



## FINANČNA MATEMATIKA 1

2. kolokvij

3. junij 2013

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 3, rešiti morate vse. Skupaj lahko zberete 50 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, na katerem so naloge.

Pazite na zadostno natančnost pri računanju. Vse odgovore utemeljite.  
Na voljo imate 120 minut. Veliko uspeha!

Naloga	a	b	c	d	Skupaj
1.					
2.					
3.					
Skupaj	•	•	•	•	

### **1. naloga** [15 točk]

Na delnico s ceno  $S_0 = 40$  EUR napišemo tri opcije z zapadlostjo  $T = 3$  in izvršilno ceno  $K = 38$  EUR. Privzemite, da trg lahko modelirate z s triobdobnim binomskim modelom s parametri  $u = 1.1$ ,  $d = 0.8$  in  $R = 5\%$ .

- (a) Opišite slučajne spremenljivke, ki sestavljajo vrednostni proces delnice glede na do tveganja nevtralno verjetnost.
- (b) Prva opcija je evropska nakupna opcija. Določite njeno premijo.

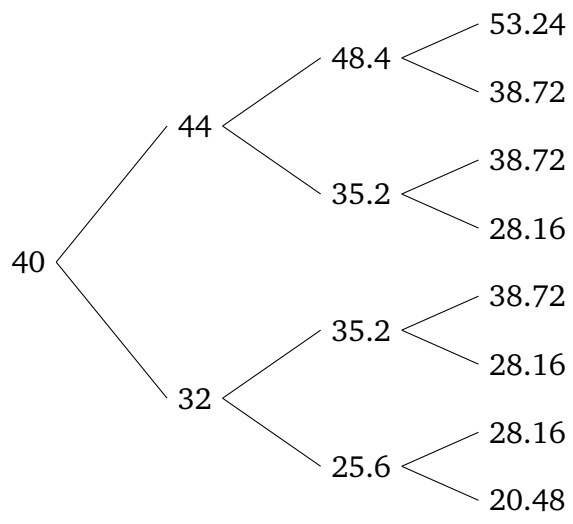
*Opcija z mejo (barrier option)* je finančni instrument, katerega izplačila so odvisna od tega, ali je cena osnovnega premoženja v času življenja opcije presegla dano mejo  $H$ .

- (c) *Down-and-out nakupna opcija (down-and-out call)* ob zapadlosti  $T$  imetniku daje pravico do nakupa osnovnega premoženja po izvršilni ceni  $K$  pod pogojem, da cena osnovnega premoženja v času življenja opcije ni padla pod mejo  $H$ . V nasprotnem primeru opcija konča z izplačilom 0.

Določite premijo down-and-out nakupne opcije z mejo  $H = 35$  EUR.

- (d) *Opcija z mejo in povračilom (rebate barrier option)* v primeru neugodnega gibanja cene delnice imetniku povrne del plačane premije v prvem trenutku, ko cena delnice pade pod mejo  $H$ .

Določite premijo down-and-out nakupne opcije z mejo  $H = 35$  EUR in 50% povračilom.



## **2. naloga** [15 točk]

Vrednostni papirji  $B$ ,  $S$  in  $W$  imajo danes cene  $B_0 = 9$ ,  $S_0 = 13$  in  $W_0 = 8$ , v času 1 pa možne vrednosti  $B_1 \equiv 12$  ter  $S_1(\omega_1) = 24$ ,  $S_1(\omega_2) = 16$ ,  $S_1(\omega_3) = 12$  in  $W_1(\omega_1) = 12$ ,  $W_1(\omega_2) = 11$ ,  $W_1(\omega_3) = 10$ .

- (a) Dokažite, da je trg poln in da na njem velja zakon ene cene.
- (b) Pokažite, da je na trgu možna arbitraža, in pripravite arbitražni portfelj.  
*Nasvet: Poskusite poiskati vektor cen stanj  $\psi$ . Arbitražni portfelj seveda ni en sam.*
- (c) Naj bo  $W_1(\omega_3) = 9$ . Pokažite, da na spremenjenem trgu ni več možna arbitraža.
- (d) *Nakupna opcija na razliko (spread call)* med cenama delnic  $S$  in  $W$  z izvršilno ceno  $K$  ob zapadlosti 1 izplača znesek  $S_1 - W_1 - K$  pod pogojem, da je ta pozitiven. Določite premijo opcije na razliko z izvršilno ceno  $K = 4$ .

### 3. naloga [20 točk]

Cena delnice danes znaša  $S_0$ , netvegana obrestna mera na bančnem računu pa je  $R > -1$ . Privzemite, da so v času 1 možne tri cene delnice (*trinomski model*), in sicer  $S_1(\omega_1) = S_0u$ ,  $S_1(\omega_2) = S_0m$  in  $S_1(\omega_3) = S_0d$ , kjer je  $0 < d < m < u$ .

- (a) Naj števila  $q_i = Q(\omega_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , določajo do tveganja nevtralnno verjetnost na  $\Omega$ . Dokažite, da lahko zapišemo

$$q_1 = \frac{1+R-d}{u-d} - \frac{m-d}{u-d}q_2$$

$$q_2 = \text{parameter}$$

$$q_3 = \frac{u-(1+R)}{u-d} - \frac{u-m}{u-d}q_2$$

- (b) Dokažite, da trinomski model ne dopušča arbitraže natanko tedaj, ko je  $d < 1 + R < u$ .
- (c) Naj bo  $S_0 = 100$ ,  $u = 1.1$ ,  $m = 1.05$ ,  $d = 0.95$  in  $R = 4\%$ . Dokažite, da evropska nakupna opcija na delnico  $S$  z izvršilno ceno  $K = 103$  in zapadlostjo  $T = 1$  ni dosegljiva v trinomskem modelu, ter določite interval njenih brezarbitražnih cen.
- (d) Opcijo iz naloge (c) vrednotite še z *binomskim modelom* s parametri  $S_0 = 100$ ,  $u = 1.1$ ,  $d = 0.95$  in  $R = 4\%$ . Ali dobljena premija leži na intervalu brezarbitražnih cen iz (c)?