in faktorjema $u = 1.1$ ter $d = 0.9$. Danes je delnica vredna 20 EUR, obdobna obrestna mera za netvegan bančni račun pa znaša 2% in se v prihodnosti ne bo spreminjala.

(a) Narišite drevo dogodkov ter določite vse do tveganja nevtralne prehodne verjetnosti.

(b) Določite premijo digitalne opcije z zapadlostjo 3 in izvršilno ceno 20 EUR. To je pogojna terjatev, ki ob zapadlosti izplača 1 EUR pod pogojem, da je tedaj cena delnice višja od izvršilne cene.

Ragljasta[1] *opcija* (*cliquet* ali *ratchet option*) z zapadlostjo T je portfelj T zaporednih opcij, v katerem se prva aktivira v času 0 in ima zapadlost 1, druga se aktivira ob zapadlosti prve in ima zapadlost 2 itd. Izvršilna cena posamezne opcije se določi ob njeni aktivaciji (*reset date*) tako, da je opcija tedaj na meji. Vse opcije v portfelju imajo isto osnovno premoženje.

Imetnik ragljaste opcije plača njeno premijo v času 0, denarne tokove pa lahko prejme ob zapadlosti posamezne opcije ali pa (seštete) v trenutku T.

(c) Opcijska raglja je *nakupna*, če so vse opcije v portfelju nakupne. Privzemite, da imetnik prejme izplačila ob zapadlosti posamezne opcije. Določite premijo nakupne ragljaste opcije z zapadlostjo 2.

(d) Privzemite, da imetnik prejme seštevek izplačil šele ob zapadlosti ragljaste opcije. Določite premijo nakupne ragljaste opcije z zapadlostjo 2.

[1] Raglja kot orodje se imenuje tudi nasadni ključ.

2. naloga [15 točk]

Obravnavamo enoobdobni model finančnega trga s tremi vrednostnimi papirji. Prvi je netvegana brezkuponska obveznica z nominalno vrednostjo 10, dospetjem 1 in ceno 9 v času 0. Drugi in tretji instrumet sta tvegani delnici S in W. Njuni ceni danes znašata $S_0 = W_0 = 9$, izplačila v času 1 pa so podana z

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 12; & \omega = \omega_g \\ 10; & \omega = \omega_m \\ 8; & \omega = \omega_b \end{cases} \qquad \text{in} \qquad W_1(\omega) = \begin{cases} x; & \omega = \omega_g \\ 9; & \omega = \omega_m \\ y; & \omega = \omega_b \end{cases}$$

kjer sta x in y pozitivni realni števili.

(a) Določite pogoje za števili x in y, pod katerimi obravnavani trg *ni* poln.

(b) Naj bo $x = 14$ in $y = 8$. Določite do tveganja nevtralno verjetnost in dokažite, da trg ne dopušča arbitraže.

(c) Finančna institucija omogoča trgovanje z evropskimi nakupnimi opcijami na delnico W z zapadlostjo 1 in izvršilno ceno 10. Zanjo zahteva premijo v višini 0.5. Dokažite, da je s tem možna arbitraža. Pripravite recept za brezplačno kosilo.[2]

[2] Pripravite arbitražno strategijo in natančno opišite denarne tokove.

3. naloga [20 točk]

Vrednost delnice S danes znaša 6 USD, cena enote zlata pa je 10 USD. Privzemite, da bodo čez en mesec možne naslednje cene delnice in enote zlata

Stanje	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Delnica v USD	8	6	5	4
Enota zlata v USD	8	10	11	12

V nalogi zlato obravnavajte kot povsem finančno blago.

(a) Določite vektor cen stanj in dokažite, da trg ne dopušča arbitraže.

(b) V času 0 izdamo evropsko prodajno opcijo na enoto zlata z izvršilno ceno 11 USD in zapadlostjo 1 mesec ter pogojno terjatev Y, ki v času 1 izplača

Stanje	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Izplačilo v USD	5	2	0	0

Določite ceni terjatev v času 0 in ugotovite, ali sta (vsaka posebej) na trgu dosegljivi.

(c) Dokažite, da lahko s portfeljem delnice in zlata ustvarimo netvegan finančni instrument. Koliko znaša njegov netvegan donos?

(d) Privzemite, da so glede na naravno verjetnost P vsi izidi ω_i enako verjetni. Izračunajte kovarianco med enostavnim donosom delnice S in enostavnim donosom zlata. Ali sta donosa neodvisna?

Pomoč: Enostavni donos portfelja θ je slučajna spremenljivka $r_\theta = \frac{V_1(\theta)-V_0(\theta)}{V_0(\theta)}$.

Kovarianca med slučajnima spremenljivkama X in Y je $K(X,Y) = E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big]$.