Poglavje V

Model Cox - Ross - Rubinstein (binomski model)

1 Predstavitev modela

Imamo N obdobij in v vsakem času $t = 1, 2, \dots, N$ imamo dva možna razvoja ekonomije - dobrega in slabega. Privzeli bomo, da je za vsak t verjetnost, da je razvoj ekonomije od $t-1$ do t dober enaka p, kjer je $p \in (0, 1)$. Potem je $1 - p$ verjetnost slabega razvoja ekonomije. Včasih bomo rekli, da je stanje ekonomije v času t dobro (oziroma slabo), če je razvoj ekonomije od časa $t-1$ do časa t dober (oziroma slab).

Razvoj ekonomije skozi vsa obdobja lahko opišemo z N ponovitvami neodvisnih Bernoullijevih poskusov z verjetnostnim prostorom $\Omega_0 = \{0, 1\}$ in verjetnostjo $P(0) = 1 - p$, $P(1) = p$. Pri tem 1 predstavlja dober razvoj ekonomije in 0 slab razvoj ekonomije. Verjetnostni prostor vseh možnih razvojev ekonomije je dan z $\Omega = \Omega_0^N$. Razvoj ekonomije od časa 0 do N je dan z N-terico $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$, kjer je ω_t razvoj ekonomije od časa $t-1$ do časa t. Za vsak $t = 1, 2, \dots, N$ označimo z $Z_t(\omega) = \omega_t$ projekcijo na t-to komponento in z $D_t(\omega) = \sum_{j=1}^{t} \omega_j$, vsoto prvih t projekcij. Za vse t so D_t in Z_t slučajne spremenljivke na Ω. D_t šteje, koliko je bilo dobrih razvojev ekonomije do časa t. Slučajna spremenljivka D_t ima Bernoullijevo porazdelitev na množici $\{0, 1, \dots, t\}$: $P(D_t = k) = \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k}$. Opazimo še, da so slučajne spremenljivke $Z_1, Z_2, \dots Z_N$ neodvisne.

Informacijska struktura je podana s particijami $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_T$ množice Ω. V času t poznamo razvoj ekonomije do t. Ta razvoj je podan s t- terico ničel in enic

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_t \end{bmatrix},$$

kjer a_j pove, kakšen je bil razvoj ekonomije od časa $j-1$ do j: $a_j = 1$ pomeni dober razvoj in $a_j = 0$ pomeni slab razvoj ekonomije. Za vsak $\mathbf{a}$ označimo z $A_{\mathbf{a},t}$ dogodek $[Z_1 = a_1, Z_2 = a_2, \ldots, Z_t = a_t]$. Particija $\mathcal{P}_t$ je potem podana s

$$\mathcal{P}_t = \{A_t, \mathbf{a} \in \{0,1\}^t\}.$$

S $\mathcal{F}_t$ označimo σ- algebro generirano s $\mathcal{P}_t$. Opazimo, da je $\mathcal{F}_t$ najmanjša taka σ-algebra, da so vse slučajne spremenljivke $Z_1, Z_2, \ldots, Z_t$ merljive glede na to σ-algebro.

V modelu privzemimo, da obstaja bančni račun z deterministično od časa neodvisno obrestno mero R. Vrednostni proces bančnega računa je podan z

$$B_t(\omega) = (1+R)^t$$

za vse $\omega \in \Omega$. Tvegan vrednostni papir (npr. delnica) pa ima vrednostni proces podan s

$$S_t(\omega) = S_0(1+g)^{D_t(\omega)}(1+b)^{t-D_t(\omega)}. \tag{V.1}$$

Pri tem je $S_0 > 0$ in $g > b > -1$. S_0 je začetna cena delnice, g je stopnja rasti vrednosti delnice v primeru dobrega razvoja ekonomije in b stopnja rasti/padca vrednosti delnice v primeru slabega razvoja ekonomije. V tem modelu privzemimo, da se g in b ne spreminjata s časom.

Iz definicije slučajnih spremenljivk Z_t in D_t dobimo še rekurzivno formulo

$$S_t(\omega) = S_{t-1}(\omega)(1+g)^{Z_t(\omega)}(1+b)^{1-Z_t(\omega)} \text{ za } t = 1, 2, \ldots, N.$$

Stopnja dobička/izgube delnice je slučajna spremenljivka

$$R_t : \Omega \to \mathbb{R}$$

dana z

$$R_t(\omega) = \frac{S_t(\omega)}{S_{t-1}(\omega)} = (1+g)^{Z_t(\omega)}(1+b)^{1-Z_t(\omega)}.$$

Ker je R_t funkcija slučajne spremenljivke Z_t in so slučajne spremenljivke $Z_1, Z_2, \ldots Z_N$ neodvisne, so tudi slučajne spremenljivke $R_1, R_2, \ldots, R_N$ neodvisne.

V našem enostavnem modelu za slučajne spremenljivke velja naslednja uporabna lastnost:

Lema 1.1 *Če je X merljiva glede na $\mathcal{F}_t$, potem obstaja taka funkcija $F : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}$, da je*

$$X(\omega) = F(S_0, S_1(\omega), \dots, S_t(\omega))$$

za vse $\omega \in \Omega$.

Dokaz Ker je X merljiva glede na $\mathcal{F}_t$, je konstantna na atomih iz $\mathcal{P}_t$, ki jih lahko podamo z

$$[Z_1 = a_1, Z_2 = a_2, \dots Z_t = a_t]$$

za $a_1, a_2, \dots a_t \in \{0, 1\}$. Definirajmo

$$f(a_1, a_2, \dots a_t) = X([Z_1 = a_1, Z_2 = a_2, \dots Z_t = a_t])$$

Potem velja

$$X(\omega) = f(Z_1(\omega), Z_2(\omega), \dots Z_t(\omega))$$

za vse ω. Ker je $S_t = S_{t-1}(1+g)^{Z_t}(1+b)^{1-Z_t}$, sledi

$$Z_t = G(S_{t-1}, S_t)$$

za

$$G(x, y) = \frac{\log y - \log x - \log(1+b)}{\log(1+g) - \log(1+b)}.$$

Torej je Z_t funkcija S_{t-1} ter S_t in zato je X funkcija $S_0, S_1, \dots S_t$. ■

Če za numerar izberemo bančni račun, potem je diskontirani proces podan z

$$\tilde{B}_t = \frac{B_t}{B_t}, \quad \tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = \frac{S_t}{(1+R)^t}.$$

Ker je $\tilde{B}_t$ martingal glede na vsako verjetnost, je Q na Ω ekvivalentna martingalska verjetnost natanko tedaj, ko velja: $Q(\omega) \in (0, 1)$ za vse $\omega \in \Omega$ in

$$\frac{S_t}{(1+R)^t} = E_Q\left(\frac{S_{t+1}}{(1+R)^{t+1}} | \mathcal{F}_t\right)$$

oziroma

$$(1+R)S_t = E_Q\left(S_{t+1} | \mathcal{F}_t\right) \text{ za } t = 0, 1, \dots, N-1. \tag{V.2}$$

V naslednjem izreku označimo $q = \frac{R-b}{g-b}$.

Izrek 1.2 *Naj bo Q verjetnost na Ω. Potem je Q ekvivalentna martingalska verjetnost natanko tedaj, ko je*

$$b < R < g$$

in

$$Q(Z_{t+1} = \gamma | A) = q^{\gamma}(1-q)^{1-\gamma}. \tag{V.3}$$

za $t = 1, 2, \ldots N$, $A \in \mathcal{P}_t$ in $\gamma \in \{0, 1\}$. V tem primeru velja

$$Q(\omega) = q^{D_N(\omega)}(1-q)^{N-D_N(\omega)}. \tag{V.4}$$

Dokaz Ker je S_t merljiva funkcija glede na $\mathcal{F}_t$, je pogoj (V.2) ekvivalenten pogoju

$$\begin{aligned} 1 + R &= E_Q\left(\frac{S_{t+1}}{S_t} | \mathcal{F}_t\right) \\ &= E_Q(R_{t+1} | \mathcal{F}_t) \end{aligned} \tag{V.5}$$

Po definiciji pogojnega matematičnega upanja imamo

$$E_Q(R_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \sum_{A \in \mathcal{P}_t} E_Q(R_{t+1}|A)\chi_A.$$

Iz (V.5) sledi, da je $E_Q(R_{t+1}|\mathcal{F}_t)$ konstantna, zato mora biti

$$E_Q(R_{t+1}|A) = 1 + R \tag{V.6}$$

za vse atome $A \in \mathcal{P}_t$. Označimo $\tilde{q} = Q(Z_{t+1} = 1|A)$. Potem je $1 - \tilde{q} = Q(Z_{t+1} = 0|A)$. Ker je $R_{t+1} = (1+g)^{Z_{t+1}}(1+b)^{1-Z_{t+1}}$, je

$$E_Q(R_{t+1}|A) = (1+g)\tilde{q} + (1+b)(1-\tilde{q}),$$

Pogoj (V.6) je torej ekvivalenten pogoju

$$1 + R = (1+g)\tilde{q} + (1+b)(1-\tilde{q}),$$

ki velja natanko tedaj, ko je

$$\tilde{q} = \frac{R-b}{g-b} = q.$$

Tako smo pokazali enakost (V.3).

Iz definicije pogojne verjetnosti dobimo še

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= Q(Z_1 = \omega_1, Z_2 = \omega_2, \dots Z_N = \omega_N) \\ &= Q(Z_1 = \omega_1)Q(Z_2 = \omega_2|Z_1 = \omega_1)Q(Z_3 = \omega_3|Z_1 = \omega_1, Z_2 = \omega_2)\dots \\ &\quad Q(Z_N = \omega_N|Z_1 = \omega_1, \dots Z_{N-1} = \omega_{N-1}) \\ &= q^{\omega_1}(1-q)^{1-\omega_1}q^{\omega_2}(1-q)^{\omega_2}\dots q^{\omega_N}(1-q)^{1-\omega_N} \\ &= q^{D_N(\omega)}(1-q)^{N-D_N(\omega)}. \end{aligned}$$

Pokazati moramo še, da $0 < Q(\omega) < 1$ velja natanko tedaj, ko je $b < R < g$. Če velja $b < R < g$, potem je $0 < q < 1$. Iz enakosti (V.4) sledi $0 < Q(\omega) < 1$. Obratno, če je $0 < Q(\omega) < 1$ za vse $\omega \in \Omega$, potem izberemo $\omega = (1, 0, \dots 0)$ in dobimo $Q(\omega) = q$. Zato je $0 < q < 1$. To je ekvivalentno pogoju $b < R < g$, kar zlahka preverimo. ■

Izrek 1.2 nam pove, da v Cox-Ross-Rubinsteinovem modelu ekvivalentna martingalska verjetnost obstaja natanko tedaj, ko je $b < R < g$. Če ta verjetnost obstaja, je ena sama. Iz osnovnega izreka vrednotenja premoženja dobimo:

Posledica 1.3 *Cox-Ross-Rubinsteinov model ekonomije je poln in brez arbitraže natanko tedaj, ko je $b < R < g$.*

2 Cenovni funkcional v binomskem modelu

Odslej bomo privzeli, da je $b < R < g$. Potem je vsaka pogojna terjatev X z zapadlostjo S, $1 \le S \le T$, dosegljiva, torej obstaja izvedbena strategija samofinanciranja Φ, za katero je $X = V_S(\Phi)$. Vrednost X v času t je podana s slučajno spremenljivko

$$\pi_t(X) = V_t(\Phi) = E_Q\left(X\frac{B_t}{B_N}|\mathcal{F}_t\right) = \frac{E_Q(X|\mathcal{F}_t)}{(1+R)^{N-t}}.$$

V času t poznamo vrednost $S_0, S_1, \dots, S_t$. Označimo jih s $S_0 = s_0, S_1 = s_1, \dots, S_t = s_t$. Iz leme 1.1 vemo, da je π_t funkcija $S_0, S_1, \dots, S_t$. Zaradi večje nazornosti pišemo namesto $\pi_t(X)$ včasih tudi

$$\pi_t(X, s_0, s_1, \dots, s_t) = \frac{E_Q(X|\mathcal{F}_t)}{(1+R)^{N-t}}.$$

Za $t = 0$ imamo

$$\pi_0(X) = \frac{1}{(1+R)^N}\sum_{\omega\in\Omega} q^{D_N(\omega)}(1-q)^{N-D_N(\omega)}X(\omega).$$

Privzemimo naprej, da je $X = f(S_N)$ za neko dano funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ker je $S_N = S_0(1+g)^{D_N}(1+b)^{N-D_N}$, je

$$X = f(S_N) = h_f(S_0, D_N),$$

za

$$h_f(x,l) = f(x(1+g)^l(1+b)^{N-l}).$$

Trditev 2.1 *Če je $X = f(S_N)$, potem je*

$$\pi_0(X, s_0) = \frac{1}{(1+R)^N}\sum_{l=0}^{N}\binom{N}{l}q^l(1-q)^{N-l}h_f(s_0,l).$$

Dokaz Velja

$$\pi_0(X,s_0) = \frac{1}{(1+R)^N}E_Q(X) = \frac{1}{(1+R)^N}E_Q(h_f(s_0,D_N)) =$$
$$= \sum_{l=0}^{N} h_f(s_0,l)Q(D_N = l) = \sum_{l=0}^{N}\binom{N}{l}q^l(1-q)^{N-l}h_f(s_0,l)$$

■

Trditev 2.2 *Če je $X = f(S_N)$, potem je*

$$E_Q(X|\mathcal{F}_t)(\omega) = \sum_{j=0}^{N-t}\binom{N-t}{j}q^j(1-k)^{N-t-j}h_f(S_t(\omega), j).$$

za vse $\omega \in \Omega$ in $t = 0, 1, \ldots, N$.

Dokaz Najprej fiksirajmo ω in označimo z A atom v $\mathcal{F}_t$, ki vsebuje ω, ter z $l = D_t(\omega)$. Opazimo, da je $A = [Z_1 = \omega_1, Z_2 = \omega_, \ldots, Z_t = \omega_t]$. Potem je

$$S_t(\omega) = S_0(1+g)^l(1+b)^{t-l}.$$

Iz definicije sledi, da je

$$Q(D_N = k|A) = 0$$

$$\text{za} \quad k = 0, 1, \ldots, l-1 \quad \text{in} \quad k = N-t+l+1, N-t+l+2, \ldots, N.$$

Za preostale $k = l, l+1, \ldots, N-t+l$ izračunamo

$$Q(D_N = k|A) = \frac{Q([D_N = k] \cap A)}{Q(A)} = \frac{Q([\sum_{s=t+1}^N Z_s = k-l] \cap A)}{Q(A)} =$$
$$= \frac{Q(\sum_{s=t+1}^N Z_s = k-l)Q(A)}{Q(A)} = \binom{N-t}{k-l}q^{k-l}(1-q)^{N-t-k+l}$$

Pri tem smo upoštevali neodvisnost dogodkov $\left[\sum_{s=t+1}^{N} Z_s = k-l\right]$ in A. Z upoštevanjem zgornje zveze dobimo

$$\begin{aligned}
E_Q(X|A) &= E_Q(h_f(S_0, D_N)|A) = \sum_{k=0}^{N} Q(D_N = k|A) h_f(S_0, k) = \\
&= \sum_{k=l}^{N-t-l} \binom{N-t}{k-l} q^{k-l}(1-q)^{N-t-k+l} h_f(S_0, k) = \\
&= \sum_{j=0}^{N-t} \binom{N-t}{j} q^j (1-q)^{N-t-j} h_f(S_0, l+j).
\end{aligned}$$

Ker je $E_Q(X|\mathcal{F}_t) = \sum_{A\in\mathcal{P}_t} E_Q(X|A)\chi_A$ in je $E_Q(X|\mathcal{F}_t)(\omega) = E_Q(X|A)$, je dokaz končan. ■

Posledica 2.3 *Če je $X = f(S_N)$, je cena π_t odvisna samo od $S_t(\omega)$ in neodvisna od $S_0, S_1(\omega), \ldots, S_{t-1}(\omega)$. Velja*

$$\pi_t(X) = \frac{1}{(1+R)^{N-t}} \sum_{j=0}^{N-t} \binom{N-t}{j} q^l (1-q)^{N-t-j} h_f(S_t(\omega), j).$$

Dokaz Spomnimo se, da je $\pi_t(X) = \frac{1}{(1+R)^{N-t}} E_Q(X|\mathcal{F}_t)$ in uporabimo trditev 2.2. ■

Če je $X = X_N$ pogojna terjatev z zapadlostjo N, potem lahko v našem modelu vedno najdemo izvedbeno strategijo Φ, saj je trg poln. V binomskem modelu je portfelj podan z zaporedjem $\Phi = (\phi_t)_{t=1}^{N-1}$, kjer je $\phi_t = (\phi_t^1, \phi_t^2)$ par slučajnih spremenljivk. Pri tem ϕ_t^1 pomeni število enot netveganega vrednostnega papirja in ϕ_t^2 število enot tveganega vrednostnega papirja v portfelju od časa $t-1$ do časa t. Slučajni proces Φ je napovedljiv, tj. ϕ_t je merljiv glede na $\mathcal{F}_{t-1}$. Lema 1.1 pove, da je ϕ_t odvisen samo od $S_0, S_1, \ldots, S_{t-1}$. V času $t-1$ poznamo vrednosti slučajnih spremenljivk $S_0, S_1, \ldots, S_{t-1}$. Označimo jih s $s_0, s_1, \ldots, s_{t-1}$ in zapišemo

$$\phi_t^j = \phi_t^j(s_0, s_1, \ldots, s_{t-1}), \quad j = 1, 2, \quad t = 1, 2, \ldots, N.$$

Potem je

$$\phi_{t+1}(X, S_0, S_1, \ldots, S_{t+1}) = V_{t+1}(\phi) = \phi_t^1(1+R)^{t+1} + \phi_t^2 S_{t+1}$$

Če je $S_{t+1} = S_t(1+g)$, je

$$\phi_{t+1}(X, S_0, S_1, \dots, S_t, S_t(1+g)) = \phi_t^1(1+R)^{t+1} + \phi_t^2 S_t(1+g).$$

Če pa je $S_{t+1} = S_t(1+b)$, pa je

$$\phi_{t+1}(X, S_0, S_1, \dots, S_t, S_t(1+b)) = \phi_t^1(1+R)^{t+1} + \phi_t^2 S_t(1+b).$$

V času t poznamo stanja ekonomije $s_0, s_1, \dots, s_t$. Če želimo v času $t+1$ izplačilo $\phi_{t+1}(X, s_0, \dots, s_t(1+g))$ v primeru, da je ekonomija v dobrem stanju in $\phi_{t+1}(X, s_0, \dots, s_t(1+b))$ v primeru slabega stanja ekonomije, potem oblikujemo portfelj z utežmi

$$\phi_t^1 = \frac{\phi_{t+1}(X, s_0, \dots, s_t(1+g)) - \phi_{t+1}(X, s_0, \dots, s_t(1+b))}{S_t(g-b)}$$

$$\phi_t^2 = \frac{\phi_{t+1}(X, s_0, \dots, s_t(1+g))(1+g) - \phi_{t+1}(X, s_0, \dots, s_t(1+b))(1+b)}{(1+R)^{t+1}(g-b)}.$$

Opazimo, da sta deleža ϕ_t^1 in ϕ_t^2 enaka, kot v modelu z enim obdobjem. Zato je iskanje izvedbenega portfelja (oz. zaščitnega portfelja) enako zaporedju iskanj izvedbenega portfelja za eno obdobje.

Evropsko nakupno opcijo z zapadlostjo N in izvršilno ceno K predstavimo s pogojno terjatvijo

$$X_C(\omega) = \max\{S_N(\omega) - K, 0\}.$$

Evropsko prodajno opcijo z zapadlostjo N in izvršilno ceno K pa s pogojno terjatvijo

$$X_P(\omega) = \max\{K - S_N(\omega), 0\}.$$

Pariteta nakupne in prodajne opcije za $t = 0$ nam da

$$\pi_0(X_C) - \pi_0(X_P) = S_0 - \frac{K}{(1+R)^N}.$$

Označimo z $m(K)$ najmanjše celo število, ki je večje od

$$\frac{\log K - \log(S_0(1+b)^N)}{\log(1+g) - \log(1+b)}.$$

Potem dobimo:

Trditev 2.4 *Za evropsko nakupno opcijo velja $X_C(\omega) > 0$ natanko tedaj, ko je $D_N(\omega) \geq m(K)$.*

Dokaz Z uporabo formule (V.2) dobimo

$$S_N > K \text{ natanko tedaj, ko je}$$

$$S_0(1+g)^{D_N}(1+b)^{N-D_N} > K.$$

To velja natanko tedaj, ko je

$$D_N(\omega)(\log(1+g) - \log(1+b)) > \log K - \log S_0 - N\log(1+b)$$

oziroma

$$D_N(\omega) > \frac{\log K - \log\left(S_0(1+b)^N\right)}{\log(1+g) - \log(1+b)}. \qquad \blacksquare$$

Z uporabo trditve 2.1 potem dobimo

Izrek 2.5 *Cena evropske nakupne opcije je*

$$\pi_0(X_C) = \tfrac{S_0}{(1+R)^N} \textstyle\sum_{l=m(K)}^{N} \binom{N}{l} q^l (1-q)^{N-l}(1+g)^l(1+b)^{N-l}$$
$$- \tfrac{K}{(1+R)^N} \textstyle\sum_{l=m(K)}^{N} \binom{N}{l} q^l (1-q)^{N-l}.$$

3 Black-Scholesova formula

Binomski model lahko uporabimo za modeliranje v časovnem intervalu $[0, T]$. Interval razdelimo na N enakih podintervalov in predpostavimo, da je trgovanje možno ob časih $0, \frac{T}{N}, \frac{2T}{N}, \ldots \frac{(N-1)T}{N}, T$. Čas t v modelu potem pomeni čas $\frac{tT}{N}$ v $[0, T]$.

Da opozorimo na odvisnost od N, bomo pisali $Z_{N,t}$ in $D_{N,t}$ namesto Z_t in D_t, ipd. Netvegan vrednostni papir potem zavzame vrednosti

$$B_{N,t} = (1 + R_N)^t,$$

vrednosti tveganega vrednostnega papirja pa so

$$S_{N,t} = S_0(1+g_N)^{D_{N,t}}(1+b_N)^{t-D_{N,t}}.$$

Naravna verjetnost je $p_N \in (0, 1)$.

Z R označimo obrestni faktor pri zveznem obrestovanju tako, da je

$$(1 + R_N)^N = e^{TR}$$

oziroma

$$1 + R_N = e^{\frac{T}{N}R}.$$

Če je

$$\begin{aligned} H_N(\omega) &= \log S_{N,N}(\omega) - \log S_0, \\ &= D_{N,N}(\omega)\log(1+g_N) + (N - D_{N,N}(\omega))\log(1+b_N), \\ &= D_{N,N}(\omega)\left(\log(1+g_N) - \log(1+b_N)\right) + N\log(1+b_N), \end{aligned}$$

je potem

$$S_{N,N}(\omega) = S_0 e^{H_N(\omega)}$$

Slučajna spremenljivka $D_{N,N}$ ima Bernoullijevo porazdelitev s parametroma N in p_N. Potem je

$$E_{P_N}(H_N) = Np_N\log(1+g_N) + N(1-p_N)\log(1+b_N)$$

in

$$\mathrm{Var}(H_N) = Np_N(1-p_N)(\log(1+g_N) - \log(1+b_N))^2.$$

Iz zgodovinskih podatkov lahko poiščemo približke za povprečno vrednost in za varianco slučajne spremenljivke $\frac{1}{T}H_N$:

$$\mu = \frac{1}{T}E_{P_N}(H_N) = \frac{1}{T}E_{P_N}\left(\log\frac{S_{N,N}}{S_0}\right),$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\mathrm{Var}_{P_N}(H_N) = \frac{1}{T}\mathrm{Var}_{P_N}\left(\log\frac{S_{N,N}}{S_0}\right).$$

Potem lahko poiščemo take g_N, b_N in p_N, da veljata naslednji zvezi:

$$p_N\log(1+g_N) + (1-p_N)\log(1+b_N) = \frac{T}{N}\mu,$$

$$p_N(1-p_N)(\log(1+g_N) - \log(1+b_N))^2 = \frac{T}{N}\sigma^2.$$

Ker imamo 3 neznanke in le dve enačbi, dodamo še predpostavko, da zaporedje enega slabega in enega dobrega razvoja ekonomije, ne spremeni vrednosti:

$$(1+g_N)(1+b_N) = 1, \text{ oz}$$

$$\log(1+g_N) = -\log(1+b_N).$$

Potem dobimo

$$\log(1+g_N) = \sqrt{\frac{T}{N}\sigma^2 + \frac{T^2}{N^2}\mu^2} = -\log(1+b_N)$$

in

$$p_N = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma\sqrt{\frac{N}{T} + (\frac{\mu}{\sigma})^2}}$$

Ko je N dovolj velik, aproksimiramo g_N, b_N in p_N z

$$g_N = e^{\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma} - 1, \quad b_N = e^{-\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma} - 1, p_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{N}}. \tag{V.7}$$

Vzamemo še

$$R_N = e^{\frac{T}{N}R} - 1.$$

Z uporabo zgornjih aproksimacij izračunamo matematično upanje in varianco za H_N glede na ekvivalentno martingalsko verjetnost Q_N.

Lema 3.1 *Matematično upanje in varianca H_N sta enaka*

$$E_{Q_N}(H_N) = (2q_N - 1)\sigma\sqrt{NT},$$

$$Var_{Q_N}(H_N) = 4q_N(1-q_N)\sigma^2 T.$$

Dokaz Uporabimo zvezo med H_N in $D_{N,N}$ ter dejstvo, da je $D_{N,N}$ porazdeljen binomsko in dobimo

$$\begin{aligned} E_{Q_N}(H_N) &= E_{Q_N}(D_{N,N})\log(1+g_N) + (N - E_{Q_N}(D_{N,N}))\log(1+b_N) \\ &= N_{q_N}\log(1+g_N) + N(1-q_N)\log(1+b_N). \end{aligned}$$

Upoštevamo še zvezo (V.7) in imamo

$$\begin{aligned} E_{Q_N}(H_N) &= Nq_N\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma - N(1-q_N)\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma \\ &= (2q_N - 1)\sigma\sqrt{NT}. \end{aligned}$$

Podobno izračunamo še varianco

$$\begin{aligned} Var_{Q_N}(H_N) &= Var_{Q_N}(D_{N,N})(\log(1+g_N) - \log(1+b_N))^2 \\ &= Nq_N(1-q_N)(\log(1+g_N) - \log(1+b_N))^2 \\ &= 4q_N(1-q_N)\sigma^2 T. \end{aligned}$$

■

Radi bi poiskali limito Cox-Cross-Rubensteinovega modela, ko gre N proti neskončno. Najprej poiščemo limiti za matematično upanje in varianco:

Lema 3.2 *Velja*

$$\lim_{N\to\infty} E_{Q_N}(H_N) = RT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

in

$$\lim_{N\to\infty} Var_{Q_N}(H_N) = T\sigma^2.$$

Dokaz Z uporabo izraza za q_N in leme 3.1 imamo

$$E_{Q_N}(H_N) = \frac{2e^{\frac{TR}{N}} - e^{\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma} - e^{-\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma}}{\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma\left(e^{\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma} - e^{-\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma}\right)}\sigma^2 T.$$

Z uporabo L'Hôpitalovega pravila pokažemo, da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2 a} - e^x - e^{-x}}{x(e^x - e^{-x})} = a - \frac{1}{2}$$

za vsak $a \in \mathbb{R}$. Za $x = \frac{\sigma T}{N}$ in $a = \frac{R}{\sigma^2}$ potem dobimo

$$\lim_{N\to\infty} E_{Q_N}(H_N) = \left(\frac{R}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)\sigma^2 T = RT - \frac{1}{2}\sigma^2 T.$$

Ker je $\lim_{N\to\infty} q_N = \frac{1}{2}$, iz leme 3.1 dobimo še $\lim_{N\to\infty} Var_{Q_N}(H_N) = \sigma^2 T$. ■

Lema 3.3 *Normalizirane slučajne spremenljivke*

$$H_N^* = \frac{H_N - E_{Q_N}(H_N)}{\sqrt{Var_{Q_N}(H_N)}}$$

konvergirajo po zakonu k standardni normalni porazdelitvi.

Dokaz Slučajna spremenljivka $D_{N,N}$ je porazdeljena binomsko in zanjo velja

$$Q(D_{N,N} = k) = \binom{N}{k} q_N^k (1 - q_N)^{N-k}$$

ter

$$E_{Q_N}(D_{N,N}) = Nq_N \text{ in } Var_{Q_N} = Nq_N(1 - q_N).$$

Za normalizirane slučajne spremenljivke potem velja

$$D^*_{N,N} = \frac{D_{N,N} - E_{Q_N}(D_{N,N})}{\sqrt{Var_{Q_N}(D_{N,N})}} = \frac{D_{N,N} - Nq_N}{\sqrt{Nq_N(1-q_N)}}$$

in

$$\begin{aligned}
H^*_N &= \frac{D_{N,N}\log(1+g_N) + (N - D_{N,N})\log(1+b_N) - 2(q_N-1)\sigma\sqrt{NT}}{2\sigma\sqrt{q_N(1-q_N)T}} \\
&= D_{N,N}\frac{D_{N,N}\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma - (N-D_{N,N})\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma - 2(q_N-1)\sigma\sqrt{NT}}{2\sigma\sqrt{q_N(1-q_N)T}} \\
&= \frac{2D_{N,N} - N - (2q_N-1)N}{2\sqrt{Nq_N(1-q_N)}} = \frac{D_{N,N} - Nq_N}{\sqrt{Nq_N(1-q_N)}} = D^*_{N,N}.
\end{aligned}$$

Po centralnem limitnem izreku slučajne spremenljivke $D^*_{N,N}$ konvergirajo po zakonu k standardni normalni porazdelitvi. Ker je $H_N = D^*_{N,N}$, velja enako tudi za H^*_N. ■

Posledica 3.4 *Zaporedje slučajnih spremenljivk H_N konvergira po zakonu k slučajni spremenljivki, ki je porazdeljena normalno z matematičnim upanjem $RT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ in varianco $\sigma^2 T$.*

Dokaz Označimo $\gamma_N = E_{Q_N}(H_N)$ in $\sigma_N = \sqrt{Var_{Q_N}(H_N)}$. Lema 3.2 nam pove limiti zaporedij γ_N in σ_N, ko gre N proti neskončno. Ker H^*_N konvergirajo k standardni normalni porazdelitvi, zaporedje

$$H_N = \sigma_N H^*_N + \gamma_N$$

konvergira k normalni porazdelitvi z varianco $\sigma^2 T$ in matematičnim upanjem $RT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$. ■

Informacijo o konvergenci H_N lahko z uporabo zveze

$$S_{N,N} = S_0 e^{H_N}$$

uporabimo za izračun limite vrednosti cenovnih funkcionalov za dano pogojno terjatev. Oglejmo si to za primera evropske nakupne in evropske prodajne opcije. Pripadajoči pogojni terjatvi z zapadlostjo T sta

$$X_C = \max\{S_T - K, 0\} \text{ in}$$

$$X_P = \max\{K - S_T, 0\}.$$

V binomskem modelu z N obdobji imamo

$$\begin{aligned}\pi_0^N(X_P) &= \frac{1}{(1+R_N)^N} E_{Q_N}(max\{K - S_{N,N}, 0\}) \\ &= e^{-RT} E_{Q_N}(\max\{K - S_0 e^{H_N}, 0\}).\end{aligned}$$

Z uporabo te zveze dobimo

$$\pi_0^N(X_C) = \pi_0^N(X_P) + S_0 - e^{-RT}K. \tag{V.8}$$

Ker je funkcija $f(x) = \max\{K - S_0 e^x, 0\}$ zvezna, v limiti dobimo

$$\pi_0(X_P) = \lim_{N\to\infty} \pi_0^N(X_P) = e^{-RT}E(\max\{K - S_0 e^H, 0\}),$$

kjer je H normalno porazdeljena z matematičnim upanje $RT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ in varianco $\sigma^2 T$.

Izrek 3.5 *(Black - Scholesova formula) Cena evropske prodajne opcije je v limiti $N \to \infty$ enaka*

$$\pi_0(X_P) = \lim_{N\to\infty} \pi_0^N(X_P) = Ke^{-RT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1),$$

kjer je

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}e^{RT}) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

in

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

je porazdelitvena funkcija standardne normalne porazdelitve.

Za ceno evropske nakupne opcije imamo

$$\pi_0(X_C) = \lim_{N\to\infty} \pi_0^N(X_C) = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-RT}\Phi(d_2).$$

Dokaz Računamo po definiciji in dobimo

$$\begin{aligned}\pi_0(x_P) &= e^{RT}E(\max\{K - S_0 e^H, 0\}) = e^{-RT}E(f(H)) \\ &= \frac{e^{-RT}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{1}{2}(\frac{y - RT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}})^2} dy \\ &= \frac{e^{-RT}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma\sqrt{T}z + RT - \frac{\sigma^2}{2}T) e^{-\frac{z^2}{2}} dz,\end{aligned}$$

kjer smo uporabili substitucijo $z = \frac{y-RT+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$. Funkcija $f(y)$ je neničelna za tiste z, pri katerih je

$$K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z+RT-\frac{\sigma^2}{2}T} > 0$$

oziroma

$$z < -\frac{\ln(\frac{S_0}{K}e^{RT}) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} = -d_2.$$

Ker je $\sigma\sqrt{T}z - \frac{z^2}{2}T - \frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2$, dobimo

$$\pi_0(X_P) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}e^{-RT}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2}dz$$

Z uvedbo nove spremenljivke $u = z - \sigma\sqrt{T}$ v drugi integral dobimo

$$\pi_0(x_P) = Ke^{-RT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1).$$

Paritetna zveza $\pi_0^N(X_C) = \pi_0^N(X_P) + S_0 - Ke^{-RT}$ nam v limiti $N \to \infty$ da

$$\begin{aligned}\pi_0(X_c) &= \lim_{N\to\infty}\pi_0^N(X_c) = S_0(1-\Phi(-d1)) + Ke^{-RT}(\Phi(-d_2)-1)\\ &= S_0\Phi(d_1) - Ke^{-RT}\Phi(d_2).\end{aligned}$$

■