Poglavje III

Finančni instrumenti

V tem poglavju bomo predstavili nekatere osnovne in izvedene finančne instrumente. Naprej na kratko povzemimo osnove obrestovanja in obrestnih mer.

1 Obresti

Vrednost denarja se v času spreminja (npr. zaradi inflacije), izposoja denarja prinaša obresti, različni vrednostni papirji imajo donos (ali izgubo). Včasih moramo izračunati koliko denarja je potrebno naložiti danes, da bomo v prihodnosti lahko poravnali znane obveznosti. To so nekateri od razlogov, zakaj bomo potrebovali obrestni račun. Zato vpeljemo dva faktorja: $A(0, t)$ imenujemo **obrestovalni faktor** in pove, koliko bo v času t v prihodnosti vreden 1 naložen danes. $D(0, t)$ imenujemo **diskontni faktor** in pove, koliko moramo naložiti danes, da bomo v času T v prihodnosti imeli 1. Običajno je $A(0, t) > 1$ in $D(0, t) < 1$. Velja $A(0, t) \cdot D(0, t) = 1$.

Oglejmo si, kakšna sta obrestovalni in diskontni faktor pri različnih načinih obrestovanja.

Pri **navadnem obrestovanju** z **obrestno mero** R velja

$$A(0, t) = 1 + Rt \text{ in } D(0, t) = (1 + Rt)^{-1}.$$

Čas t merimo v letih.

Pri **obrestnem obrestovanju** pripišemo obresti k glavnici in jih nato obrestujemo skupaj z glavnico. Ločimo **diskretno** in **zvezno obrestovanje**. Pri diskretnem pripišemo obresti k-krat letno v enakih časovnih zamikih. Običajno je $k \in \{1, 2, 4, 12, 365, \ldots\}$. Če je $k = 1$, govorimo o **letnem** ali **enostavnem**

obrestovanju, če je $k = 2$ o **polletnem obrestovanju**, za $k = 4, 12, 365$, pa o **četrtletnem, mesečnem** in **dnevnem obrestovanju**. Obrestovalni in diskontni faktor za $t = \frac{h}{k}$, $h \in \mathbb{N}$ sta

$$A\left(0, \frac{h}{k}\right) = \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^h \text{ in } D\left(0, \frac{h}{k}\right) = \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^{-h}.$$

Za t med $\frac{h}{k}$ in $\frac{h+1}{k}$ vzamemo linearno interpolacijo. Obrestno mero R_k imenujemo **nominalna obrestna mera**. Za lažjo primerjavo donosov pri obrestovanju z različnimi k vpeljemo **efektivno obrestno mero** R_E:

$$R_E = \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^k - 1.$$

Efektivna obrestna mera pove, kakšni obrestni meri ob navadnem obrestovanju ustreza dana obrestna mera R_k za $k \geq 2$. Velja še

$$A\left(0, \frac{h}{k}\right) = \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^h = (1 + R_E)^{\frac{h}{k}} \text{ in } D\left(0, \frac{h}{k}\right) = \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^{-h} = (1 + R_E)^{\frac{h}{k}}.$$

Zvezno obrestovanje izpeljemo kot limito diskretnega obrestovanja, ko velja $k \to \infty$ in je nominalna obrestna mera R neodvisna od k. Potem je

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{R}{k}\right)^k = e^R.$$

Nominalno obrestno mero R pri zveznem obrestovanju imenujemo tudi **moč obresti**. Pripadajoča efektivna obrestna mera je

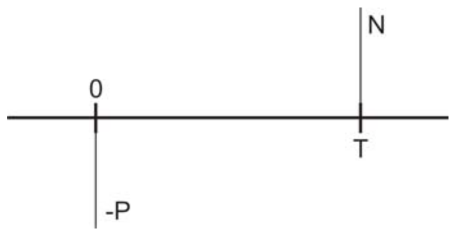
$$R_E = e^R - 1.$$

Obrestovalni in diskontni faktor sta enaka

$$A(0, t) = e^{Rt} \text{ in } D(0, t) = e^{-Rt}.$$

2 Obveznice

Obveznica je enostaven vrednostni papir. Ločimo **kuponske** (angl. *coupon bond*) in **brezkuponske obveznice** (angl. *zero–coupon bond*). Investitor plača v času $t = 0$ ceno (ali začetno vrednost) P in prejme ob dospetju T nominalno vrednost N. Rečemo, da se obveznica prodaja **z diskontom** $D(0, T) = \frac{P}{N}$. Dospelost (rečemo tudi zapadlost ali ročnost) podajamo v letih. Ločimo



Slika III.1: Denarni tok brezkuponske obveznice

kratkoročne obveznice z zapadlostjo $T \in \left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\frac{3}{4}, 1\right\}$, in dolgoročne z zapadlostjo $T \in \{2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$. Poznamo tudi **večne obveznice**, ki jih tu ne bomo obravnavali. Denarni tok brezkuponske obveznice ponazorimo z naslednjim grafom:

Pri brezkuponski obveznici je $D = D(T) = D(0, T) = \frac{P}{N}$ diskontni faktor in

$$R = R(0, T) = \frac{1}{D^{1/T}} - 1 \tag{III.1}$$

njena nominalna obrestna mera. R imenujemo tudi donos obveznice, to je letna stopnja rasti vrednosti obveznice. Velja še

$$P = \frac{N}{(1 + R)^T}.$$

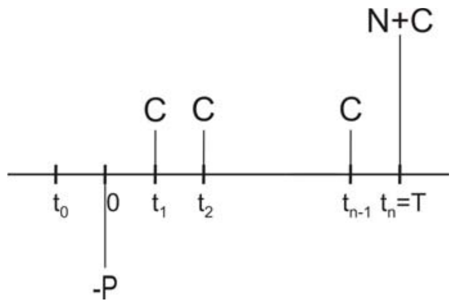
Kuponska obveznica poleg izplačila **nominalne vrednosti** N v času zapadlosti T prinaša tudi izplačila kuponov v časih $0 < t_1 < \cdots < t_n = T$. Praviloma so vsa izplačila kuponov enaka, recimo z vrednostjo C, in vsi časovni intervali $t_{i+1} - t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$ enaki. Pišemo $\Delta = t_{i+1} - t_i$. Tipično je $\Delta \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ in je zapadlost T eno ali več let. Investitor plača v času $t = 0$ ceno P. Če je P manjši kot, enak, ali večji kot N, potem se obveznica prodaja pod, na ali nad nominalno (ali par) vrednostjo. Če je $N - P > 0$, potem se prodaja **z diskontom** $N - P$, če pa je $P - N > 0$, potem se prodaja **s premijo** $P - N$. Razmerje $c = \frac{C}{N}$ imenujemo **kuponska obrestna mera**, $c' = \frac{c}{\Delta} = \frac{C}{N\Delta}$ pa **nominalna obrestna mera.** Obveznica običajno kotira po svoji **čisti** (ali **enotni**) ceni Q, za katero velja

$$Q = P - A,$$

kjer so A akumulirane obresti:

$$A = \frac{-t_0}{t_1 - t_0} C.$$

Pri tem je $-t_0$ čas, ki je potekel od izdaje ali od plačila zadnjega kupona. Denarni tok kuponske obveznice ponazori naslednji graf:



Slika III.2: Denarni tok kuponske obveznice

Na kuponsko obveznico s kuponi $C_1, C_2, \ldots C_n$, ceno P in nominalno vrednostjo N lahko gledamo kot na n brezkuponskih obveznic z ročnostmi $t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ in nominalnimi vrednostmi zaporedoma $C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$ in $C_n + N$. S $P_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ označimo cene teh obveznic. Ker je denarni tok ene kuponske obveznice enak denarnemu toku n brezkuponskih obveznic, mora biti po zakonu ene cene tudi cena obeh enaka:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i \tag{III.2}$$

Označimo z $D(0, t_i)$ diskontni faktor i-te obveznice. $D(0, t_i)$ predstavlja ceno brezkuponske obveznice z nominalno vrednostjo 1 in zapadlostjo t_i. Potem formulo (III.2) lahko zapišemo tudi v obliki:

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i D\left(0, t_i\right) + N D\left(0, t_n\right). \tag{III.3}$$

To formulo imenujemo **formula za vrednotenje obveznic**. Če privzamemo, da so vsi kuponi enaki in je obrestna mera konstantna, potem dobimo

$$P = C \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+R)^{t_i}} + \frac{N}{(1+R)^{t_n}}.$$

Če je še $t_i = i\Delta$, potem ima formula za vrednotenje obveznic obliko

$$P = N\left(\frac{c\Big((1+R)^T - 1\Big)}{(1+R)^T} + \frac{\Big((1+R)^\Delta - 1\Big)}{(1+R)^\Delta}\right).$$

Obveznice so netvegan (ali manj tvegan) finančni instrument. Obveznice izdajajo tako države kot državne inštitucije, kot tudi podjetja in druge gospodarske ustanove. Bonitetne agencije podajajo bonitetno oceno za različne izdajatelje. Bonitetna ocena pove, kolikšno je kreditno tveganje izdajatelja. Najbolj znane bonitetne agencije so npr. Standard & Poor's, Moody's,... Bonitetne ocene pa so od AAA(najboljši), AA,... do D(neplačilo).

3 Časovna struktura obrestnih mer

Fiksirajmo bonitetno oceno izdajateljev brezkuponskih obveznic, npr. AAA. Za vsako ročnost T poznamo obrestno mero $R(0, T)$ za to ročnost. Privzemimo, da je $R(0, T)$ efektivna obrestna mera in da je obrestovanje zvezno.

Funkcijo $T \to R(0, T)$ za vse razpoložljive ročnosti imenujemo **časovna struktura obrestnih mer**. Cena brezkuponske obveznice z nominalno vrednostjo $N = 1$ in zapadlostjo T je potem enaka:

$$D(0, T) = \frac{1}{(1 + R(0, T))^T}.$$

Lahko se zgodi, da za nekatere ročnosti brezkuponske obveznice niso na voljo, so pa na voljo kuponske obveznice z izplačili kuponov ob teh časih. Potem iz cen teh obveznic lahko z obratom formule (III.3) za vrednotenje kuponskih obveznic izračunamo vrednosti neznanih obrestnih mer. Poglejmo si konkreten zgled:

Zgled 3.1 Predpostavimo, da imamo 4 obveznice, eno brezkuponsko in 3 kuponske vse z nominalno vrednostjo $N = 1000$. Dospelost brezkuponske obveznice je 6 mesecev in cena 982, cena prve kuponske obveznice s polletnim kuponom je 999,1, dospelost eno leto in nominalna obrestna mera 4%. Druga kuponska obveznica ima polletne kupone z nominalno obrestno mero 6%, dospelost 18 mesecev in ceno 1032,5. Zadnja kuponska obveznica ima letne kupone, kuponsko obrestno mero $4,5\%$, dospelost 2 leti in pol, naslednji kupon čez pol leta in ceno $1053,45$. Poišči strukturo obrestnih mer za $T \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$.

Iz formule (III.3) za vrednotenje obveznic dobimo naslednje zveze med diskontnimi faktorji:

$$x_1 = D\left(0, \frac{1}{2}\right), x_2 = D\left(0, 1\right), x_3 = D\left(0, \frac{3}{2}\right), x_4 = D\left(0, \frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
1000x_1 &= 982\\
20x_1 + 1020x_2 &= 999,1\\
30x_1 + 30x_2 + 1030x_3 &= 1032,5\\
45x_1 + 45x_3 + 1045x_4 &= 1053,45.
\end{aligned}$$

Dobljeni sistem linearnih enačb ima rešitev $x_1 = 0,982$,$x_2 = 0,960$, $x_3 = 0,946$ in $x_4 = 0,925$. Iskane vrednosti za obrestne mere so:

$$\begin{aligned}
R\left(0, \frac{1}{2}\right) &= 3,6\%\\
R(0,1) &= 4,2\%\\
R\left(0, \frac{3}{2}\right) &= 3,8\%\\
R\left(0, \frac{5}{2}\right) &= 3,2\%.
\end{aligned}$$

□

Obrestno mero $R(0,T)$ imenujemo tudi **trenutna obrestna mera** (angl. *spot interest rate*). To je obrestna mera, ki je pogodbena v času $t = 0$ za obdobje od 0 do T. Poleg trenutnih obrestnih mer se lahko v času $t = 0$ pogodimo tudi za obrestno mero za investicijo, ki se začne v času S in konča v času T (za $0 < S < T$). To obrestno mero označimo z $R(0,S,T)$ in jo imenujemo **terminska obrestna mera** (angl. *forward interest rate*). Ker ne dovolimo arbitraže, morata dve investiciji:

- tista v obdobju od 0 do T z obrestno mero $R(0,T)$,
- tista v obdobju od 0 do S z obrestno mero $R(0,S)$ in reinvesticijo za obdobje od S do T po terminski obrestni meri $R(0,S,T)$,

ustvariti enako akumulirano vrednost v času T. Zato mora veljati:

$$(1 + R(0,T))^T = (1 + R(0,S))^S (1 + R(0,S,T))^{T-S}.$$

Z uporabo te formule lahko izpeljemo terminsko obrestno mero iz trenutnih obrestnih mer.

Zgled 3.2 Predpostavimo naslednje trenutne EURIBOR obrestne mere:

$$\begin{aligned}
R\left(0, \frac{1}{12}\right) &= 3\%\\
R\left(0, \frac{1}{4}\right) &= 3,2\%\\
R\left(0, \frac{1}{2}\right) &= 3,3\%\\
R\left(0, \frac{3}{4}\right) &= 3,5\%.
\end{aligned}$$

Izračunajmo nekaj možnih terminskih obrestnih mer:

$$R\left(0, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right) = 3,29\% \quad R\left(0, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{2}\right) = 3,35\%$$
$$R\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = 3,83\% \quad R\left(0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right) = 3,37\% \qquad \square$$

4 Terminske pogodbe in terminski posli

Terminska pogodba (angl. *future*) je zelo natančna pogodba, v kateri se določi kaj, kdaj, kje in za kakšno ceno bo dostavljeno. Določeni so torej vrsta blaga, **datum izročitve, ročnost pogodbe** in **izročitvena cena** (angl. *settlement price*).

Terminske pogodbe so standardizirane. V njih se natančno določi vrsto blaga, njegovo kvaliteto (npr. pomarančni sok kvalitete A, z Brix faktorjem ne manj od 57, s faktorjem kislosti ne manj od 13 proti 1 in ne več od 19 proti 1, s faktorjema za barvo in okus obema več od 37).

Večina kupcev/prodajalcev uporablja terminske posle za svoje investicije in ne za nakup blaga. Zato večina kupcev/prodajalcev zapre svoje pozicije pred dnem dospetja, tako da vstopi v nasprotno pogodbo.

Obe strani v pogodbi imata obveznosti:

- dolga stran kupi premoženje,
- kratka stran proda premoženje.

S terminskimi pogodbami se dnevno trguje na organiziranem trgu (borzah). Terminske pogodbe se nanašajo na zelo veliko različnih vrst premoženja, ki je bodisi realno bodisi finančno. Npr. razne vrste blaga, devozne tečaje, delnice, obrestne mere, delniški indeksi, itd. Premoženje, na katero se terminska pogodba nanaša, imenujemo **osnovno premoženje** ali **osnovni instrument** (angl. *underlying asset*).

V času $t = 0$ ni denarnih tokov. Zaradi zmanjšanja tveganja mora investitor odpreti **vzdrževalni račun** (angl. *margin account*) pri svojem posredniku in nanj položiti **začetno kritje** (angl. *initial margin*). Kritje na računu je potrebno vzdrževati in poskrbeti, da je na njem vedno več sredstev, kot je **vzdrževano kritje** (angl. *maintainance margin*). Na koncu vsakega trgovalnega dne se na vzdrževanem računu obračuna dobiček/izguba (angl. *marking-to-market*. Investitorjev dobiček ali izguba se določita z razliko cen terminskih pogodb ob koncu zadnjega in ob koncu prejšnjega trgovalnega dne. Oglejmo si to na konkretnem zgledu:

Zgled 4.1 Investitor kupi 5. junija dve terminski pogodbi za zlato z datumom izročitve v decembru in izročitveno ceno \$600 za unčo zlata. Standardizirana terminska pogodba za zlato se nanaša na 100 unč zlata. Začetno kritje je \$2000 za vsako pogodbo in vzdrževano kritje je \$1500 za vsako pogodbo. Če ob koncu trgovalnega dne cena terminske pogodbe za zlato z izročitvijo decembra pade/zraste ima investitor izgubo/dobiček:

datum	cena terminske pogodbe	dnevna izguba/ dobiček	skupna izguba/ dobiček	stanje na vzdrževanem računu
	600			4000
5.6.	597	-600	-600	3400
13.6.	593,30	-420	-1340	2660
				+ 1340
19.6.	587,00	-1140	-2600	2740
				+1260
26.6.	592,30	+260	-1540	5060

□

Ko stanje na vzdrževanem računu pade pod vzdrževano kritje, mora investitor nakazati toliko sredstev, da je na računu spet toliko sredstev, kolikor je zahtevano začetno kritje. Če je na računu stanje nad tem zahtevanim začetnim kritjem, ima investitor pravico dvigniti sredstva nad tem zneskom. Tudi posrednik mora vzdrževati podoben račun pri klirinški hiši.

Vpeljimo nekaj oznak. S T označimo čas izročitve blaga ali sredstev, ki so osnovno premoženje, na katerega se nanaša terminska pogodba. S S_t označimo trenutno ceno osnovnega premoženja v času $t \in [0, T]$. S K označimo izročitveno ceno določeno s terminsko pogodbo. S F_t označimo ceno, ki kotira na borzi v času t za terminske pogodbe s časom poravnave v T. Predpostavimo, da velja $F_0 = K$.

Cena terminske pogodbe S_t konvergira k trenutni ceni, ko gre $t \to T$:

$$\lim_{t \to T} F_t = S_T.$$

To se zgodi, ker bi sicer imeli arbitražo. Če je cena v času t zelo blizu T nad trenutno ceno, potem arbitražo ustvarimo z naslednjo strategijo:

1.) prodamo terminsko pogodbo (kratka pozicija),

2.) kupimo enoto osnovnega premoženja,

3.) dostavimo blago kupcu terminske pogodbe.

Če je cena v času t zelo blizu T pod trenutno ceno, potem ustvari arbitražo naslednja strategija:

1.) kupimo terminsko pogodbo,

2.) počakamo na dostavo,

3.) prodamo blago po trenutni ceni.

Kot smo že omenili, je namen terminskih pogodb dvojen: investicije ali nakup blaga za porabo. Mi se bomo posvetili investicijskim terminskim pogodbam. Te so praviloma zaprte pred dnem izročitve.

Z V_t za $t \in [0, T]$ označimo vrednost terminske pogodbe v času t na strani kupca. Na strani prodajalca je ta vrednost $-V_t$. Privzemimo najprej, da je osnovno premoženje brez prihodkov in obveznosti (brez dividend, kuponov, ipd.). Z R označimo netvegano obrestno mero. Potem je diskontni faktor

$$D(t, T) = e^{-R(T-t)}$$

kjer upoštevamo zvezno obrestovanje. Trenutna vrednost terminske pogodbe v času t je enaka

$$V_t = S_t - KD(t, T) = S_t - Ke^{-R(T-t)}.$$

Trditev 4.2 *Za ceno terminske pogodbe v času $t = 0$ mora veljati*

$$F_0 = S_0 e^{RT}$$

Dokaz Pokažimo, da neenakost med F_0 in $S_0 e^{RT}$ pripelje do arbitraže.

Če je $F_0 > S_0 e^{RT}$, je arbitražna strategija naslednja:

1.) izposodimo si S_0 denarja po obrestni meri R,

2.) kupimo eno enoto osnovnega premoženja,

3.) prodamo terminsko pogodbo ročnostjo T.

Cena te strategije je v času $t = 0$ enaka 0, v času $t = T$ pa je $F_0 - S_0 e^{RT} > 0$

Če pa je $F_0 < S_0 e^{RT}$, potem lahko arbitražo ustvari lastnik osnovnega premoženja:

1.) proda premoženje po S_0,

2.) vloži denar po netvegani obrestni meri R,

3.) kupi terminsko pogodbo za nakup premoženja po $K = F_0$

Cena te strategije v času $t = 0$ je enaka 0, v času $t = T$ pa $S_0 e_{RT} - F_0 > 0$. ■

Podobno premislimo, da mora veljati

$$F_0 = S_0 e^{RT} - Ie^{R(T-t)},$$

če osnovni instrument izplača znano dividendo I v času $t \in (0, T)$. Če pa ne poznamo denarnega toka osnovnega instrumenta, pač pa le njegov donos R_0, potem mora veljati:

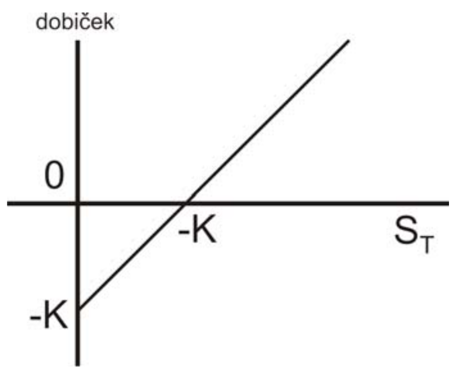
$$F_0 = S_0 e^{(R-R_0)T}.$$

Zgled 4.3 Poišči vrednost terminske pogodbe za nakup ene delnice čez 3 mesece, če je trimesečni EURIBOR 2,4% in je trenutna vrednost delnice enaka $S_0 = 39,5$.

Po trditvi 4.2 mora biti

$$K = F_0 = S_0 e^{RT} = 39,82.$$

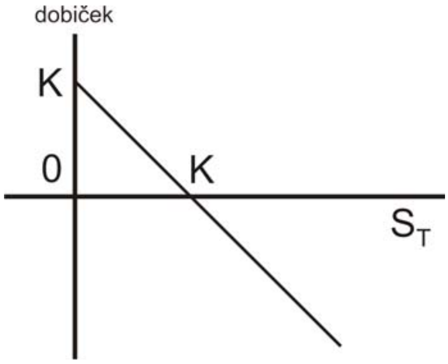
Vrednost terminske pogodbe ob izročitvi lahko ponazorimo tudi z grafoma III.3 in III.4



Slika III.3: $V_t = S_T - K$ (dolga pozicija)

Terminski posli (angl. *forwards*) so podobni terminskim pogodbam. Bistvena razlika je, da so sklenjeni na prostem trgu (angl. *over-the-counter, OTC*) in da njihova vrednost ni izračunana dnevno. Zato so bolj tvegani kot terminske pogodbe.

Najpogostejša oblika so terminski posli o deviznih tečajih in obrestnih merah. To je pogodba o deviznem tečaju (obrestni meri), ki se bo uporabil na nek določen dan v prihodnosti za določeno nominalno vsoto denarja (angl.



Slika III.4: $V_t = K - S_T$ (kratka pozicija)

nominal sum). Oglejmo si najprej terminski posel o deviznih tečajih: Označimo s S_t trenutni devizni tečaj ene enote tuje valute f v enotah domače valute d:

$$1f = S_t \cdot d.$$

Npr. če je $S_t = 0,9$ in je $d =$ €, $f =$ \$, potem je \$100 = €90 in €1000 = \$1111, 11.

V terminskem poslu se obe strani dogovorita, da bo v času T uporabljen tečaj K za nominalno vsoto N. Dolga stran bo kupila Nf in zato plačala NKd. Vrednost (profit/izguba) dolge strani je

$$(S_T - K)N.$$

Vrednost za eno enoto valute d je torej

$$V_T := S_T - K.$$

Izračunajmo vrednost tega terminskega posla v času $t \in [0, T]$: (eksponent d pomeni, da se faktor nanaša na domačo valuto, eksponent f, pa da se faktor nanaša na tujo valuto) Poiščimo vrednost naslednje strategije:

1.) izposodimo si $KD^d(t, T)$ v domači valuti v času t do časa T in v času T zamenjamo v valuto f po tečaju K.

2.) kupimo $D^f(t, T)$ v valuti f v času t po ceni S_t in naložimo do časa T.

Vrednost je

$$V_t = -KD^d(t, T) + S_t D^f(t, T) \tag{III.4}$$

To je iskana vrednost terminskega posla v času t. Z upoštevanjem pogoja o neobstoju arbitraže dokažemo nslednjo trditev:

Trditev 4.4 *V času $t = 0$ velja zveza*

$$K = S_0 \frac{D^f(0,T)}{D^d(0,T)} = S_0 e^{T\left(R^d(0,T) - R^f(0,T)\right)} \tag{III.5}$$

Dokaz V času $t = 0$ mora biti $V_0 = 0$. Iz (III.4) sledi, da je

$$K = S_0 \frac{D^f(0,T)}{D^d(0,T)}.$$

Če bi ta zveza ne veljala, potem bi zgoraj opisana strategija (ali njej nasprotna) vodila do arbitraže. ■

Formulo (III.5) imenujemo **paritetna relacija obrestnih mer** (angl. *interest rate parity relation*).

Terminski posel o obrestni meri ali **dogovor o terminski obrestni meri** (angl. *forward rate agreement*, kratko *FRA*) je dogovor med dvema stranema o obrestni meri, ki se bo uporabila v bodočnosti. S K označimo dogovorjeno obrestno mero, ki bo uporabljena na **nominalno vsoto** N (angl. *nominal*) od časa S do časa T, $0 < S < T$. Čas S imenujemo **datum poravnave** (angl. *settlement time*) in čas T **dospetje** (angl. *maturity time*). Dolga stran v dogovoru si izposoja denar, kratka pa ga posoja. Običajno se opravi poravnavo posla v času S. Tedaj je vrednost K enaka trenutni netvegani obrestni meri (EURIBOR $R(S,T)$). Vrednost ene enote v času S je

$$(T - S)(R(S,T) - K)\, D(S,T).$$

Tu namesto zveznega obrestovanja upoštevamo diskretno obrestovanje prilagojeno dolžini obdobja $T - S$. Vrednost poravnave je torej

$$V_S = N(T - S)(R(S,T) - K)\, D(S,T).$$

V času t je vrednost dogovora o terminski obrestni meri enaka

$$V_t^{FRA} = N(T - S)(R(t,S,T) - K)\, D(t,T).$$

Za dokaz te formule uporabimo naslednjo strategijo:

1.) V času t si izposodimo $N(1 + K(T - S))\, D(t,T)$ do T

2.) Istočasno posodimo $ND(t,S)$ do S in potem reinvestiramo dobljeno vsoto do T po trenutni obrestni meri $R(S,T)$.

Pogoj o neobstoju arbitraže ($V_0 = 0$) nam pove, da je

$$K = R(0,S,T).$$

5 Zamenjave

Zamenjava (angl. *swap*) je pogodba med dvema stranema o zamenjavi bodočih denarnih tokov. Pogosto se nanašajo na bodoče vrednosti obrestnih mer ali deviznih tečajev. Lahko se nanašajo tudi na kako drugo tržno spremenljivko. Z zamenjavami se trguje na prostem trgu. Pri **zamenjavah obrestnih mer** (angl. *interest rate swap*, kratko *IRS*) tipično dolga stran zamenja denarne tokove s fiksno obrestno mero za denarne tokove s spremenljivo obrestno mero. Zamenjave se uporablja za zavarovanje naložb (angl. *hedging*) ali pa za pretvorbo ene vrste obveznosti v drugo vrsto (angl. *liability transformation*).

Običajna zamenjava (angl. *plain vanilla* ali *plain vanilla swap*) je pogodba o zamenjavi plačil obrokov obresti na osnovi fiksne obrestne mere, ki jo označimo z R_{SWAP}, za plačila obrokov s spremenljivo obrestno mero (npr. EURIBOR). Obresti se nanašajo na isto nominalno vrednost N. Tipično je dospelost med 2 in 30 leti. Plačila obresti se izvršijo v časih $t_i = i\Delta, \quad i = 1, 2, \dots n$. Tipično je $\Delta \in \{\frac{1}{2}, 1\}$. V času t_{i-1} je znan denarni tok v času t_i, ker takrat poznamo trenutno obrestno mero $R(t_{i-1}, t_i)$. Obrestna mera R_{SWAP} je določena tako, da je vrednost zamenjave V_0 v času $t = 0$ enaka 0. Neto denarni tok za dolgo pozicijo v času t_i je enak

$$N\Delta \left(R(t_{i-1}, t_i) - R_{SWAP}\right).$$

Zamenjavo IRS lahko predstavimo kot vsoto večih dogovorov o terminski obrestni meri FRA: Za vsak $i = 1, 2, \dots, n$ vzamemo FRA z obrestno mero $K = R_{SWAP}$, datumom poravnave t_{i-1} in dospetjem t_i. Pri tem i-ti dogovor o terminski obrestni meri označimo s FRA_i.

V času t je vrednost zamenjave V_t enaka vsoti vrednosti FRA_i, za katere je $t_i > t$:

$$V_t = \sum_{t_i > t} V_t^{FRA_i} = N\Delta \sum_{t_i > t} \left(R(t, t_{i-1}, t_i) - R_{SWAP}\right) \cdot D(t, t_i)$$

Za $t = 0$ mora biti $V_0 = 0$, zato je

$$R_{SWAP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R(0, t_{i-1}, t_i) D(0, t_i)}{\sum_{i=1}^{n} D(0, t_i)}.$$

Obrestna mera zamenjave je konveksna kombinacija terminskih obrestnih mer.

Drugi način za vrednotenje obrestne mere zamenjave IRS je ta, da jo predstavimo kot zamenjavo kuponske obveznice s fiksno nominalno obrestno mero za **obveznico s spremenljivo obrestno mero** (angl. *floater*). Tako obveznico lahko predstavimo z naslednjo strategijo:

- v času t_i naložimo N po trenutni netvegani obrestni meri $R(t_i, t_{i+1})$,
- v času t_{i+1} vzamemo obresti in reinvestiramo nominalno vsoto N.

Vrednost te strategije v času t_i (takoj po izplačilu obresti) je enaka N, v času $t \in (t_i, t_{i+1})$ pa je $N(1 + \Delta R(t_i, t_{i+1})) D(t, t_{i+1})$. Vrednost zamenjave je potem enaka

$$V_t^{SWAP} = V_t^{fl} - V_t^C,$$

kjer je V_t^{fl} vrednost obveznice s spremenljivo obrestno mero in V_t^C vrednost kuponske obveznice v času t. Z uporabo formule za vrednotenje kuponske obveznice (III.3) potem lahko izračunamo V_t^{SWAP}. Ker mora biti $V_0^{SWAP} = 0$, dobimo zvezo

$$R_{SWAP} = \frac{1 - D(0, t_n)}{\Delta \sum_{i=1}^{n} D(0, t_i)}.$$

To zvezo lahko ob znani obrestni meri R_{SWAP} in diskontnih faktorjih $D(0, t_i)$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ uporabimo za izračun $D(0, t_n)$ (metoda obratne formule, angl. *bootstrap*).

6 Opcije

Opcija (angl. *option*) je pogodba podobna terminski pogodbi s to bistveno razliko, da ima nosilec (kupec) pogodbe pravico odločiti se, ali bo nakup/prodaja osnovnega premoženja izvršena. Opcija je torej pogodba med **nosilcem opcije** - dolga stran (angl. *option holder*) in **izdajateljem opcije** - kratka stran (angl. *option writer*), osnovnega premoženja (angl. *the underlying*) po določeni ceni K imenovani tudi **izvršilna cena** (angl. *strike price, exercise price*). Če opcija daje nosilcu pravico nakupa osnovnega premoženja, jo imenujemo **nakupna opcija** (angl. *call option*), če pa daje pravico prodaje, jo imenujemo **prodajna opcija** (angl. *put option*). Sprejem odločitve za nakup/prodajo osnovnega instrumenta imenujemo **izvršitev opcije** (angl. *exercising the option*). Glede na to, kdaj je možna izvršitev opcije, ločimo več vrst opcij. Najbolj enostavna je **evropska opcija** (angl. *European option*), ki daje pravico izvršitve samo ob zapadlosti (angl. *at maturity*). **Ameriška opcija** (angl. *American option*) daje pravico izvršitve kadarkoli do trenutka zapadlosti. Poznamo tudi mnogo drugih vrts opcij, ki jih s skupnim imenom imenujemo **eksotične opcije** (angl. *exotic options*).

Z razliko od terminskih pogodb in poslov ter zamenjav, opcija daje nosilcu pravico in ne obveznosti. Izdajatelj mora upoštevati nosilčevo odločitev. Z opcijami se trguje na organiziranem trgu (prek borz) ali na prostem trgu.

Na organiziranem trgu se trguje predvsem s standardiziranimi opcijami na delnice, terminske pogodbe, različne vrste blaga, itd., na prostem trgu pa z opcijami na obrestne mere in devizne tečaje, idr.

Nosilec opcije mora ob nakupu opcije plačati ceno oz. **premijo za opcijo** (angl. *option premium*). Potem nima več drugih obveznosti. Izdajatelj opcije pa mora pri klirinški hiši voditi podoben vzdrževalni račun kot pri terminski pogodbi (ki pa ni nujno dnevno vrednosten po tržni ceni).

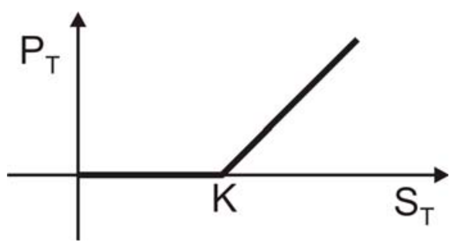
Najbolj pogoste opcije so ameriške, vendar je evropske mnogo lažje vrednotiti in analizirati. Za opcije, s katerimi se trguje na borzah, kotirajo različne izvršilne cene in različni datumi zapadlosti.

Analizirajmo vrednost evropske in ameriške nakupne in prodajne opcije. S $t = 0$ označimo čas izdaje opcije, s $t = T$ pa čas zapadlosti, S_t je cena osnovnega premoženja v času $t \in [0, T]$. Označimo s K izvršilno ceno. Vrednost opcije za nosilca opcije je enaka razliki med ceno osnovnega premoženja v času izvršitve in izvršilno ceno, če je zanj pozitivna. Sicer je vrednost opcije enaka 0. S C_T označimo vrednost nakupne opcije ob zapadlosti in P_T vrednost prodajne opcije ob zapadlosti. Imetnik opcije lahko v vsakem času $t \in (0, T)$ bodisi ne naredi nič, bodisi opcijo proda ali pa, samo v primeru ameriške opcije, izvrši opcijo. V času $t = T$ pa lahko ne naredi nič ali pa izvrši opcijo. Ker smo privzeli, da je nosilec opcije racionalen, bo izvršil nakupno opcijo, če je $S_T > K$ in prodajno opcijo, če je $S_T < K$.

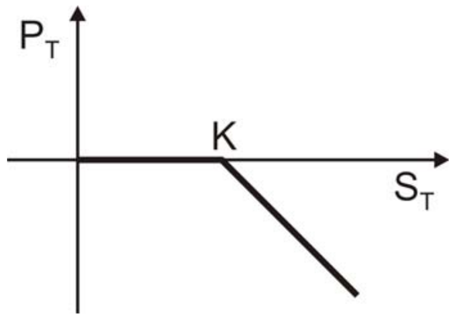
Izplačilo opcije ob času T je potem enako

$$\begin{aligned} C_T &= \max\{S_T - K, 0\} \text{ in} \\ P_T &= \max\{0, K - S_T\}. \end{aligned}$$

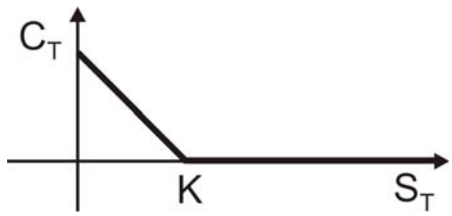
Ker dovolimo tudi kratko prodajo, imamo tako štiri različne možnosti prikazane na naslednjih slikah:



Slika III.5: Dolga nakupna opcija



Slika III.6: Kratka nakupna opcija



Slika III.7: Dolga prodajna opcija

Zgled 6.1 Investitor 25. marca kupi evropsko prodajno opcijo za 10 delnic IBM z izvršilno ceno 70 in zapadlostjo 25. junija. Cena opcije je 7 za eno delnico. Investitor opcije ne proda do zapadlosti. 25. junija izvrši opcijo, če je takrat cena delnic IBM pod 70, če pa je cena nad 70, pa opcije ne izvrši. Investitorjev dobiček izguba sta prikazana na grafu III.9.

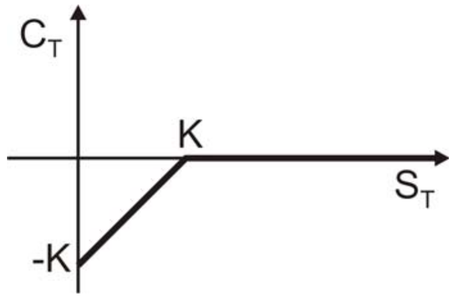
Z nakupom opcij in osnovnega premoženja lahko oblikujemo več različnih strategij. Tu navajamo nekatere od njih skupaj z njihovim izplačilom U_T ob zapadlosti.

1. strategija - zaščitna prodaja (angl. *protective put*):

- kupimo prodajno opcijo z izvršilno ceno K,
- kupimo eno delnico osnovnega premoženja $U_t = \max\{K, S_T\}$,

2. strategija - bikov korak (angl. *bull spread*):

- kupimo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_1,
- prodamo nakupno opcijo z izvršilno ceno $K_2 (> K_1)$,



Slika III.8: Kratka prodajna opcija

Slika III.9: Slika k zgledu 6.1

$$U_T = \begin{cases} 0 & 0 < S_T < K_1 \\ S_T - K_1 & K_1 \le S_T < K_2 \\ K_2 - K_1 & S_T \ge K_2 \end{cases}$$

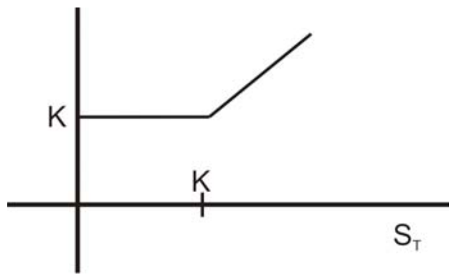
3. strategija - metuljev korak (angl. *butterfly spread*):

- kupimo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_1,
- prodamo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_3,
- prodamo dve nakupni opciji z izvršilno ceno K_2, kjer je $K_1 < K_2 < K_3$ in $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$

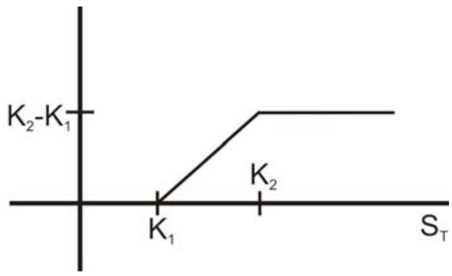
$$U_T = \begin{cases} S_T - K_1, & K_1 \le S_T \le K_2 \\ K_3 - S_T, & K_2 \le S_T \le K_3 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

4. strategija - razkorak (angl. *straddle*):

- kupimo nakupno opcijo z izvršilno ceno K,
- prodamo prodajno opcijo z izvršilno ceno K.



Slika III.10: Zaščitna prodaja



Slika III.11: Bikov korak

$$U_t = \max\{S_T - K, K - S_T\}.$$

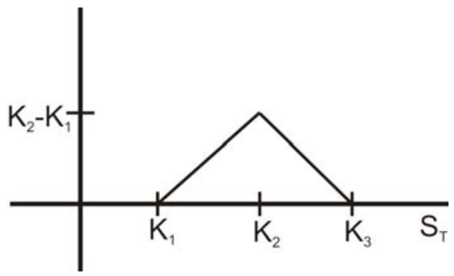
V času $t \in [0, T]$ je dobiček pri ameriški opciji v primeru izvršitve enak

$$\begin{aligned} C_t &= \max\{S_t - K, 0\} \quad \text{za nakupno opcijo in} \\ P_t &= \max\{K - S_t, 0\} \quad \text{za prodajno opcijo.} \end{aligned}$$

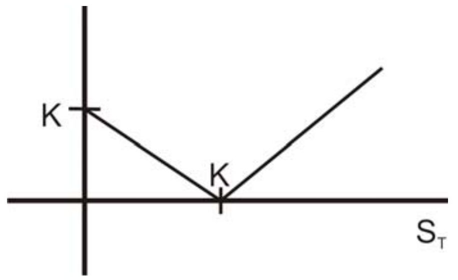
Če je $C_t > 0$ (oziroma $P_t > 0$), rečemo, da **se opcija splača**, če je $S_t = K$ rečemo, da je **opcija na meji**, in če je $S_t < K$ pri nakupni oziroma $S_t > K$ pri prodajni opciji, potem rečemo, da **se opcija ne splača.** (V angleščini se uporabljajo izrazi *in/at/out of the money*).

C_t oziroma P_t imenujemo tudi **notranja vrednost opcije** (angl. *intrinsic value*) v času t. Za ameriško opcijo je notranja vrednost opcije spodnja meja za premijo. Označimo s c_t premijo, ki jo moramo plačati za nakupno opcijo v času t in s p_t premijo, ki jo moramo plačati za prodajno opcijo v času t. Potem mora veljati

$$c_t \geq C_t \text{ in } p_t \geq P_t,$$



Slika III.12: Metuljev korak



Slika III.13: Razkorak

sicer bi imeli arbitražo. Arbitražna strategija bi bila nakup opcije in njena takojšnja izvršitev. Razlika če je pozitivna, $c_t - C_t$ ali $p_t - P_t$ je **vrednost opcije v času** t (angl. *time value*). Če ima ameriška opcija pozitivno vrednost v času t, potem je bolj smiselna njena prodaja kot izvršitev. V primeru prodaje dobimo c_t ali p_t, v primeru izvršitve pa C_t ali P_t.

Če imamo ameriško opcijo in enako evropsko opcijo, potem je premija evropske opcije spodnja meja za premijo ameriške opcije. Ameriška opcija nam daje več priložnosti za zaslužek in zato mora biti dražja. Če bi veljalo $c_t^a < c_t^e$ (tu eksponent a pomeni ameriško in eksponent e pomeni evropsko opcijo), potem prodamo evropsko opcijo in kupimo ameriško opcijo ter počakamo do zapadlosti. Opcijo izvršimo, če jo izvrši lastnik evropske opcije. Ta strategija pomeni arbitražo.

Trditev 6.2 *Za vrednost nakupnih opcij velja*

$$\max\{S_t - KD(t,T), 0\} \leq c_t^e \leq c_t^a \leq S_t.$$

Zgodnja izvršitev ameriške nakupne opcije se ne splača, opcija ima vedno pozitivno *vrednost v času.*

Dokaz Najprej predpostavimo, da je $c_t^e < S_t - KD(t,T)$. Potem poglejmo strategijo v času t:

- kratko prodamo enoto osnovnega premoženja,
- kupimo evropsko nakupno opcijo,
- naložimo $KD(t,T)$ do časa T.

Vrednost te strategije v času t je

$$V_t = S_t - KD(t,T) - c_t^e > 0$$

in času T je

$$V_T = -S_T + K + max\{S_T - K, 0\} > 0.$$

To je arbitražna strategija. Zaradi neobstoja take strategije mora veljati

$$\max\{S_t - KD(t,T), 0\} \leq c_t^e.$$

Veljavnost neenakosti $c_t^e \leq c_t^a$ smo že pokazali. Predpostavimo še, da velja $c_t^a > S_t$. Potem uporabimo naslednjo strategijo v času t:

- kupimo enoto osnovnega premoženja,
- prodamo ameriško nakupno opcijo.

Vrednost te strategije je

$$V_t = c_t^a - S_t > 0$$

v času t. Če kupec nakupne opcije to izvrši v času $S \in [t,T]$, potem mu izročimo osnovno premoženje in dobimo izplačilo K. Ta strategija je arbitražna. Zato mora veljati $c_t^a \leq S_t$. Tu smo privzeli, da ni stroškov za hranjenje osnovnega premoženja (npr. da je osnovno premoženje delnica ali kak drug vrednostni papir).

Za diskontni faktor velja $D(t,T) \leq 1$, če je $t \in [0,T]$. Zato je $S_t - K \leq S_t - KD(t,T)$. Za ameriško nakupno opcijo potem velja

$$C_t^a = \max\{0, S_t - K\} \leq \max\{0, S_t - KD(t,T)\} \leq c_t^a.$$

Zato ima ta opcija vedno pozitivno vrednost v času in se je ne splača izvršiti pred časom T. ∎

Trditev 6.3 *Za evropsko prodajno opcijo velja*

$$\max\{KD(t,T) - S_t, 0\} \leq p_t^e \leq KD(t,T).$$

Dokaz Naj bo $p_t^e < KD(t,T) - S_t$. Ker je premija p_t pozitivna, je to možno, samo če je $KD(t,T) - S_t > 0$. Potem uporabimo naslednjo strategijo v času t:

- kupimo eno enoto osnovnega premoženja,
- kupimo evropsko prodajno opcijo,
- izposodimo si $KD(t,T)$ do časa T.

Za vrednost te strategije velja

$$V_t = -S_t - p_t^e + KD(t,T) > 0$$

in

$$V_T = \max\{S_T - K, 0\} \geq 0.$$

Torej imamo arbitražni portfelj. Zato mora veljati $p_t^e \geq \max\{KD(t,T) - S_t, 0\}$.

Predpostavimo še, da je $p_t^e > KD(t,T)$. Potem nam naslednja strategija v času t da arbitražo.

- prodamo evropsko prodajno opcijo,
- naložimo $KD(t,T)$ do časa T,

Velja namreč

$$V_t = -KD(t,T) + p_t^e > 0$$

in

$$V_T = \min\{S_T, K\} > 0.$$

■

Trditev 6.4 *Za ameriško prodajno opcijo velja*

$$\max\{K - S_t, 0\} \leq p_t^a \leq K.$$

Dokaz Neenakost $P_t = \max\{K - S_t, 0\} \leq p_t^a$ smo že pokazali: notranja vrednost opcije je spodnja meja za premijo.

Če je $K < p_t^a$, potem uporabimo naslednjo strategijo v času t za dokaz obstoja arbitraže:

- prodamo ameriško prodajno opcijo,

- naložimo K v denarju po netvegani obrestni meri. ■

Vrednost strategije v času t je

$$V_t = p_t^a - K > 0.$$

Če je opcija izvršena v času S, $t < S < T$, potem denar dvignemo, kupimo osnovno premoženje po trenutni ceni in ga izročimo. Velja

$$V_S = \min\{S_S - K, 0\} + \frac{K}{D(t,s)} = \min\left\{\frac{K}{D(t,s)}, K\left(\frac{1}{D(t,s)-1}\right) + S_S\right\} \geq 0.$$

Opomnimo, da je pri ameriški prodajni opciji predčasna izvršitev lahko smiselna.

Izrek 6.5 *(pariteta nakupne in prodajne opcije.) Predpostavimo, da osnovno premoženje ne izplačuje dividend pred zapadlostjo opcije. Potem za vse $t \in [0,T]$ velja*

$$p_t^e + S_t = c_t^e + KD(t,T). \tag{III.6}$$

Za ameriške opcije pa za vse $t \in [0,T]$ velja

$$c_t^a + KD(t,T) \leq p_t^a + S_t \leq c_t^a + K. \tag{III.7}$$

Dokaz Za dokaz enakosti (III.6) najdemo dva različna portfelja oblikovana v času t, ki generirata enak denarni tok v času T. Prvi portfelj sestoji iz ene enote osnovnega premoženja in ene evropske prodajne opcije na to osnovno premoženje. Drugi portfelj pa sestoji iz nakupne evropske opcije in denarne vloge v znesku $KD(t,T)$. Izplačilo obeh portfeljev v času T je enako $\max\{S_T, K\}$. Zato mora biti njuna cena v času t enaka:

$$S_t + p_t^e = KD(t,T) + c_t^e.$$

Za dokaz relacij (III.7) poiščemo po eno arbitražno strategijo za vsak primer, ko katera od obeh relacij ne velja. Najprej predpostavimo, da je $p_t^a + S_t > c_t^a + K$. Potem uporabimo naslednjo strategijo v času t:

- prodamo prodajno ameriško opcijo.
- kratko prodamo enoto osnovnega premoženja,
- kupimo nakupno ameriško opcijo,
- naložimo K v denarju.

Vrednost te strategije v času t je

$$V_t = p_t^a + S_t - c_t^a - K > 0.$$

Če kupec prodajne opcije to izvrši v času $S \in (t, T]$, potem od njega kupimo enoto osnovnega premoženja, z njo zapremo kratko prodajo in dvignemo denar. Velja

$$V_S = \frac{K}{D(t,S)} - K \geq 0.$$

Če kupec prodajne opcije ne izvrši, potem v času T izvršimo nakupno opcijo, če se splača, zapremo kratko prodajo in dvignemo denar. Izplačilo je enako

$$V_T = \frac{K}{D(t,T)} - S_T + \max\{S_T - K, 0\} > 0.$$

Za dokaz zadnje neenakosti predpostavimo še, da velja

$$p_t^a + S_t < c_t^a + KD(t,T).$$

Strategija:

- prodamo nakupno ameriško opcijo,
- izposodimo si $KD(t,T)$,
- kupimo prodajno ameriško opcijo,
- kupimo enoto osnovnega premoženja, ■

vodi v arbitražo. Njena vrednost v ačasu t je

$$V_t = c_t^a + KD(t,T) - p_t^a - S_t > 0.$$

Če je nakupna opcija izvršena v času s, $t < s < T$, potem izročimo osnovno premoženje in dobimo plačilo K, prodamo prodajno opcijo in vrnemo denar. Izplačilo je enako

$$V_s = K - K\frac{D(t,T)}{D(t,s)} + p_S^a \geq 0.$$

Če je nakupna opcija izvršena v času T potem postopamo podobno: izročimo osnovno premoženje in zanj dobimo plačilo K, ter vrnemo denar. Prodajna opcija se v tem primeru ne izplača, saj predpostavimo, da je kupec nakupne opcije racionalen. Izplačilo je v tem primeru enako $V_T = K - K = 0$. Če nakupna opcija ni izvršena, potem v času T izvršimo prodajno opcijo (če se splača), vrnemo denar in prodamo osnovno premoženje. Izplačilo je enako

$$V_T = \max\{0, S_T - K\} - K + S_T \geq 0.$$

Enakost (III.6) za evropske opcije imenujemo **evropska prodajno - nakupna enakost** (angl. *european call-put parity*). Relacijo (III.7) pa imenujemo **ameriška prodajno - nakupna neenakost** (angl. *american call-put relation*).

Relaciji iz izreka 6.5 lahko razširimo tudi za primer, ko osnovno premoženje (delnica) izplača znano dividendo v času, več znanih dividend, ali pa ima vnaprej znan donos (npr. obresti na denarnem računu) v tem obdobju. Označimo z $I(t,T)$ trenutno vrednost v času t vseh dividend (donosa), ki bodo izplačane v času od t do T. S podobnimi strategijami, kot smo jih uporabili doslej v tem razdelku, potem iz neobstoja arbitraže sledijo še naslednje relacije:

1.) $\max\{S_t - KD(t,T) - I(t,T), 0\} \leq c_t^e \leq S_t$,

2.) $\max\{S_t - KD(t,T) - I(t,T), S_t - K, 0\} \leq c_t^a \leq S_t$,

3.) $\max\{KD(t,T) + I(t,T) - S_t, 0\} \leq p_t^e \leq KD(t,T)$,

4.) $\max\{KD(t,T) + I(t,T) - S_t, K - S_t, 0\} \leq p_t^a \leq KD(t,T)$,

5.) $p_t^e + S_t - I(t,T) = c_t^e + KD(t,T)$,

6.) $c_t^a + KD(t,T) \leq p_t^a + S_t \leq c_t^a + K + I(t,T)$.

Pokazati se da, da je zgodnja izvršitev ameriške nakupne opcije lahko smiselna samo tik pred datumi izplačil dividend in, da je zgodnja izvršitev ameriške prodajne opcije lahko smiselna samo takoj po datumih izplačil dividend.