2. kolokvij: 31. maj 2010

1. naloga

(a) **[3 točke]**

Ker računamo do prihodnosti nevtralno verjetnost Q, za numerar izberemo bančni račun. Prehodno verjetnost izračunamo po formuli $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{2}{3}$.

Končna stanja in pripadajoče verjetnosti so prikazane v tabeli:

Stanje	Cena delnice	Verjetnost Q
u^3	$S_0u^3 = 133.1$	$q^3 = \frac{8}{27}$
u^2d	$S_0u^2d = 114.95$	$3q^2(1-q) = \frac{4}{9}$
ud^2	$S_0ud^2 = 99.275$	$3q(1-q)^2 = \frac{2}{9}$
d^3	$S_0d^3 = 85.7375$	$(1-q)^3 = \frac{1}{27}$

(b) **[4 točke]**

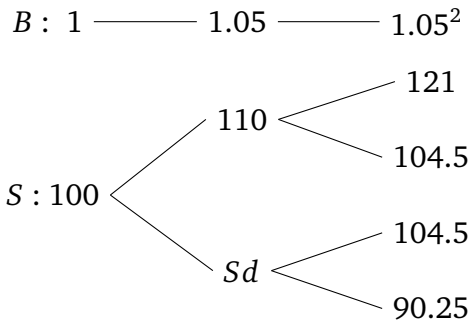
Za vrednotenje evropske prodajne opcije so pomembna le končna stanja in pripadajoča izplačila $Y = \max\{K - S_3, 0\}$:

Stanje	Cena delnice S_3	Izplačilo Y	Verjetnost Q
u^3	133.1	0	$\frac{8}{27}$
u^2d	114.95	0	$\frac{4}{9}$
ud^2	99.275	5.725	$\frac{2}{9}$
d^3	85.7375	19.2625	$\frac{1}{27}$

Numerar je v času 3 vreden 1.05^3, v času 0 pa 1, zato na osnovi do prihodnosti nevtralne verjetnosti dobimo $c_X = \mathrm{E}_Q(\frac{Y}{1.05^3}) = \frac{1}{1.05^3}(5.725 \cdot \frac{2}{9} + 19.2625 \cdot \frac{1}{27}) = 1.7153$.

(c) **[4 točke]**

Izplačila ob zapadlosti so odvisna od celotne poti cene delnice na intervalu $[0, 2]$. Narišemo polno drevo.

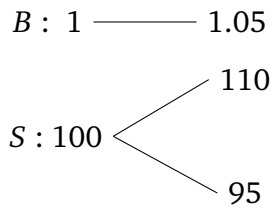


Na vsaki poti od časa 0 do časa 2 moramo poiskati najvišjo doseženo ceno delnice in izračunati izplačilo $X = \max_{0 \le i \le 2}\{S_i\} - S_2$.

Stanje	Cena delnice S_2	$\max\limits_{0\le i\le 2}\{S_i\}$	Izplačilo X	Verjetnost Q
uu	121	121	0	$(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$
ud	104.5	110	5.5	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
du	104.5	104.5	0	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
dd	90.25	100	9.75	$(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$

Izračunamo $c_X = \frac{1}{1.05^2}(5.5\cdot\frac{2}{9} + 9.75\cdot\frac{1}{9}) = 2.0912$.

(d) **[4 točke]**



Obravnavamo enoobdobni model in opcijo z izplačili $Z = \max\{S_1 - K, 0\}$ ter premijo $c_Z = 12$. Obravnavamo 3 možnosti:

- $K > 110$

Potem je $Z(u) = Z(d) = 0$ in bi moralo veljati $c_Z = 0$, kar ni res.

- $95 < K \le 110$

Potem je $Z(u) = 110 - K$ in $Z(d) = 0$ in bi moralo veljati $c_Z = \frac{1}{1.05}\cdot(110-K)\cdot\frac{2}{3}$, kar ima rešitev $K = 91.1$, ki pa ne ustreza danemu pogoju.

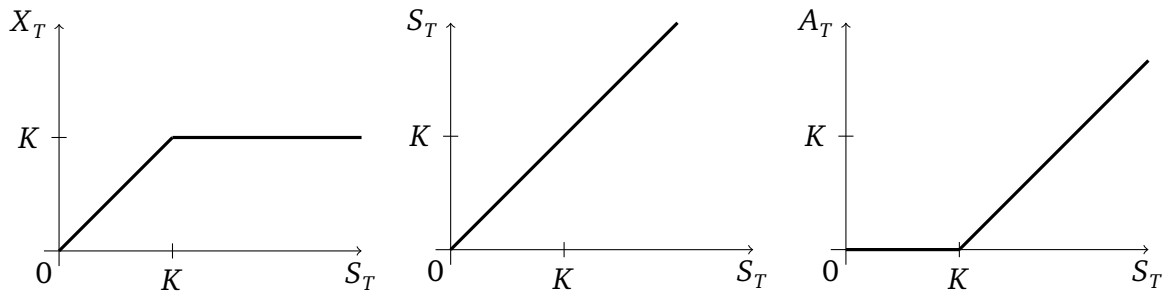
- $K \le 95$

Potem je $Z(u) = 110-K$ in $Z(d) = 95-K$. Iz enačbe $c_Z = \frac{1}{1.05}\left((110-K)\cdot\frac{2}{3} + (95-K)\cdot\frac{1}{3}\right)$ dobimo $K = 92.4$. Rešitev ustreza postavljenemu pogoju. To je edina možna izvršilna cena.

2. naloga

(a) **[3 točke]**

Narišemo izplačila instrumenta $X_T = \min\{S_T, K\}$, delnice S_T in evropske nakupne opcije $A_T = \max\{S_T - K, 0\}$ z zapadlostjo T, izvršilno ceno K, napisano na delnico S.

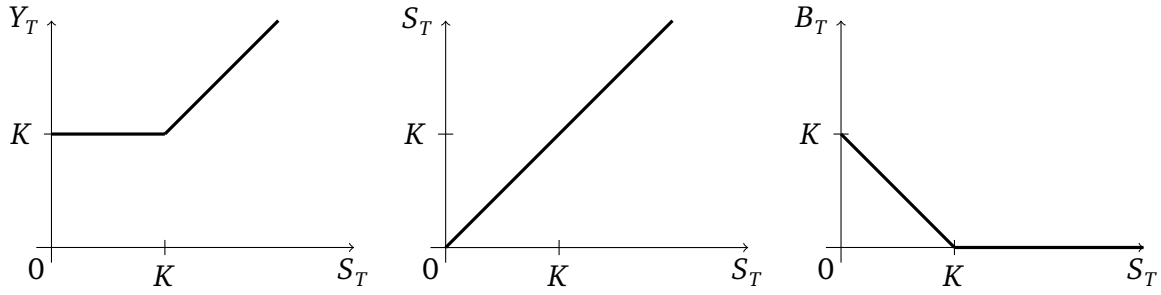


Opazimo, da je instrument X ekvivalenten portfelju iz ene delnice in kratke pozicije v obravnavani opciji.

Dokaz: $S_T - \max\{S_T - K, 0\} = -(-S_T + \max\{S_T - K, 0\}) = -\max\{-K, -S_T\} = \min\{K, S_T\}$.

(b) **[3 točke]**

Narišemo izplačila instrumenta $Y_T = \max\{S_T, K\}$, delnice S_T in evropske prodajne opcije $B_T = \max\{K - S_T, 0\}$ z zapadlostjo T, izvršilno ceno K, napisano na delnico S.



Opazimo, da je instrument Y ekvivalenten portfelju iz ene delnice in ene obravnavane opcije.

Dokaz: $S_T + \max\{K - S_T, 0\} = \max\{K, S_T\}$.

(c) **[3 točke]**

Ker so izplačila instrumenta X enaka izplačilom portfelja iz ene delnice S in (-1) evropske nakupne opcije na S z zapadlostjo T in izvršilno ceno K, mora ista zveza veljati tudi za cene:

$$c_t^X = S_t - c_t^E,$$

kjer je c_t^E cena opcije. Zanjo poznamo brezarbitražne meje

$$\max\{S_t - KD(t,T), 0\} \leq c_t^E \leq S_t.$$

Pomnožimo jih z (-1) ter prištejemo S_t in dobimo

$$S_t - S_t \leq c_t^X \leq S_t - \max\{S_t - KD(t,T), 0\},$$

kar poenostavimo v

$$0 \leq c_t^X \leq \min\{KD(t,T), S_t\}.$$

(d) **[3 točke]**

Sestavimo portfelj U iz enega instrumenta X in enega instrumenta Y.

Za njegovo vrednost velja

$U_t = c_t^X + c_t^Y$ in $U_T = \min\{K, S_T\} + \max\{K, S_T\} = K + S_T$.

Sestavimo še portfelj V iz ene delnice S in investicije $KD(t,T)$ do časa T. Velja

$V_t = S_t + KD(t,T)$ in $V_T = S_T + K$.

Ker je $U_T = V_T$, drugih izplačil pa ni, mora veljati $U_t = V_t$, torej $c_t^X + c_t^Y = S_t + KD(t,T)$.

Drugi način reševanja: Upoštevamo portfelja iz (a) in (b) in zapišemo

$c_t^X + c_t^Y = (S_t - c_t^E) + (S_t + p_t^E) = 2S_t + p_t^E - c_t^E$,

kjer je p_t^E cena evropske prodajne opcije na S z zapadlostjo T in izvršilno ceno K.

Iz paritete za klasično evropsko nakupno in prodajno opcijo pa vemo, da je

$p_t^E - c_t^E = KD(t,T) - S_t$, zato dobimo $c_t^X + c_t^Y = 2S_t + KD(t,T) - S_t = S_t + KD(t,T)$.

(e) **[3 točke]**

Upoštevamo, da je $\max\{S_T, K\} \geq \min\{S_T, K\}$. Sestavimo strategijo U:

čas t: kupi instrument Y,
prodaj instrument X.

$$U_t = c_t^X - c_t^Y > 0$$

čas T: unovči instrument Y,
izplačaj instrument X.

$$U_T = \max\{S_T, K\} - \min\{S_T, K\} \geq 0$$

U je arbitražna strategija.

3. naloga

(a) **[5 točk]**

Model ima 3 možna stanja v času 1 in dva vrednostna papirja, ki ju predstavimo z vektorjem cen $c = \begin{bmatrix} 75 \\ 51 \end{bmatrix}$ in matriko izplačil $M = \begin{bmatrix} 100 & 54 \\ 100 & 48 \\ 0 & 42 \end{bmatrix}$.

Ker je rang $M = 2$ manjši od števila možnih stanj, trg ni poln.

Množica dosegljivih pogojnih terjatev je $\mathscr{M} = \mathscr{L}\left\{\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 54 \\ 48 \\ 42 \end{bmatrix}\right\} = \mathscr{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}$.

To je ravnina v $\mathbb{R}^3$, katere enačbo poiščemo s pomočjo normale

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Enačba ravnine je $7x - 7y - z = 0$ oziroma $z = 7(x - y)$.

Dobimo $\mathscr{M} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 7(x-y) \end{bmatrix};\ x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) **[5 točk]**

Poiščemo vektor cen stanj ψ, za katerega je $M^T\psi = c$. Komponente $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ dobimo iz sistema

$$\begin{aligned} 100\psi_1 + 100\psi_2 &= 75 \\ 54\psi_1 + 48\psi_2 + 42\psi_3 &= 51 \\ \psi_1, \psi_2, \psi_3 &> 0 \end{aligned}$$

Izberemo ψ_3 za parameter in izrazimo $\psi_1 = \frac{5}{2} - 7\psi_3$ in $\psi_2 = 7\psi_3 - \frac{7}{4}$.

Stroga pozitivnost vseh komponent določi omejitev $\frac{1}{4} < \psi_3 < \frac{5}{14}$ za parameter ψ_3.

Množica vseh krepko pozitivnih razširitev cenovnih funkcionalov je določena z družino vektorjev cen stanj

$$\Psi = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - 7\psi_3 \\ 7\psi_3 - \frac{7}{4} \\ \psi_3 \end{bmatrix} ; \frac{1}{4} < \psi_3 < \frac{5}{14} \right\}.$$

(c) **[5 točk]**

Pogojna terjatev $A = \begin{bmatrix} 10 \\ x \\ 14 \end{bmatrix}$ je dosegljiva natanko tedaj, ko je $14 = 7(10 - x)$, torej pri $x = 8$. Tedaj je njen izvedbeni portfelj vektor $\phi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, za katerega je $M\phi = A$.

Iz sistema enačb (ena je linearno odvisna in zato odveč)

$$\begin{aligned} 100\alpha + 54\beta &= 10 \\ 100\alpha + 48\beta &= 8 \\ 42\beta &= 14 \end{aligned}$$

dobimo rešitvi $\alpha = -\frac{2}{25}$ in $\beta = \frac{1}{3}$. Izvedbeni portelj sestavlja kratka pozicija v $-\frac{1}{125}$ obveznicah in dolga pozicija v $\frac{1}{3}$ delnice.

Cena terjatve A je cena izvedbenega portfelja $y = -\frac{1}{125} \cdot 75 + \frac{1}{3} \cdot 51 = 11$.

(d) **[5 točk]**

Terjatev $A = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$ ni dosegljiva. Za vrednotenje uporabimo razširitve cenovnega funkcionala oziroma vektorje cen stanj.

Dobimo $\hat{\pi}_0(A) = \left\langle \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - 7\psi_3 \\ 7\psi_3 - \frac{7}{4} \\ \psi_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{29}{2} - 14\psi_3$, kjer je $\frac{1}{4} < \psi_3 < \frac{5}{14}$.

Brezarbitražne cene sestavljajo interval $(\frac{29}{2} - 14 \cdot \frac{5}{14}, \frac{29}{2} - 14 \cdot \frac{1}{4}) = (\frac{19}{2}, 11)$.