1. naloga [15 točk]

Predvideno gibanje cene delnice v prihodnosti naj opisuje binomski model s tremi obdobji in faktorjema $u = 1.1$ ter $d = 0.9$. Danes je delnica vredna 20 EUR, obdobna obrestna mera za netvegan bančni račun pa znaša 2% in se v prihodnosti ne bo spreminjala.

3 (a) Narišite drevo dogodkov ter določite vse do tveganja nevtralne prehodne verjetnosti.

4 (b) Določite premijo digitalne opcije z zapadlostjo 3 in izvršilno ceno 20 EUR. To je pogojna terjatev, ki ob zapadlosti izplača 1 EUR pod pogojem, da je tedaj cena delnice višja od izvršilne cene.

Ragljasta[1] *opcija* (*cliquet* ali *ratchet option*) z zapadlostjo T je portfelj T zaporednih opcij, v katerem se prva aktivira v času 0 in ima zapadlost 1, druga se aktivira ob zapadlosti prve in ima zapadlost 2 itd. Izvršilna cena posamezne opcije se določi ob njeni aktivaciji (*reset date*) tako, da je opcija tedaj na meji. Vse opcije v portfelju imajo isto osnovno premoženje.

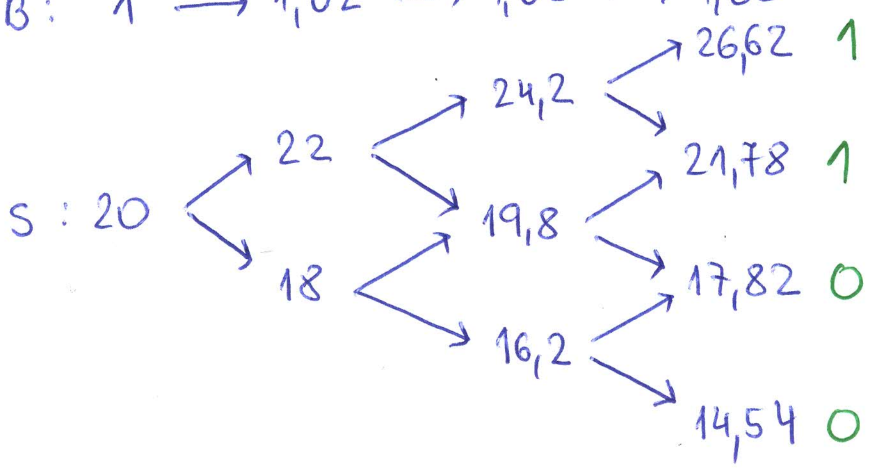
Imetnik ragljaste opcije plača njeno premijo v času 0, denarne tokove pa lahko prejme ob zapadlosti posamezne opcije ali pa (seštete) v trenutku T.

4 (c) Opcijska raglja je *nakupna*, če so vse opcije v portfelju nakupne. Privzemite, da imetnik prejme izplačila ob zapadlosti posamezne opcije. Določite premijo nakupne ragljaste opcije z zapadlostjo 2.

4 (d) Privzemite, da imetnik prejme seštevek izplačil šele ob zapadlosti ragljaste opcije. Določite premijo nakupne ragljaste opcije z zapadlostjo 2.

(a) Drevo dogodkov 2

$B: \ 1 \longrightarrow 1{,}02 \longrightarrow 1{,}02^2 \longrightarrow 1{,}02^3$



Do tveganja nevtralne prehodne verjetnosti

numerar = B

$q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{3}{5}$ (gor)

$1-q = \frac{2}{5}$ (dol)

Neodvisno od časa in stanja. 1

(b) Izplačila digitalne opcije so navedena ob drevesu v nalogi (a) (zeleno) 2

premija $= \frac{1}{1{,}02^3}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}\right) = \underline{\underline{0{,}6106 \text{ EUR}}}$ 2

[1] Raglja kot orodje se imenuje tudi nasadni ključ.

ⓒ Izplačilo ob trenutku t je $\max\{S_t - S_{t-1}, 0\}$
Premija plačana ob $t=0$, izplačila ob $t=1,2$ so
odvisna od poti cene delnice

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 24{,}2 \quad 2{,}2 \\
 & \substack{2\\22} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 19{,}8 \quad 0 \\
S:\ 20 \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & 19{,}8 \quad 1{,}8 \\
 & \substack{18\\0} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 16{,}2 \quad 0
\end{tikzcd}$$

Izplačila so napisana ob drevesu (zeleno) 2

$$\text{premija} = \frac{1}{1{,}02}\cdot 2\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{1{,}02^2}\left(2{,}2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1{,}8\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\right) =$$
$$= \underline{\underline{2{,}3529 \text{ EUR}}} \quad 2$$

ⓓ Izplačilo ob zapadlosti je vsota izplačil na posamezni poti v nalogi (c) (zeleno) 2

$\max\{S_1 - S_0, 0\} + \max\{S_2 - S_1, 0\}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 24{,}2 \quad 2+2{,}2 = 4{,}2 \\
 & 22 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 19{,}8 \quad 2+0 = 2 \\
S:\ 20 \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & 19{,}8 \quad 0+1{,}8 = 1{,}8 \\
 & 18 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 16{,}2 \quad 0+0 = 0
\end{tikzcd}$$

$$\text{premija} = \frac{1}{1{,}02^2}\left(4{,}2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} + 1{,}8\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\right) =$$
$$= \underline{\underline{2{,}3299 \text{ EUR}}} \quad 2$$

(premija je nižja kot v (c), ker nekatere zneske prejmemo kasneje)

2. naloga [15 točk]

Obravnavamo enoobdobni model finančnega trga s tremi vrednostnimi papirji. Prvi je netvegana brezkuponska obveznica z nominalno vrednostjo 10, dospetjem 1 in ceno 9 v času 0. Drugi in tretji instrumet sta tvegani delnici S in W. Njuni ceni danes znašata $S_0 = W_0 = 9$, izplačila v času 1 pa so podana z

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 12; & \omega = \omega_g \\ 10; & \omega = \omega_m \\ 8; & \omega = \omega_b \end{cases} \quad \text{in} \quad W_1(\omega) = \begin{cases} x; & \omega = \omega_g \\ 9; & \omega = \omega_m \\ y; & \omega = \omega_b \end{cases}$$

kjer sta x in y pozitivni realni števili.

3 (a) Določite pogoje za števili x in y, pod katerimi obravnavani trg *ni* poln.

6 (b) Naj bo $x = 14$ in $y = 8$. Določite do tveganja nevtralno verjetnost in dokažite, da trg ne dopušča arbitraže.

6 (c) Finančna institucija omogoča trgovanje z evropskimi nakupnimi opcijami na delnico W z zapadlostjo 1 in izvršilno ceno 10. Zanjo zahteva premijo v višini 0.5. Dokažite, da je s tem možna arbitraža. Pripravite recept za brezplačno kosilo.[2]

vektor cen $c = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ matrika izplačil $M = \begin{bmatrix} 10 & 12 & x \\ 10 & 10 & 9 \\ 10 & 8 & y \end{bmatrix}$

(a) Trg ni poln $\Leftrightarrow$ rang $M < 3$

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & x \\ 10 & 10 & 9 \\ 10 & 8 & y \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 10 & 12 & x \\ 0 & -2 & 9-x \\ 0 & -4 & y-x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 10 & 12 & x \\ 0 & -2 & 9-x \\ 0 & 0 & y-x-2(9-x) \end{bmatrix}$$

rang $M < 3 \Leftrightarrow y - x - 2(9-x) = 0$

$y - x - 18 + 2x = 0$

$\underline{\underline{x + y = 18}}$ 3

(b) Za numerar vzamemo obveznico

diskontirane cene $\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ diskontirana izplačila

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \\ 1 & 1 & \frac{9}{10} \\ 1 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{array} \end{array}$$

1

[2] Pripravite arbitražno strategijo in natančno opišite denarne tokove.

$$q_1+q_2+q_3=1$$
$$\frac{6}{5}q_1+q_2+\frac{4}{5}q_3=1 \quad /\cdot 5$$
$$\frac{7}{5}q_1+\frac{9}{10}q_2+\frac{4}{5}q_3=1 \quad /\cdot 10 \quad 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\6&5&4&5\\14&9&8&10\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&+1&+2&+1\\0&+5&+6&+4\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&0&+4&+1\end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}4q_3=1 \Rightarrow \underline{q_3=\frac{1}{4}}\\ q_2+2\cdot q_3=1 \Rightarrow q_2=1-2\cdot\frac{1}{4}=\underline{\frac{1}{2}=q_2}\\ q_1+q_2+q_3=1 \Rightarrow q_1=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\underline{\frac{1}{4}=q_1}\end{array}\right\}$$ 2

vsi $q_i>0$, zato po 1. osnovnem izreku trg ne dopušča arbitraže 1

ⓒ Opcija je pogojna terjatev $X_1=\max\{w_1-10,0\}$

izplačila $X_1=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}$ diskontirana izplačila $\tilde{X}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\0\\0\end{bmatrix}$

za ceno X_0 velja $\frac{X_0}{9}=E_Q(\tilde{X}_1)$

$$X_0=9\cdot E_Q(\tilde{X}_1)=9\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{10}=0{,}9>0{,}5 \quad 2$$

$\Rightarrow$ premija opcije je na trgu prenizka

$\Rightarrow$ kupiti moramo opcijo in prodati njen izvedbeni portfelj $\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}$

$$\begin{array}{l}10\alpha+12\beta+14\gamma=4\\10\alpha+10\beta+9\gamma=0\\10\alpha+8\beta+8\gamma=0\end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}10&12&14&4\\10&10&9&0\\10&8&8&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}5&6&7&2\\0&+2&+5&+4\\0&+4&+6&+4\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}5&6&7&2\\0&2&5&4\\0&0&+4&+4\end{array}\right]$$

$$4\gamma=4 \Rightarrow \gamma=1$$
$$2\beta+5\gamma=4 \Rightarrow 2\beta=4-5=-1 \Rightarrow \beta=-\frac{1}{2}$$
$$5\alpha+6\beta+7\gamma=2 \Rightarrow 5\alpha=2+3-7=-2$$
$$\Rightarrow \alpha=-\frac{2}{5} \quad 3$$

Strategija:

$t=0$: kupi opcijo
prodaj delnico W
kupi $\frac{1}{2}$ delnice S
kupi $\frac{2}{5}$ obveznice 1
$u_0=+0{,}4$

$t=1$: denarni tokovi se v vseh stanjih pokrajšajo

$u_1=0 \Rightarrow$ U arbitraža!

3. naloga [20 točk]

Vrednost delnice S danes znaša 6 USD, cena enote zlata pa je 10 USD. Privzemite, da bodo čez en mesec možne naslednje cene delnice in enote zlata

Stanje	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Delnica v USD	8	6	5	4
Enota zlata v USD	8	10	11	12

V nalogi zlato obravnavajte kot povsem finančno blago.

6 (a) Določite vektor cen stanj in dokažite, da trg ne dopušča arbitraže.

4 (b) V času 0 izdamo evropsko prodajno opcijo na enoto zlata z izvršilno ceno 11 USD in zapadlostjo 1 mesec ter pogojno terjatev Y, ki v času 1 izplača

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
Stanje	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Izplačilo v USD	5	2	0	0

parametre izbiraj od zadaj!

Določite ceni terjatev v času 0 in ugotovite, ali sta (vsaka posebej) na trgu dosegljivi.

INTERVAL CEN!

4 (c) Dokažite, da lahko s portfeljem delnice in zlata ustvarimo netvegan finančni instrument. Koliko znaša njegov netvegan donos?

6 (d) Privzemite, da so glede na naravno verjetnost P vsi izidi ω_i enako verjetni. Izračunajte kovarianco med enostavnim donosom delnice S in enostavnim donosom zlata. Ali sta donosa neodvisna?

Pomoč: Enostavni donos portfelja θ je slučajna spremenljivka $r_\theta = \frac{V_1(\theta)-V_0(\theta)}{V_0(\theta)}$.

Kovarianca med slučajnima spremenljivkama X in Y je $K(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$.

Podatki o modelu

$$c = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow S_0 \text{ (delnica)} \\ \leftarrow G_0 \text{ (zlato)} \end{matrix} \qquad M = \begin{array}{c} \begin{matrix} S_1 & G_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 10 \\ 5 & 11 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{matrix}$$

(a) vektor cen stanj je rešitev sistema $M^T\psi = c$ in pogojev pozitivnosti $\psi > 0$.

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 11 & 12 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & 4 \end{array}\right]$$

2

Izberemo ψ_3, ψ_4 za parametra in izrazimo

$$4\psi_2 + 6\psi_3 + 8\psi_4 = 4 \Rightarrow 4\psi_2 = 4 - 6\psi_3 - 8\psi_4$$

$$\underline{\psi_2 = 1 - \tfrac{3}{2}\psi_3 - 2\psi_4}$$

$$8\psi_1 + 6\psi_2 + 5\psi_3 + 4\psi_4 = 6 \Rightarrow 8\psi_1 = 6 - 6\psi_2 - 5\psi_3 - 4\psi_4 =$$

$$= 6 - 6 + 9\psi_3 + 12\psi_4 - 5\psi_3 - 4\psi_4 =$$

$$= 4\psi_3 + 8\psi_4$$

$$\underline{\psi_1 = \tfrac{1}{2}\psi_3 + \psi_4} \qquad 2$$

Pogoji pozitivnosti:

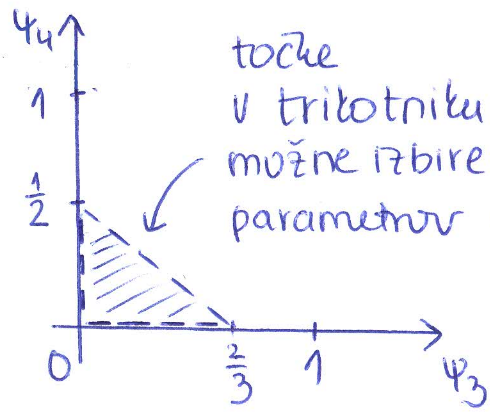
$\psi_3 > 0$, $\psi_4 > 0$

$\psi_1 > 0$ avtomatično

$\psi_2 > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{2}\psi_3 - 2\psi_4 > 0$

$$\tfrac{3}{2}\psi_3 + 2\psi_4 < 1$$

$$\underline{3\psi_3 + 4\psi_4 < 2}$$



točke v trikotniku so možne izbire parametrov ψ_3, ψ_4

Ker obstaja vektor cen stanj, je trg brez arbitraže 2
(1. osnovni izrek).

(6) X = opcija na zlato, $X_1 = \max\{11 - G_1, 0\} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\hat{\Pi}_0(X) = \langle X_1, \psi \rangle = 3 \cdot \psi_1 + \psi_2 =$$

$$= 3\left(\tfrac{1}{2}\psi_3 + \psi_4\right) + 1 - \tfrac{3}{2}\psi_2 - 2\psi_4 =$$

$$= 1 + \psi_4 \in \underline{\underline{\left(1, \tfrac{3}{2}\right)}} \Rightarrow \underline{\text{ni dosegljiva}}, \text{ ker cena ni enolična} \qquad 2$$

↑ min pri $\psi_4 = 0$
max pri $\psi_4 = \frac{1}{2}$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Pi}_0(Y) = \langle Y_1, \psi \rangle = 5\left(\tfrac{1}{2}\psi_3 + \psi_4\right) + 2\left(1 - \tfrac{3}{2}\psi_3 - 2\psi_4\right) =$$

$$= 2 - \tfrac{1}{2}\psi_3 + \psi_4 \in \underline{\underline{\left(\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{2}\right)}} \Rightarrow \underline{\text{ni dosegljiva}}$$

↑ min pri $\psi_3 = \frac{2}{3}$, $\psi_4 = 0$
max pri $\psi_3 = 0$, $\psi_4 = \frac{1}{2}$ 2

(c) Netvegana terjatev izplača enak znesek v vseh stanjih

npr. $z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Izračunamo $\hat{\pi}_0(z) = \langle z_1, \psi \rangle = \frac{1}{2}\psi_3 + \psi_4 + 1 - \frac{3}{2}\psi_3 - 2\psi_4 + \psi_3 + \psi_4 = 1$ 2

cena je enolična, zato je terjatev dosegljiva ($\Rightarrow \exists$ izvedbeni portfelj)

Ker je cena v času 0 enaka netveganemu izplačilu v času 1, je netvegan donos enak 0. 2

Netvegan portfelj je npr. ena delnica in ena enota zlata (vrstične vsote matrike M so vse enake 16)

(d) Donos delnice $r_S = \frac{S_1 - S_0}{S_0}$ izračunamo po stanjih

Donos zlata $r_G = \frac{G_1 - G_0}{G_0}$ izračunamo po stanjih

upoštevamo formulo $K(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Stanje	Donos r_S	Donos r_G	$r_S \cdot r_G$	Verjetnost P
ω_1	$\frac{8-6}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{8-10}{10} = -\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$
ω_2	$\frac{6-6}{6} = 0$	$\frac{10-10}{10} = 0$	0	$\frac{1}{4}$
ω_3	$\frac{5-6}{6} = -\frac{1}{6}$	$\frac{11-10}{10} = \frac{1}{10}$	$-\frac{1}{60}$	$\frac{1}{4}$
ω_4	$\frac{4-6}{6} = -\frac{1}{3}$	$\frac{12-10}{10} = \frac{1}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$

1

$E(r_S) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{24}$ 1

$E(r_G) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{40}$ 1

$E(r_S r_G) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{15} + 0 - \frac{1}{60} - \frac{1}{15}\right) = -\frac{9}{4 \cdot 60} = -\frac{3}{80}$

$K(r_S, r_G) = -\frac{3}{80} + \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{24} = \underline{\underline{-0{,}0365}}$ 2

Donosa r_S in r_G nista neodvisna, saj imata neodvisni spremenljivki vselej kovarianco enako 0. 1