Poglavje VI

Ameriške pogojne terjatve

1 Optimalen čas ustavljanja

V tem razdelku bomo formalizirali pravilo za končanje igre oziroma za izstop iz ponavljajoče se igre. Za nas je primer takega izstopa izvršitev ameriške opcije.

Na množici stanj ekonomije Ω imamo verjetnost P in informacijsko strukturo $\mathcal{F} : \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subseteq \mathcal{F}_T$. Slučajni proces $(V_t)_{t=0}^T$ je prilagojen $\mathcal{F}$. V vsakem času t se lahko odločimo in glede na informacijo, ki jo imamo v tem času, izstopimo in dobimo vrednost V_t ali pa nadaljujemo.

Pravilo o ustavljanja nam v času t pove, ali končati ali ne. Formalno je **čas ustavljanja** ali **pravilo ustavljanja** (angl. *stopping time, stopping rule*) glede na $\mathcal{F}_t$ taka slučanja spremenljivka

$$\tau : \Omega \to \{0, 1, \ldots, T\},$$

da je

$$[\tau = t] \in \mathcal{F}_t$$

za vse $t = 0, 1, \ldots, T$.

Zgled 1.1 a) Naj bo $B \subseteq \mathbb{R}$ podmnožica. Potem je

$$\tau_B^{in}(\omega) = \begin{cases} \min\{t, V_t(\omega) \in B\} & , \quad \text{če}\{t; V_t(\omega) \in B\} \neq \phi \\ T & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

čas ustavljanja, ki ga imenujemo **čas prvega vstopa** V_t v B. τ_B^{in} je čas ustavljanja, saj za $t < T$ velja

$$[\tau_B^{in} = t] = [V_0 \in B^C] \bigcap \cdots \bigcap [V_{t-1} \in B^C] \bigcap [V_t \in B].$$

Ker je $(V_t)_{t=0}^T$ prilagojen, je $[V_S \in B]$ in $[V_S \notin B] \in \mathcal{F}_S$ za vse S. Torej je tudi $[\tau_B^{in} = t] \in \mathcal{F}_t$. Za $t = T$ pa je $[\tau_B^{in} = T] = [V_0 \in B^C] \bigcap \cdots \bigcap [V_{T-1} \in B^C] \in \mathcal{F}_{T-1} \subset \mathcal{F}_T$

b) Podobno definiramo **čas prvega izstopa**

$$\tau_B^{out}(\omega) = \begin{cases} \min\{t, V_t(\omega) \notin B\} & , \quad \text{če}\{t; V_t(\omega) \notin B\} \neq \phi, \\ T & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Ker je $\tau_B^{out} = \tau_{B^C}^{in}$, je τ_B^{out} tudi čas ustavljanja.

c) Če $(S_t)_{t=0}^T$ predstavlja cenovni proces neke delnice, potem

$$\tau^d(\omega) = \begin{cases} \min\{t, S_t(\omega) \geq 2S_0\} & , \quad \text{če}\{t; S_t(\omega) \geq 2S_0\} \neq \phi \\ T & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

opiše **čas prve podvojitve vrednosti** delnice. Ker je $\tau^d(\omega) = \tau_{[2S_0,\infty)}^{in}$, je τ^d čas ustavljanja.

d) Za cenovni proces delnice definiramo tudi

$$\tau^f(\omega) = \begin{cases} \min\{t, S_t(\omega) < S_{t-1}(\omega)\} & , \quad \text{če}\{t; S_t(\omega) < S_{t-1}(\omega)\} \neq \phi \\ T & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

τ_f opiše **čas prvega padca vrednosti** delnice. Je čas ustavljanja, saj je τ^f enak času prvega vstopa $\tau_{(-\infty,1)}^{in}$ za slučajni proces $(\frac{S_t(\omega)}{S_{t-1}(\omega)})_{t=0}^T$. Pri tem je $S_{-1}(\omega) = 1$ za vse $\omega \in \Omega$. □

Za poljubne s, t, za katere je $0 \leq s \leq t \leq T$, označimo

$$\mathcal{S}_{s,t} = \{\tau;\ \tau \text{ čas ustavljanja in } s \leq \tau(\omega) \leq t \text{ za vse } \omega \in \Omega\}.$$

$\mathcal{S}_{0,T}$ je množica vseh časov ustavljanja.

Trditev 1.2 *Slučajna spremenljivka $\tau : \Omega \to \{0, 1, \ldots, T\}$ je čas ustavljanja natanko tedaj, ko je $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ za vse t.*

Če sta τ_1 in τ_2 iz $\mathcal{S}_{s,t}$, potem so tudi $\tau_m = \min\{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_M = \max\{\tau_1, \tau_2\}$ in $\tau_1 + \tau_2$ iz množice $\mathcal{S}_{s,t}$.

Dokaz Ker je $[\tau \leq t] = [\tau = 0] \bigcup \cdots \bigcup [\tau = t]$, z indukcijo dokažemo ekvivalentnost trditev $[\tau = t] \in \mathcal{F}_t$ za vse t in $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ za vse t. Ker je

$$[\tau_m \leq t] = [\tau_1 \leq t] \bigcup [\tau_2 \leq t] \in \mathcal{F}_t$$

in

$$[\tau_M \le t] = [\tau_1 \le t] \bigcap [\tau_2 \le t] \in \mathcal{F}_t,$$

sta tudi τ_m in τ_M iz $\mathcal{S}_{s,t}$.

Iz zveze

$$[\tau_1 + \tau_2 = t] = \bigcup_{u=0}^{t} ([\tau_1 = u] \bigcap [\tau_2 = t - u])$$

sledi še $\tau_1 + \tau_2 \in \mathcal{S}_{s,t}$. ■

Za dana slučajni proces $(V_t)_{t=0}^T$ in čas ustavljanja τ definiramo

$$V_t^\tau(\omega) = \begin{cases} V_t(\omega) & , \text{ če je } t \le \tau(\omega) \\ V_{\tau(\omega)}(\omega) & , \text{ če je } t \ge \tau(\omega) \end{cases}$$

Slučajni proces $(V_t)_{t=0}^T$ imenujemo **ustavljeni proces** za $(V_t)_{t=0}^T$ glede na τ. Velja

$$V_t^\tau = \chi_{[\tau \ge t]} V_t + \sum_{s=0}^{t-1} \chi_{[\tau = s]} V_s \tag{VI.1}$$

Lema 1.3 *Če je $(V_t)_{t=0}^T$ prilagojen, je tudi ustavljeni proces $(V_t^\tau)^T$ prilagojen. Če je $(V_t)_{t=0}^T$ napovedljiv, je tak tudi $(V_t^\tau)_{t=0}^T$.*

Dokaz Za $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ velja

$$[\tau \ge t] = [\tau \le t - 1]^C \in \mathcal{F}_{t-1}$$

in

$$[\tau = s] \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t-1}$$

za $s = 0, 1, \ldots, t-1$. Če je $(V_t)_{t=0}^T$ napovedljiv, potem iz zveze (VI.1) sledi, da je tak tudi ustavljeni proces. Če pa je $(V_t)_{t=0}^T$ samo prilagojen, potem prav tako iz (VI.1) sledi, da je tak tudi $(V_t^T)_{t=0}^T$. ■

Če slučajni proces $(U_t)_{t=0}^T$ dominira $(V_t)_{t=0}^T$, potem tudi ustavljeni proces $(U_t^T)_{t=0}^T$ dominira $(V_t^T)_{t=0}^T$.

Izrek 1.4 *(Doobov izrek) Dana sta slučajni proces $(V_t)_{t=0}^T$ in čas ustavljanja τ. Če je $(V_t)_{t=0}^T$ martingal, je tudi ustavljeni proces $(V_t^\tau)_{t=0}^T$ martingal. Če je $(V_t^T)_{t=0}^T$ nadmartingal (podmartingal), je tudi $(V_t^\tau)_{t=0}^T$ nadmartingal (podmartingal).*

Dokaz Navedli bomo dokaz za nadmartingale. Za podmartingale je dokaz podoben. Za martingale potem trditev sledi, ker je martingal tako nadmartingal kot podmartingal.

Naj bo $(V_t)_{t=0}^T$ nadmartingal. Želimo pokazati, da je

$$E_P(V_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_t) \geq V_t^\tau$$

za vse t. Iz zveze (VI.1) sledi

$$E_P(V_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_t) = E_P(\chi_{[\tau\geq t+1]}V_{t+1}|\mathcal{F}_t) + \sum_{s=0}^{t} E_P(\chi_{[\tau=s]}V_s|\mathcal{F}_t).$$

Ker je $\chi_{[\tau=s]}V_s$, merljiva glede na $\mathcal{F}_t$ za $s = 0, 1, \ldots, t$, je

$$E_P(\chi_{[\tau=s]}V_s|\mathcal{F}_t) = \chi_{[\tau=s]}V_s.$$

Tudi $\chi_{[\tau\geq t+1]}$ je merljiva glede na $\mathcal{F}_t$, zato je

$$E_P(\chi_{[\tau\geq t+1]}V_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \chi_{[\tau\geq t+1]}E(V_{t+1}|\mathcal{F}_t)$$

Potem dobimo

$$\begin{aligned} E_P(V_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_t) &= \chi_{[\tau\geq t+1]}E_P(V_{t+1}|\mathcal{F}_t) + \sum_{s=0}^{t}\chi_{[\tau=s]}V_s \geq \chi_{[\tau\geq t+1]}V_t + \sum_{s=0}^{t}\chi_{[\tau=s]}V_s \\ &= \chi_{[\tau\geq t]}V_t + \sum_{s=0}^{t-1}\chi_{[\tau=s]}V_s = V_t^\tau. \end{aligned}$$

■

Slučajno spremenljivko

$$V_\tau(\omega) = V_{\tau(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

imenujemo **končna vrednost** slučajnega procesa $(V_t)_{t=0}^T$ glede na τ. Velja $V_\tau(\omega) = V_T^\tau(\omega)$ za vse $\omega \in \Omega$.

Trditev 1.5 *Če je $(V_t)_{t=0}^T$ martingal, potem je*

$$E_P(V_\tau) = V_0$$

Če je $(V_t)_{t=0}^T$ podamartingal, je $E_P(V_\tau) \geq V_0$ in če je nadmartingal, je $E_P(V_\tau) \leq V_0$.

Dokaz Po Doobovem izreku za nadmartingal velja

$$E_P(V_\tau) = E_P(V_T^\tau) \leq V_0^\tau = V_0.$$

Podobno za podmartingale velja

$$E_P(V_\tau) \geq V_0.$$

Ker je martingal tako nad kot podmartingal, velja za martingale $E(V_\tau) = V_0$. ■

Definicija 1.6 Čas ustavljanja τ^* imenujemo **optimalni čas ustavljanja** za $(V_t)_{t=0}^T$, če velja

$$E_P(V_{\tau^*}) = \max_{\tau \in \mathcal{S}_{0,T}} E_P(V_\tau).$$

Čas ustavljanja $\tau^* \in \mathcal{S}_{t,T}$ je **optimalni čas ustavljanja** v času t, če

$$E_P(V_{\tau^*}|\mathcal{F}_t) = \max_{\tau \in \mathcal{S}_{t,T}} E_P(V_\tau|\mathcal{F}_t).$$

Maksimum na desni definira poseben slučajni proces, ki je pomemben za razumevanje optimalnega ustavljanja. Zato definiramo

$$U_T = V_T,$$

$$U_t = \max_{\tau \in \mathcal{S}_{t,T}} E_P(V_\tau|\mathcal{F}_t).$$

Slučajni proces $(U_t)_{t=0}^T$ imenujemo **Snellova ovojnica** za $(V_t)_{t=0}^T$. U_t nam pove, koliko največ lahko dobimo, če v času t izberemo optimalno strategijo.

Privzemimo odslej, da je $(V_t)_{t=0}^T$ prilagojen slučajni proces. Potem je tudi Snellova ovojnica $(V_t)_{t=0}^T$ prilagojen slučajni proces, saj je U_t masksimum končnega števila slučajnih spremenljivk, ki so vse merljive glede na $\mathcal{F}_t$.

Lema 1.7 *Za vse* $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ *imamo*

$$U_t = \max\{V_t, \max_{\tau \in \mathcal{S}_{t,T}} E_P(V_\tau|\mathcal{F}_t)\}.$$

Dokaz Konstantni čas ustavljanja $\tau_t = t$ pripada $\mathcal{S}_{t,T}$. Zato je

$$V_t = V_{\tau_t} = E_P(V_{\tau_t}|\mathcal{F}_t) \leq \max_{\tau \in \mathcal{S}_{t,T}} E_P(V_\tau|\mathcal{F}_t) = U_t.$$

Ker je $\mathcal{S}_{t+1,T} \subseteq \mathcal{S}_{t,T}$, velja tudi

$$\max_{\tau \in \mathcal{S}_{t+1,T}} E_P(V_\tau|\mathcal{F}_t) \leq \max_{\tau \in \mathcal{S}_{t1,T}} E_P(V_\tau|\mathcal{F}_t) = U_t.$$

Torej je

$$\max\{V_t, \max_{\tau\in\mathcal{S}_{t+1,T}} E_P(V_\tau|\mathcal{F}_t) \le U_t.$$

Vzemimo sedaj $\tau \in \mathcal{S}_{t,T}$ in definirajmo

$$\sigma = \max\{\tau, t+1\} \in \mathcal{S}_{t+1,T}.$$

Na množici $[\tau \ge t+1]$ velja $V_\sigma = V_\tau$, na množici $[\tau = t]$ pa velja $V_\tau = V_t$. Tako imamo

$$V_\tau = \chi_{[\tau=t]}V_t + \chi_{[\tau\ge t+1]}V_\sigma.$$

Ker $[\tau = t]$ in $[\tau \ge t+1] = [\tau = t]^c$ pripadata $\mathcal{F}_t$, velja

$$\begin{aligned}
E_P(V_\tau|\mathcal{F}_t) &= E_P(\chi_{[\tau=t]}V_t|\mathcal{F}_t)E_P(\chi_{[\tau\ge t+1]}V_\sigma|\mathcal{F}_t)\\
&\le \chi_{[\tau=t]}\max\{V_t, \max\nolimits_{\rho\in\mathcal{S}_{t+1,T}} E_P(V_\rho|\mathcal{F}_t)\} + \chi_{[\tau\ge t+1]}\max\{V_t, \max\nolimits_{\rho\in\mathcal{S}_{t+1,T}} E_P(V_\rho|\mathcal{F}_t)\\
&= \max\{V_t, \max\nolimits_{\rho\in\mathcal{S}_{t+1,T}} E(V_\rho|\mathcal{F}_t)\}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$U_t \le \max\{V_t, \max_{\rho\in\mathcal{S}_{t+1,T}} E(V_\rho|\mathcal{F}_t)\}$$

. ■

Trditev 1.8 *Za $t = 0, 1, \ldots, T$ velja naslednja rekurzivna zveza*

$$U_t = \max\{V_t, E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\}.$$

Dokaz Če pokažemo zvezo $E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \max_{\tau\in\mathcal{S}_{t+1,T}} E_P(V_\tau|\mathcal{F}_t)$ potem trditev sledi iz 1.7. Z uporabo lastnosti pogojnega matematičnega upanja dobimo

$$\max_{\tau\in\mathcal{S}_{t+1,T}} E_P(V_t|\mathcal{F}_t) = \max_{\tau\in\mathcal{S}_{t+1,T}} E_P(E_P(V_\tau|\mathcal{F}_{t+1})|\mathcal{F}_t) \le E_P(\max_{\tau\in\mathcal{S}_{t+1,T}} E_P(V_\tau|\mathcal{F}_{t+1})|\mathcal{F}_t) = E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)$$

Naj bo $\tau^* \in \mathcal{S}_{t+1,T}$ optimalen za čas $t+1$. Potem je

$$\begin{aligned}
E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) &= E_P(E_P(V_{\tau*}|\mathcal{F}_{t+1})|\mathcal{F}_t) =\\
&= E_P(V_{\tau*}|\mathcal{F}_{t+}) \le\\
&\le \max_{\tau\in\mathcal{S}_{t+1,T}} E_P(V_\tau|\mathcal{F}_t).
\end{aligned}$$

■

Izrek 1.9 *Snellova ovojnica za $(V_t)_{t=0}^T$ je nadmartingal. Je najmanjši nadmartingal, ki dominira $(V_t)_{t=0}^T$. Torej velja*

$$U_t \ge V_t \text{ za } t = 0, 1, \ldots, T.$$

Dokaz Po trditvi 1.8 velja

$$U_t = \max\{V_t, E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\} \geq E_P(U_t + 1, \mathcal{F}_t).$$

Torej je $(U_t)_{t=0}^T$ nadmartingal. Očitno je tudi $U_t \geq V_t$. Naj bo $(W_t)_{t=0}^T$ nadmartingal, ki dominira $(V_t)_{t=0}^T$. Potem je

$$W_t \geq \max\{V_t, E_P(W_{t+1}|\mathcal{F}_t)\} \text{ za } t = 0, 1, \ldots, T-1,$$

in

$$U_T = V_T \leq W_T.$$

Sedaj uporabimo obratno indukcijo na t. Privzemimo, da je $U_{t+1} \leq W_{t+1}$. Potem je

$$W_t \geq \max\{V_t, E_P(W_{t+1}|\mathcal{F}_t)\} \geq \max\{V_t, E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\} = U_t$$

Izrek 1.10 *Čas ustavljanja $\tau \in \mathcal{S}_{0,T}$ je optimalen natanko tedaj, ko je ustavljena Snellova ovojnica $(U_t)_{t=0}^T$ martingal in velja $U_\tau = V_\tau$. Če je τ optimalen, potem je $E_P(V_\tau|\mathcal{F}_0) = U_0$.*

Dokaz Naj bo τ tak čas ustavljanja, da je $U_\tau = V_\tau$ in $(U_t)_{t=0}^T$ je martingal. Potem je

$$U_0 = U_O^\tau = E_P(U_T^\tau|\mathcal{F}_0) = E_P(U_\tau|\mathcal{F}_0) = E_P(V_\tau|\mathcal{F}_0).$$

Izrek 1.9 pove, da je $(U_t)_{t=0}^T$ najmanjši nadmartingal, ki dominira $(V_t)_{t=0}^T$. Po Doobovem izreku 1.4 je tudi $(U_t^\sigma)_{t=0}^T$ nadmartingal za vsak $\sigma \in \mathcal{S}_{0,T}$. Velja še $U_t^\sigma \geq V_t^\sigma$ za vse t. Potem je

$$E_P(V_\upsilon|\mathcal{F}_0) = E_P(V_T^\upsilon|\mathcal{F}_0) \leq E_P(U_T^\upsilon|\mathcal{F}_0) \leq U_0^\upsilon = U_0 = E_P(V_\tau|\mathcal{F}_0).$$

Torej je τ optimalen čas ustavljanja.

Obratno, privzemimo sedaj, da je τ optimalen. Ker $(U_t)_{t=0}^T$ dominira $(V_t)_{t=0}^T$, velja $V_\tau \leq U_\tau$. Ker je τ optimalen, velja

$$U_0 = E_P(V_\tau|\mathcal{F}_0) \leq E_P(U_\tau|\mathcal{F}_0).$$

Ker je $(U_t)_{t=0}^T$ nadmartingal, je

$$U_0 = U_0^\tau \geq E_P(U_t^\tau|\mathcal{F}_0) = E_P(U_\tau|\mathcal{F}_0).$$

Torej mora biti

$$U_0 = E_P(V_\tau|\mathcal{F}_0) = E_P(U_\tau|\mathcal{F}_0). \tag{VI.2}$$

Ker je $U_\tau \geq V_\tau$ in sta to končni slučajni spremenljivki, je enakost (VI.2) možna samo, če je $U_\tau = V_\tau$. Iz že omenjenih lastnosti sledi še

$$\begin{aligned} U_0 = U_0^\tau &\geq E_P(U_t^\tau|\mathcal{F}_0) \geq E_P(E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_0) = E_P(U_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_0) \\ &\geq E_P(E_P(U_t^\tau|\mathcal{F}_{t+1})|\mathcal{F}_0) = E_P(U_T^\tau|\mathcal{F}_0) = E_P(U_\tau|\mathcal{F}_0) = U_O. \end{aligned}$$

Torej imamo v zgornjih relacijah povsod enačaj. Ker je $U_t^\tau \geq E_P(U_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_0)$ in sta to končni slučajni spremenljivki, velja tudi

$$U_t^\tau = E_P(U_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_t) \text{ za vse } t = 0, 1, \ldots, T-1.$$

Potemtakem je $(U_t)_{t=0}^T$ martingal. ■

Karakteristični lastnosti optimalnega časa ustavljanja iz izreka 1.10 uporabimo za definicijo dveh časov ustavljanja, za katera bomo pokazali, da sta optimalna.

Definicija 1.11 Čas prvega vstopa $V_t - U_t$ v množico $B = \{0\}$ označimo s $\tau_{\min}$. Velja torej

$$\tau_{\min}(\omega) = \begin{cases} \min\{t;\ V_t(\omega) = U_t(\omega)\}, & \text{če}\{t;\ V_t(\omega) = U_t(\omega)\} \neq \emptyset \\ t, & \text{sicer} \end{cases}$$

Izrek 1.12 *Čas ustavljanja $\tau_{\min}$ je najmanjši optimalni čas ustavljanja, tj. za vsak drug optimalen čas ustavljanja τ velja $\tau_{\min}(\omega) \leq \tau(\omega)$ za vse $\omega \in \Omega$.*

Dokaz Po izreku 1.10 je $\tau_{\min}$ optimalen, če pokažemo, da je $(U_t)_{t=0}^T$ martingal $V_{\tau_{\min}} = U_{\tau_{\min}}$. Slednja enakost sledi iz definicije $\tau_{\min}$. Izraz (VI.1) za ustavljeni proces nam da

$$E_P(U_{t+1}^{\tau_{\min}}|\mathcal{F}_t) = \chi_{[\tau_{\min} \geq t+1]} E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) + sum_{s=0}^t \chi_{[\tau=s]} U_s,$$

saj so slučajne spremenljivke $\chi_{[\tau_{\min} \geq t+1]}$, $\chi_{[\tau=s]}$ in U_s za $s = 1, 2, \ldots t$, merljive glede na $\mathcal{F}_t$. Na množici $[\tau_{\min} \leq t] = [\tau_{\min} \geq t+1]^C$ velja

$$E_P(U_{t+1}^{\tau_{\min}}|\mathcal{F}_t) = \sum_{s=0}^t \chi_{[\tau=s]} U_s = \chi_{[\tau \geq]} U_t + \sum_{s=0}^{t-1} \chi_{[\tau=s]} U_s = U_t^{\tau_{\min}}.$$

Definicija $\tau_{\min}$ pove, da je na množici $[\tau_{\min} \geq t+1]$

$$V_t \neq U_t = \max\{V_t, E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\}.$$

zato je na tej množici $U_t = E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)$ in tudi

$$E_P(U_{t+1}^{\tau_{\min}}|\mathcal{F}_t) = \chi_{[\tau_{\min}\geq t]}U_t + \sum_{s=0}^{t-1}\chi_{[\tau=s]}U_s = U_t^{\tau_{\min}}.$$

Tako smo pokazali, da je $(U_t^{\tau_{\min}})_{t=0}^T$ martingal in τ optimalen čas ustavljanja.

Po definiciji je $\tau_{\min}$ najmanjši čas ustavljanja, za katerega velja $U_\tau = V_\tau$. Ker je to ena od dveh lastnosti, ki karakterizirajo optimalen čas ustavljanja po izreku 1.10, je $\tau_{\min}$ najmanjši optimalen čas ustavljanja. ■

Preden definiramo drugi optimalni čas ustavljanja rabimo še eno pomožno trditev. Najprej se spomnimo Doobovega razcepa. Za Snellovo ovojnico $(U_t)_{t=0}^T$ je

$$U_t = M_t + A_t \quad t = 0, 1, \ldots, T,$$

Doobov razcep, če je $(M_t)_{t=0}^T$ martingal in je $(A_t)_{t=0}^T$ napovedljiv slučajni proces z $A_0 = 0$. Proces $(A_t)_{t=0}^T$ je padajoč, ker je $(U_t)_{t=0}^T$ nadmartingal.

Lema 1.13 *Dan je čas ustavljanja τ. Potem je ustavljena Snellova ovojnica $(U_t^\tau)_{t=0}^T$ martingal natanko tedaj, ko je $A_t^\tau = 0$ za vse t.*

Dokaz Iz definicije ustavljenega procesa (VI.1) in Doobovega razcepa za razcepa $(U_t^\tau)_{t=0}^T$ sledi

$$U_t^\tau = M_t^\tau + A_t^\tau.$$

Po Doobovem izreku je ustavljeni proces $(M_t^\tau)_{t=0}^T$ martingal. Zato je U_t^τ martingal natanko tedaj, ko je $A_t^\tau = 0$ za vse t. ■

Definicija 1.14 Čas prvega vstopa zamaknjenega procesa $(A_{t+1})_{t=0}^{T-1}$ v množico $B = (-\infty, 0)$ označimo s $\tau_{\max}$. Velja torej

$$\tau_{\max}(\omega) = \begin{cases} \min\{t; A_{t+1}(\omega) < 0\}, & \text{če}\{t; A_{t+1}(\omega) < 0\} \neq \emptyset \\ T & \text{sicer} \end{cases}$$

$\tau_{\max}$ je čas ustavljanje, ker je $(A_t)_{t=0}^T$ napovedljiv. ◊

Izrek 1.15 *Čas ustavljanja $\tau_{\max}$ je največji optimalni čas ustavljanja, tj. za vsak drug optimalni čas ustavljanja τ velja $\tau(\omega) \leq \tau_{\max(\omega)}$ za vse $\omega \in \Omega$.*

Dokaz Po izreku 1.10 je τ optimalen, če je $(U_t^{\tau_{\max}})_{t=0}^T$ martingal in $U_\tau = V_\tau$. Po lemi 1.13 je $(U_t^{\tau_{\max}})_{t=0}^T$ martingal, če je $A_t^{\tau_{\max}} = 0$ za vse t. Po definiciji $\tau_{\max}$ to drži, saj je $(A_t)_{t=0}^T$ padajoč in je $A_0 = 0$.

Pokazati moramo še, da je $U_{\tau_{\max}} = V_{\tau_{\max}}$. Izberimo $\omega \in \Omega$ in t tako, da je $\omega \in [\tau_{\max} = t]$. Potem je $A_t(\omega) = 0$ in $A_{t+1}(\omega) < 0$. Potem je

$$\begin{aligned} E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) &= E_P(M_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) + E_P(A_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \\ &= M_t(\omega) + A_{t+1}(\omega) < M_t(\omega) = U_t(\omega). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$U_\tau(\omega) = U_t(\omega) = \max\{V_t(\omega), E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega)\} = V_t(\omega) = V_{\tau_{\max}}(\omega).$$

Ker je ω poljuben, je $U_{\tau_{\max}} = V_{\tau_{\max}}$.

Dejstvo je, da je $\tau_{\max}$ največji optimalni čas ustavljanja sledi iz karakterizacije optimalnosti v izreku 1.10 in leme 1.13. ∎

2 Optimalna izvršitev ameriških pogojnih terjatev

Privzemimo ponovno model trga z več obdobji, ki je poln in brez arbitraže. **Ameriška pogojna terjatev** daje pravico lastniku, da jo izvrši v vsakem od možnih časov $t = 1, 2, \ldots, T$. Slučajno spremenljivko izplačil v času t označimo z Z_t. Z_t je merljiva glede na $\mathcal{F}_t$. Ameriška pogojna terjatev je tako podana s slučajnim procesom $(Z_t)_{t=1}^T$, ki je prilagojen informacijski strukturi

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Zaradi poenostavitve oznak vzamemo $Z_0 = 0$. Razlika med zaporedjem pogojnih terjatev $X_1, X_2, \ldots X_T$, X_t z zapadlostjo t, in ameriško pogojno terjatvijo je v tem, da ima lastnik $X_1, X_2, \ldots X_T$ pravico do izplačila vseh pogojnih terjatev X_t, lastnik ameriške pogojne terjatve $(Z_t)_{t=0}^T$ pa ima pravico do izplačila le ene pogojne terjatve $Z_1, Z_2, \ldots Z_T$.

Primer ameriške pogojne terjatve je ameriška nakupna opcija na j-ti vrednostni papir z izvršilno ceno K. Predstavimo jo z ameriško pogojno terjatvijo

$$Z_t(\omega) = \max\{0, S_t^j(\omega) - K\}, \quad t = 1, 2, \ldots T.$$

Ameriško prodajno opcijo na j-ti vrednostni papir pa predstavimo z ameriško pogojno terjatvijo

$$Z_t(\omega) = \max\{0, K - S_t^j(\omega)\}, \quad t = 1, 2, \ldots, T.$$

Tudi vsako (običajno) pogojno terjatev z zapadlostjo T lahko predstavimo ko ameriško pogojno terjatev, če vzamemo

$$Z_t = \begin{cases} 0, & t < T, \\ X_T & t = T \end{cases}$$

Osrednji problem za lastnika ameriške pogojne terjatve je najti optimalno strategijo za izvršitev. Strategije izvršitve so v bijekciji s časi ustavljanja iz $\mathcal{S}_{0,T}$.

V času $t_0 \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ ima lastnik $(Z_t)_{t=0}^T$ pravico izvršitve v katerem koli od časov $\{t_0, t_0+1, \ldots, T\}$. Naj bo njegova strategija podana s časom ustavljanja

$$\tau : \Omega \to \{t_0, t_0+1, \ldots t\}.$$

Za dan $\omega \in \Omega$ lastnik izvrši svojo ameriško pogojno terjatev v času $\tau(\omega)$ in dobi izplačilo $Z_\tau(\omega) = Z_{\tau(\omega)}(\omega)$. Torej je izplačilo v času $t \geq t_0$ za ameriško pogojno terjatev $(Z_t)_{t=0}^T$ glede na strategijo podano s τ enako

$$X_t^{(Z,\tau)} = Z_t \chi_{[\tau=t]}.$$

Slučajni proces $X^{Z,\tau} = (X_t^{(Z,\tau)})_{t=1}^T$ predstavlja zaporedje pogojnih terjatev $X_t^{(Z,\tau)}$ $t = 1, 2, \ldots, T$, kjer ima $X_t^{(Z,\tau)}$ zapadlost t. Po rezultatih o modelu trga z več obdobji velja

$$\begin{aligned}
\pi_{t_0}(X^{(Z,\tau)}) &= \sum_{t=t_0}^{T} E_Q\left(X_t^{(Z,\tau)} \frac{S_{t_0}^1}{S_t^1} | \mathcal{F}_{t_0}\right) = \sum_{t=t_0}^{T} E_Q\left(Z_t \chi_{[\tau=t]} \frac{S_{t_0}^1}{S_t^1} | \mathcal{F}_{t_0}\right) = \\
&= E_Q\left(Z_\tau \frac{S_{t_0}^1}{S_\tau^1} | \mathcal{F}_{t_0}\right).
\end{aligned}$$

To je vrednost ameriške pogojne terjatve, če jo izvršimo s strategijo podano s τ. Za numerar smo izbrali prvi vrednostni papir A_1.

Strategija podana s τ^* je optimalna, če velja

$$E_Q\left(Z_{\tau^*} \frac{S_{t_0}^1}{S_{\tau^*}^1} | \mathcal{F}_{t_0}\right) = \max_{\tau \in \mathcal{S}_{t_0,T}} E_Q\left(Z_\tau \frac{S_{t_0}^1}{S_\tau^1} | \mathcal{F}_{t_0}\right) \tag{VI.3}$$

Ker je $\mathcal{S}_{t_0,T}$ končna, je maksimum dosežen. Izraz (VI.3) je največja vrednost, ki jo je pripravljen plačati kupec ameriške pogojne terjatve. Zato

$$\pi_{t_0}(\underline{X}^{Z,\tau^*}) = \max_{\tau \in \mathcal{S}_{t_0,T}} E_Q(Z_\tau \frac{S_{t_0}^1}{S_\tau^1} | \mathcal{F}_{t_0})$$

imenujemo **kupčeva cena** (*buyer's price*) za $(Z_t)_{t=0}^T$.

Optimalni čas ustavljanja lahko določimo s pomočjo teorije iz prejšnjega razdelka. Za osnovni slučajni proces vzamemo diskontirani proces

$$\tilde{Z}_t = \frac{Z_t}{S_t^1}.$$

S stališča izdajatelja ameriške pogojne terjatve je glavno vprašanje optimalne zaščite. Zagotoviti mora izplačilo v vsakem času t, če bi kupec izvršil svojo ameriško pogojno terjatev v tem času t.

Zaščitna strategija za $(Z_t)_{t=0}^T$ v času t_0 je taka strategija samofinanciranja $\Phi = (\phi_t)_{t=t_0}^T$, za katero velja

$$V_t(\Phi) \geq Z_t \text{ za } t = t_0, t_0+1, \ldots, T.$$

Tak portfelj samofinanciranja zagotavlja v vsakem času $t \geq t_0$ dovolj sredstev za poravnavo obveznosti Z_t. Φ imenujemo **zaščita za** $(Z_t)_{t=0}^T$ **v času** t_0.

Iz definicije Φ sledi, da je $(\widetilde{V}_t(\Phi))_{t=t_0}^T$ martingal glede na Q, ki dominira $(\tilde{Z}_t)_{t=t_0}^T$.

V prejšnjem poglavju smo pokazali, da je Snellova ovojnica $(\tilde{U}_t)_{t=t_0}^T$ za $(\tilde{Z}_t)_{t=t_0}^T$ najmanjši nadmartingal glede na Q, ki dominira $(\tilde{Z}_t)_{t=t_0}^T$. Najcenejšo zaščito za Z v času t_0 potem dobimo, če vzamemo martingalski del Doobovega razcepa Snellove ovojnice $(\tilde{U}_t)_{t=t_0}^T$ in poiščemo pripadajoči portfelj samofinancijranja Φ^*.

Izrek 2.1 *Zaščita Φ^* za $(Z_t)_{t=0}^T$ v času t_0 je najcenejša tj.*

$$V_{t_0}(\Phi^*) = \inf\{V_0(\Phi); \Phi \textit{ je zaščitna za } (Z_t)_{t=0}^T \textit{ v času } t_0\}.$$

Velja še, $V_{t_0}(\Phi^*) = S_{t_0}^1(\tilde{U}_{t_0})$, kjer je $(\tilde{U}_t)_{t=t_0}^T$ Snellova ovojnica za $(\tilde{Z}_t)_{t=t_0}^T$ podana inverzno rekurzivno z $\tilde{U}_T = \tilde{Z}_T$, $\tilde{U}_T = \max\{\tilde{Z}_T, E_Q(\tilde{U}_{t+1}|\mathcal{F}_t)\}$.

Dokaz Naj bo $\tau \in \mathcal{S}_{t_0,T}$ optimalen. Po konstrukciji Φ^* potem velja

$$V_0(\Phi^*) = S_{t_0}^1 \tilde{M}_{t_0}^{t_0} = S_{t_0}^1 \tilde{U}_{t_0} = E_Q\left(Z_\tau \frac{S'_{t_0}}{S_\tau^1}\right).$$

Če je Ψ poljubna zaščita za $\underset{\frown}{Z}$ v času t_∞, potem je

$$V_t(\psi) \geq Z_t.$$

Za vsak čas ustavljanja torej velja

$$V_\tau(\psi) \geq Z_\tau.$$

Ker je $\frac{V_t(\Psi)}{S'_t}$ martingal glede na Q, je ustavljeni proces spet martingal, zato imamo

$$V_{t_0}(\psi^*) = E_Q(Z_\tau \frac{S_{t_0}^1}{S_\tau^1}|\mathcal{F}_{t_0}) \geq E_Q(V_\tau(\Psi)\frac{S_{t_0}^1}{S_\tau^1}|\mathcal{F}_{t_0}) =$$

$$S_{t_0}^1 E_Q\left(\frac{V_\tau(\Psi)}{S_\tau^1}|\mathcal{F}_{t_0}\right) = S_{t_0}^1 \frac{V_{t_0}(\Psi)}{S_{t_0}^1} = V_{t_0}(\Psi). \qquad \blacksquare$$

S stališča prodajalca je potem pravična cena za $(Z_t)_{t=t_0}^T$ dana s

$$\pi_{t_0}(\underset{\frown}{Z}) = \inf_{\Phi}\{V_0(\Phi); \Phi \text{ je zaščita za } \underset{\frown}{Z} \text{ v času } t_0\}.$$

To ceno imenujemo **prodajalčeva cena** (*seller's price*). Ker nimamo arbitraže, velja

$$\pi_{t_0}(Z) = \inf_{\Phi}\{V_0(\Phi); \Phi \text{ zaščita za } Z \text{ v času } t_0\} = \max_{\tau\in\mathcal{S}_{t_0,T}} E_Q\left(Z_\tau\frac{S_{t_0}^1}{S_\tau^1}|\mathcal{F}_{t_0}\right).$$

Rekurzivna definicija Snellove ovojnice iz trditve 1.8 nam poda inverzno rekurzivno konstrukcijo optimalne zaščite za $(Z_t)_{t=0}^T$ v času t_0. V času T moramo izplačati $\tilde{\tilde{Z}}_T$, zato je $\tilde{\tilde{U}}_T = \tilde{\tilde{Z}}_T$. V času $T-1$ moramo bodisi izplačati $\tilde{\tilde{Z}}_{T-1}$ ali pa bomo morali v času T izplačati $\tilde{\tilde{Z}}_T$:

$$\tilde{\tilde{U}}_{T-1} = \max\{\tilde{\tilde{Z}}_{T-1}, E_Q(\widetilde{\widetilde{U}}_T|\mathcal{F}_{T-1})\}.$$

Podobno sklepamo še za ostale čase $T-2, T-3, \ldots, t_0$.