1. naloga [15 točk]

Na delnico s ceno $S_0 = 40$ EUR napišemo tri opcije z zapadlostjo $T = 3$ in izvršilno ceno $K = 38$ EUR. Privzemite, da trg lahko modelirate z s triobdobnim binomskim modelom s parametri $u = 1.1$, $d = 0.8$ in $R = 5\%$.

3 (a) Opišite slučajne spremenljivke, ki sestavljajo vrednostni proces delnice glede na do tveganja nevtralno verjetnost.

4 (b) Prva opcija je evropska nakupna opcija. Določite njeno premijo.

Opcija z mejo (*barrier option*) je finančni instrument, katerega izplačila so odvisna od tega, ali je cena osnovnega premoženja v času življenja opcije presegla dano mejo H.

4 (c) *Down-and-out nakupna opcija* (*down-and-out call*) ob zapadlosti T imetniku daje pravico do nakupa osnovnega premoženja po izvršilni ceni K *pod pogojem*, da cena osnovnega premoženja v času življenja opcije ni padla pod mejo H. V nasprotnem primeru opcija konča z izplačilom 0.

Določite premijo down-and-out nakupne opcije z mejo $H = 35$ EUR.

4 (d) *Opcija z mejo in povračilom* (*rebate barrier option*) v primeru neugodnega gibanja cene delnice imetniku povrne del plačane premije v prvem trenutku, ko cena delnice pade pod mejo H.

Določite premijo down-and-out nakupne opcije z mejo $H = 35$ EUR in 50% povračilom.

(a) B = numerar

$$q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{1{,}05-0{,}8}{1{,}1-0{,}8} = \frac{5}{6} \quad 1$$

$$S_0 \sim \begin{pmatrix} 40 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S_2 \sim \begin{pmatrix} 48{,}4 & 35{,}2 & 25{,}6 \\ (\frac{5}{6})^2 & 2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} & (\frac{1}{6})^2 \end{pmatrix}$$

1 1

$$S_1 \sim \begin{pmatrix} 44 & 32 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad S_3 \sim \begin{pmatrix} 53{,}24 & 38{,}72 & 28{,}16 & 20{,}48 \\ (\frac{5}{6})^3 & 3(\frac{5}{6})^2\frac{1}{6} & 3\cdot\frac{5}{6}(\frac{1}{6})^2 & (\frac{1}{6})^3 \end{pmatrix}$$

(b) $X_3 = \max\{S_3 - K, 0\}$

$K = 38$

S_3	X_3	Q
53,24	15,24	$(\frac{5}{6})^3$
38,72	0,72	$3\cdot(\frac{5}{6})^2\cdot\frac{1}{6}$
28,16	0	*
20,48	0	*

2

$$C_0^E = \frac{1}{1{,}05^3}\left(15{,}24\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 0{,}72\cdot 3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\right) =$$

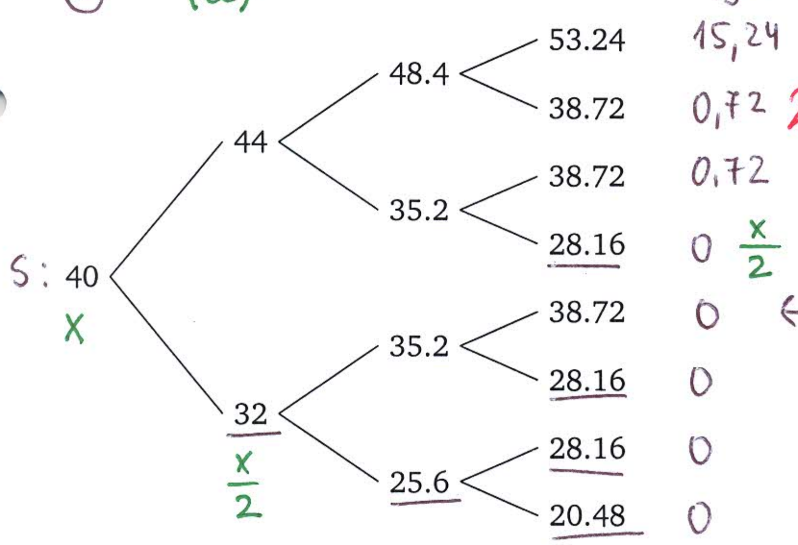
$$= \underline{\underline{7{,}8345 \text{ EUR}}} \quad 2$$

ⓒ (d)

$Y_3 = \max\{S_3 - K, 0\} \cdot 1_{\{\min\{S_1, S_2, S_3\} > H\}}$

$\downarrow$

izplačilo odvisno od poti cene delnice



← ker je opcija v času 1 propadla !

$B: 1 \longrightarrow 1{,}05 \longrightarrow 1{,}05^2 \longrightarrow 1{,}05^3$

$$C_0^B = \frac{1}{1{,}05^3} \cdot \left(15{,}24 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 0{,}72 \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}\right) = \underline{\underline{7{,}7625 \text{ EUR}}} \quad 2$$

ⓓ Označimo premijo z x in dodamo povračilo $\frac{x}{2}$ po prehodu meje H. 2

Veljati mora formula za vrednotenje

$$x = \frac{1}{1{,}05} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{1{,}05^3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{1{,}05^3}\left(15{,}24 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 0{,}72 \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}\right)}_{C_0^B \text{ iz naloge (c)}}$$

$$x\left(1 - \frac{1}{12 \cdot 1{,}05} - \frac{5}{1{,}05^3 \cdot 12 \cdot 36}\right) = C_0^B$$

$$x = \frac{7{,}7625}{1 - \frac{1}{12 \cdot 1{,}05} - \frac{5}{1{,}05^3 \cdot 12 \cdot 36}} = \underline{\underline{8{,}5243 \text{ EUR}}} \quad 2$$

2. naloga [15 točk]

Vrednostni papirji B, S in W imajo danes cene $B_0 = 9$, $S_0 = 13$ in $W_0 = 8$, v času 1 pa možne vrednosti $B_1 \equiv 12$ ter $S_1(\omega_1) = 24$, $S_1(\omega_2) = 16$, $S_1(\omega_3) = 12$ in $W_1(\omega_1) = 12$, $W_1(\omega_2) = 11$, $W_1(\omega_3) = 10$.

3 (a) Dokažite, da je trg poln in da na njem velja zakon ene cene.

6 (b) Pokažite, da je na trgu možna arbitraža, in pripravite arbitražni portfelj.

Nasvet: Poskusite poiskati vektor cen stanj ψ. Arbitražni portfelj seveda ni en sam.

3 (c) Naj bo $W_1(\omega_3) = 9$. Pokažite, da na spremenjenem trgu ni več možna arbitraža.

3 (d) *Nakupna opcija na razliko (spread call)* med cenama delnic S in W z izvršilno ceno K ob zapadlosti 1 izplača znesek $S_1 - W_1 - K$ pod pogojem, da je ta pozitiven. Določite premijo opcije na razliko z izvršilno ceno $K = 4$.

$$c = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 12 \\ 12 & 16 & 11 \\ 12 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

(a) Preverimo rang matrike M

$$\begin{bmatrix} 12 & 24 & 12 \\ 12 & 16 & 11 \\ 12 & 12 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & -12 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

rang $M = 3 = \#$ stanj v času 1 $\Rightarrow$ trg je poln 2

Ker so vrednostni papirji (stolpci) neodvisni, ima vsaka pogojna terjatev natanko en izvedbeni portfelj in zato natanko eno ceno. $\Rightarrow$ z.e.c. 1

(b) $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}$ $\qquad M^T \psi = c$: Gaussov algoritem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 12 & 12 & 9 \\ 24 & 16 & 12 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -12 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim$$ 2

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 12 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

$-4\psi_3 = -3 \qquad \psi_2 + \frac{6}{4} = 1 \qquad 4\psi_1 - 2 + 3 = 3$

$\psi_3 = \frac{3}{4} \qquad \psi_2 = -\frac{1}{2} < 0 \qquad \psi_1 = \frac{1}{2}$

Vektor ψ ni strogo pozitiven $\Rightarrow$ obstaja arbitraža 3 vektor ψ nam pove, da je cena terjatve $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ enaka $-\frac{1}{2}$.

Njen izvedbeni portfelj $\theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ (obstaja, ker trg poln) arbitraži.

$M\theta = X$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 24 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 11 & 1 \\ 12 & 12 & 10 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & 1 \\ 0 & -12 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

$-\frac{1}{2}\gamma = -\frac{3}{2}$ $\quad$ $8\beta + 3 = -1$ $\quad$ $\alpha - 1 + 3 = 0$

$\underline{\gamma = 3}$ $\quad$ $\underline{\beta = -\frac{1}{2}}$ $\quad$ $\underline{\alpha = -2}$ $\quad$ 3

(c) $c = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\quad M = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 12 \\ 12 & 16 & 11 \\ 12 & 12 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad$ Iščemo vektor cen stanj ψ

$M^T\psi = c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 12 & 12 & 9 \\ 24 & 16 & 12 & 13 \\ 12 & 11 & 9 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -12 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 12 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -3 \end{array}\right]$$

$-12\psi_3 = -3$ $\quad$ $\psi_2 + \frac{3}{4} = 1$ $\quad$ $4\psi_1 + 1 + 1 = 3$

$\psi_3 = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\psi_2 = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\psi_1 = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\psi_i > 0 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{t.b.a.}}}$ $\quad$ 3

(d) $X = \max\{S_1 - W_1 - K, 0\}$

$$X = \begin{bmatrix} \max\{24 - 12 - 4, 0\} \\ \max\{16 - 11 - 4, 0\} \\ \max\{12 - 9 - 4, 0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 1$$

$\Pi_0(X) = X \cdot \psi = 8 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$ $\quad$ 2

3. naloga [20 točk]

Cena delnice danes znaša S_0, netvegana obrestna mera na bančnem računu pa je $R > -1$. Privzemite, da so v času 1 možne tri cene delnice (*trinomski model*), in sicer $S_1(\omega_1) = S_0 u$, $S_1(\omega_2) = S_0 m$ in $S_1(\omega_3) = S_0 d$, kjer je $0 < d < m < u$.

6 (a) Naj števila $q_i = Q(\omega_i)$, $i = 1, 2, 3$, določajo do tveganja nevtralno verjetnost na Ω. Dokažite, da lahko zapišemo

$$q_1 = \tfrac{1+R-d}{u-d} - \tfrac{m-d}{u-d} q_2$$
$$q_2 = \text{parameter}$$
$$q_3 = \tfrac{u-(1+R)}{u-d} - \tfrac{u-m}{u-d} q_2$$

6 (b) Dokažite, da trinomski model ne dopušča arbitraže natanko tedaj, ko je $d < 1+R < u$.

4 (c) Naj bo $S_0 = 100$, $u = 1.1$, $m = 1.05$, $d = 0.95$ in $R = 4\%$. Dokažite, da evropska nakupna opcija na delnico S z izvršilno ceno $K = 103$ in zapadlostjo $T = 1$ ni dosegljiva v trinomskem modelu, ter določite interval njenih brezarbitražnih cen.

4 (d) Opcijo iz naloge (c) vrednotite še z *binomskim modelom* s parametri $S_0 = 100$, $u = 1.1$, $d = 0.95$ in $R = 4\%$. Ali dobljena premija leži na intevalu brezarbitražnih cen iz (c)?

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ S_0 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1+R & S_0 u \\ 1+R & S_0 m \\ 1+R & S_0 d \end{bmatrix}$$

(a)
$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ S_0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & S_0 u/1+R \\ 1 & S_0 m/1+R \\ 1 & S_0 d/1+R \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{matrix}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$
$$\frac{S_0 u}{1+R} q_1 + \frac{S_0 m}{1+R} q_2 + \frac{S_0 d}{1+R} q_3 = S_0 \quad 2$$
$$\downarrow$$
$$u q_1 + m q_2 + d q_3 = 1+R$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u & m & d & 1+R \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-u & d-u & 1+R-u \end{array}\right]$$

$$(m-u) q_2 + (d-u) q_3 = 1+R-u \qquad q_2 \text{ parameter}$$

$$(d-u) q_3 = 1+R-u - (m-u) q_2$$

$$q_3 = \frac{1+R-u}{d-u} - \frac{m-u}{d-u} q_2 = \frac{u-(1+R)}{u-d} - \frac{u-m}{u-d} q_2 \quad \checkmark \; 2$$

$$q_1 = 1 - q_2 - q_3 = 1 - q_2 - \frac{u-(1+R)}{u-d} + \frac{u-m}{u-d} q_2 =$$

$$= \frac{u-d-u+1+R}{u-d} - q_2 \frac{u-d-u+m}{u-d} = \frac{1+R-d}{u-d} - \frac{m-d}{u-d} q_2 \quad \checkmark \; 2$$

(b) Potrebujemo pozitivnost q_i : $q_2 > 0$

$$q_1 > 0 \iff \frac{1+R-d}{u-d} - \frac{m-d}{u-d} q_2 > 0 \quad / \cdot (u-d)$$

$$1+R-d-(m-d)q_2 > 0$$

$$1+R-d > (m-d)q_2$$

$$q_2 < \frac{1+R-d}{m-d} \qquad 1$$

$$q_3 > 0 \iff \frac{u-(1+R)}{u-d} - \frac{u-m}{u-d} q_2 > 0 \quad / \cdot (u-d)$$

$$u-(1+R)-(u-m)q_2 > 0$$

$$u-(1+R) > (u-m)q_2$$

$$q_2 < \frac{u-(1+R)}{u-m} \qquad 1$$

$$q_i > 0 \iff 0 < q_2 < \min\left\{ \frac{1+R-d}{m-d}, \frac{u-(1+R)}{u-m} \right\} \qquad 1$$

To je možno natanko tedaj, ko je $\min\left\{ \frac{1+R-d}{m-d}, \frac{u-(1+R)}{u-m} \right\} > 0$ 1

Minimum dveh števil je pozitiven, če sta obe števili pozitivni

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1+R-d}{m-d} > 0 \iff 1+R-d > 0 \iff 1+R > d \\ &\frac{u-(1+R)}{u-m} > 0 \iff u-(1+R) > 0 \iff u > 1+R \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{d < 1+R < u}}$$

2

(c) $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1{,}04 & 110 \\ 1{,}04 & 105 \\ 1{,}04 & 95 \end{bmatrix}$

$$q_1 = \frac{1{,}04-0{,}95}{1{,}1-0{,}95} - \frac{1{,}05-0{,}95}{1{,}1-0{,}95} q_2 = \frac{9}{15} - \frac{10}{15} q_2 = \underline{\frac{3}{5} - \frac{2}{3} q_2}$$

$$q_3 = \frac{1{,}1-1{,}04}{1{,}1-0{,}95} - \frac{1{,}1-1{,}05}{1{,}1-0{,}95} q_2 = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \underline{\frac{2}{5} - \frac{1}{3} q_1}$$

2

$$0 < q_2 < \min\left\{ \frac{1{,}04-0{,}95}{1{,}05-0{,}95}, \frac{1{,}1-1{,}04}{1{,}1-1{,}05} \right\} = \min\left\{ \frac{9}{10}, \frac{6}{5} \right\} = \underline{\frac{9}{10}}$$

Opcija $X = \max\{S_1 - K, 0\} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\tilde{X} = \begin{bmatrix} 7/1{,}04 \\ 2/1{,}04 \\ 0 \end{bmatrix}$

$K = 103$

$$\Pi_0^Q(X) = \frac{7}{1{,}04} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3} q_2\right) + \frac{2}{1{,}04} q_2 =$$

$$= \frac{1}{1{,}04}\left(\frac{21}{5} - \frac{14}{3} q_2 + 2q_2\right) = \frac{1}{1{,}04}\left(\frac{21}{5} - \frac{8}{3} q_2\right)$$

najmanj: $q_2 = \frac{9}{10}$

največ: $q_2 = 0$

$\Pi_0^Q(X) \in (1'7308,\ 4'0385)$ 2

Interval cen $\Rightarrow$ opcija ni dosegljiva.

(d) Binomski model

$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $M = \begin{bmatrix} 1{,}04 & 110 \\ 1{,}04 & 95 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $X = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

$q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{3}{5}$ 2

$\Pi_0^Q(X) = \frac{1}{1{,}04} \cdot 7 \cdot \frac{3}{5} = 4{,}0385$ $\qquad$ Ni na intervalu. 2

Binomski model je "poseben primer" trinomskega, če vzamemo $q_2 = 0$, kar pa ni dopustno.