



FINANČNA MATEMATIKA 1

2. kolokvij

31. maj 2010

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 3, rešiti morate vse. Skupaj lahko zberete 50 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, na katerem so naloge.

Vse odgovore utemeljite. Na voljo imate 110 minut. Veliko uspeha!

Naloga	a	b	c	d	e	Skupaj
1.					•	
2.						
3.					•	
Skupaj	•	•	•	•	•	

1. naloga [15 točk]

Privzemite, da prihodnje gibanje cene delnice S lahko opišemo z troobdobnim binomskim modelom s parametroma $u = 1.1$ in $d = 0.95$. Cena delnice v času 0 je $S_0 = 100$. Netvegana obrestna mera na bančnem računu je $R = 5\%$ za eno obdobje in se s časom ne spreminja.

- (a) Izračunajte do prihodnosti nevtralne verjetnosti vseh končnih stanj v opisanem modelu.
- (b) Na delnico v času 0 napišemo evropsko prodajno opcijo z izročitveno ceno $K = 105$ in zapadlostjo 3. Določite njeno premijo v času 0.
- (c) *Povratne opcije (lookback options)* so opcije, katerih izplačilo je odvisno od ekstremne cene delnice v danem časovnem obdobju.

Povratna prodajna opcija (lookback put) z zapadlostjo T je finančni instrument X evropskega tipa, ki v trenutku T svojemu imetniku ponuja izplačilo v višini razlike med najvišjo in končno ceno delnice:

$$X_T = \max_{0 \leq i \leq T} \{S_i\} - S_T.$$

Določite ceno povratne prodajne opcije z zapadlostjo 2.

- (d) Na delnico S napišemo še evropsko nakupno opcijo z zapadlostjo 1. V času 0 je njena premija 12. Izračunajte njeno izročitveno ceno. Pojasnite, zakaj je rešitev ena sama.

2. naloga [15 točk]

Naj bo trg popoln in naj S_t označuje ceno delnice S v trenutku t . Instrument X z izvršilno ceno $K \geq 0$ napisan na delnico S je izvedeni finančni instrument evropskega tipa, ki ob zapadlosti T svojemu imetniku ponuja izplačilo $\min\{S_T, K\}$. Instrument Y , prav tako z izvršilno ceno $K \geq 0$ in napisan na delnico S , pa je izvedeni finančni instrument evropskega tipa, ki ob zapadlosti T svojemu imetniku ponuja izplačilo $\max\{S_T, K\}$.

- (a) Dokažite, da je možno izplačila instrumenta X ob zapadlosti zapisati kot izplačilo portfelja, ki sestoji iz delnic S in klasičnih evropskih nakupnih opcij, napisanih na delnico S . Natančno opredelite portfelj in opcije.

Opomba: Če nalogo rešite grafično, rezultat še računsko dokažite.

- (b) Dokažite, da je možno izplačila instrumenta Y ob zapadlosti zapisati kot izplačilo portfelja, ki sestoji iz delnic S in klasičnih evropskih prodajnih opcij, napisanih na delnico S . Natančno opredelite portfelj in opcije.

- (c) Naj bo c_t^X cena instrumenta X v času $t \leq T$. Določite brezarbitražne meje za ceno c_t^X .

- (d) Naj bo še c_t^Y cena instrumenta Y v času $t \leq T$. Dokažite, da za c_t^X in c_t^Y velja naslednja pariteta

$$c_t^X + c_t^Y = S_t + K \cdot D(t, T),$$

kjer je $D(t, T)$ diskontni faktor za obdobje $[t, T]$.

- (e) Denimo, da na trgu velja $c_t^Y < c_t^X$. Skonstruirajte arbitražo.

3. naloga [20 točk]

V enoobdobnem modelu trga z dvema vrednostnima papirjema so v času $t = 1$ možna tri stanja ω_g , ω_m in ω_b . Prvi papir je *tvegana* brezakuponska obveznica B z nominalno vrednostjo 100 in ceno 75. Ta obveznica v času 1 v stanjih ω_g in ω_m izplača svojo nominalno vrednost, v stanju ω_b pa njen izdajatelj propade in ne izplača ničesar. Drugi vrednostni papir je delnica S , katere vrednost v času 1 je

	ω_g	ω_m	ω_b
S_1	54	48	42

njena cena v času 0 pa je 51.

- (a) Dokažite, da trg ni poln, in določite množico dosegljivih pogojnih terjatev.
- (b) Določite vse krepko pozitivne razširitve cenovnega funkcionala.
- (c) Finančnik želi na obravnavanem trgu ponuditi instrument A z izplačili

$$A(\omega_g) = 10, \quad A(\omega_m) = x, \quad A(\omega_b) = 14$$

in začetno ceno y . Dokažite, da obstaja natanko en $x \in \mathbb{R}$, pri katerem je instrument A dosegljiv na trgu (B, S) . Pri tem x določite izvedbeni portfelj pogojne terjatve A in njeno ceno y .

- (d) Naj bo $x = 6$. Določite množico brezarbitražnih cen za terjatev A .