Poglavje II

Model finančnega trga z enim obdobjem

V tem poglavju bomo predstavili model finančnega trga z enim obdobjem.

1 Finančni trg

Privzemimo, da imamo na trgu N vrednostnih papirjev (oz. finančnih inštrumentov). To so lahko delnice, obveznice, izvedeni finančni inštrumenti itd. Množico vseh vrednostnih papirjev označimo z $\mathcal{A}$, posamezne papirje pa z $A_1, A_2, \dots A_N$. Najprej si oglejmo enostaven model z enim obdobjem. V času $t = 0$ investitor oblikuje portfelj $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)^T$, kjer je $\theta_i \in \mathbb{R}$ za vse i in v času $t = 1$ **zapre vse svoje pozicije**, tj. vnovči vse vrednostne papirje in poravna vse morebitne dolgove. Tu θ_i pomeni, da ima investitor v svojem portfelju θ_i enot i-tega vrednostnega papirja. Če je $\theta_i > 0$, rečemo da ima **dolgo pozicijo**, če pa je $\theta_i < 0$, rečemo da ima **kratko pozicijo**. Dolga pozicija pomeni, da je kupil θ_i enot A_i, kratka pozicija pa pomeni, da si je od posrednika izposodil θ_i enot A_i in jih prodal (temu rečemo tudi **kratka prodaja**). Investitor ima v primeru dolge pozicije dobiček, če A_i zraste, v primeru kratke pozicije pa ima dobiček, če vrednost A_i pade.

V času $t = 0$ poznamo vrednost (ceno) enote vseh vrednostnih papirjev. Ceno enote A_i označimo s $c_i = c(A_i)$ in vektor cen s

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}$$

Privzamemo, da je $c_i > 0$ za vse i. Vrednost portfelja θ v času $t = 0$ je potem enaka

$$V_0(\theta) = <\theta, c>, \tag{II.1}$$

kjer je $< ., . >$ običajni skalarni produkt na $\mathbb{R}^N$.

Definicija 1.1 Vektor

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

je **pozitiven**, če je $u_i \geq 0$ za vse i in $u_i > 0$ za vsaj en indeks i. Vektor u je **strogo pozitiven**, če je $u_i > 0$ za vse indekse i. $\Diamond$

V začetnem času $t = 0$ ne poznamo stanja ekonomije (finančnega trga), ki bo nastopilo v času $t = 1$. Vrednost posameznega inštrumenta A_i bo odvisna od stanja ekonomije. V modelu privzamemo, da je ekonomija v času $t = 1$ lahko v K različnih stanjih. Množico vseh možnih stanj označimo z

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\},$$

kjer so ω_j, $j = 1, 2, \ldots, K$, vsa možna stanja.

Na množici Ω je podana verjetnost $P : \Omega \to [0, 1]$, ki pove, kolikšna je verjetnost, da bo ekonomija v času $t = 1$ v stanju ω_j. Označimo $p_j = P(\omega_j)$. Velja $p_j \geq 0$ in $\sum_{j=1}^{K} p_j = 1$.

Za vsako od stanj ω_j poznamo izplačila za vse vrednostne papirje A_i. S $S_i(\omega_j)$ označimo izplačilo ene enote A_i v času $t = 1$ ob predpostavki, da je ekonomija v stanju ω_j. Nadalje naj bo

$$S_i = \begin{bmatrix} S_i(\omega_1) \\ S_i(\omega_2) \\ \vdots \\ S_i(\omega_K) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^K$$

vektor izplačil in

$$M = [S_1, S_2, \ldots, S_N] \in \mathbb{R}^{K \times N}$$

matrika izplačil v času $t = 1$. Vrednost A_i je v času $t = 1$ nenegativno število. Razen če pride do propada podjetja, ustanove, ipd., je vrednost pozitivna. Zato so vsi vektorji S_i pozitivni.

Za portfelj θ je vektor izplačil $V_1(\theta)$, v času $t = 1$ enak

$$V_1(\theta) = M\theta. \tag{II.2}$$

j-ta komponenta $V_1(\theta)$ pove višino izplačila (oz. dolga), ki ga v času $t = 1$ prinaša portfelj θ v primeru, da je ekonomija v stanju ω_j.

Za vrednostni papir rečemo, da je **netvegan**, če je $S_i(\omega) = C$ za vse ω iz Ω. Primer netveganega vrednostnega papirja je brezkuponska obveznica ali državna menica. Če velja $S_i(\omega_k) \neq S_i(\omega_l)$ za neka $\omega_k, \omega_l \in \Omega$, potem rečemo, da je A_i **tvegan** vrednostni papir. Primer takega vrednostnega papirja je delnica ali kateri od izvedenih finančnih inštrumentov.

V našem modelu so tako vhodni podatki (c, M, p). Ekonomski (tržni) privzetki v modelu so naslednji:

1.) Predpostavke o trgu:

- vrednostni papirji A_i so **neskončno deljivi** (lahko kupimo/prodamo za poljubno realno število enot A_i),
- finančni trg je **brez trenja** (ni stroškov transakcij, davkov, dividend ipd.),
- kratka pozicija je dovoljena.

2.) Predpostavke o investitorjih

- investitorji trgujejo v času $t = 0$ in likvidirajo celoten portfelj v času $t = 1$,
- vsi investitorji lahko kupijo vse finančne inštrumente,
- investitorji so racionalni in nenasičeni (z večjo potrošnjo so vedno na boljšem),
- dejanja investitorjev ne vplivajo na cene (angl. *price-takers*),
- investitorji imajo vsi enako informacijo (ni slabo informiranih in ne takih z notranjimi informacijami).

V tem poglavju bomo vselej privzeli, da zgoraj navedene predpostavke veljajo. Te določajo enostaven matematični model trgovanja na finančnem trgu, ki ni vselej uporaben, je pa že dovolj zanimiv, da na njem lahko osvetlimo vse pojme in povezave med lastnostmi, ki nastopijo tudi v matematično zahtevnejših modelih, ki so boljši za modeliranje finančnih trgov. Model z enim obdobjem je morda smiselno uporabiti za modeliranje primera velikega investitorja s strategijo kupi in drži (angl. *buy-and-hold*).

Razen, kadar bomo izrecno navedli drugače, bomo privzeli tudi naslednjo predpostavko:

3.) Predpostavka o strategiji:

- Na trgu **ne obstaja arbitražna priložnost** ali na kratko **ni arbitraže**; to pomeni, da ne obstaja **arbitražni portfelj** θ. Za portfelj θ rečemo da je **arbitražni**, če zanj velja $V_0(\theta) \leq 0$ in $V_1(\theta)$ je pozitiven vektor, tj. $V_1(\theta)(\omega_j) \geq 0$ za vse j in $V_1(\theta)(\omega_j) > 0$ za vsaj en j.

Finančni trg v katerem veljajo vse naštete predpostavke imenujemo **popoln** (angl. *perfect market*).

Arbitraža pomeni, da za ničelno ceno v času $t = 0$, torej brez začetne investicije, lahko dobimo v času $t = 1$ pozitiven dohodek brez tveganja izgube. V angleški literaturi rečejo tudi, da arbitraža pomeni zastonjsko kosilo (angl. *free lunch*). Predpostavka o neobstoju arbitražne priložnosti, se zdi z ekonomskega stališča smiselna.

V našem modelu vrednotenja finančnih inštrumentov nas ne zanima napovedovanje prihodnosti, pač pa le iskanje ustrezne strategije glede na želje investitorja. Cene, po katerih se trguje s finančnimi inštrumenti (delnice, obveznice, izvedeni finančni inštrumenti,. . .), imenujemo **tržne cene**. Te so določene s ponudbo in povpraševanjem in mi privzamemo, da so dosežene v ravnovesju (ni več želja za nadalnje trgovanje). Kako pridemo do teh cen za naš model ni pomembno, tržne cene so **zunanje** (**eksogene**) spremenljivke. Prav tako je za nas nepomembno, kako pride investitor do svojih ciljnih želja.

2 Pogojne terjatve

V modelu privzamemo, da investitor določi svoj cilj. V času $t = 0$ za vsako od bodočih stanj ekonomije določi višino izplačila, ki ga želi prejeti v času $t = 1$. Njegove želje podamo s slučajno spremenljivko

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

oziroma vektorjem

$$X = \begin{bmatrix} X(\omega_1) \\ X(\omega_2) \\ \vdots \\ X(\omega_K) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^K.$$

Naša naloga je poiskati tak portfelj θ, da bo vzorec izplačil θ v času $t = 1$ enak X, to je,

$$V_i(\theta) = X.$$

V tem modelu slučajno spremenljivko X imenujemo **pogojna terjatev** (angl. *contingent claim*), portfelj θ, za katerega je $V_1(\theta) = X$ pa **izvedbeni portfelj** (angl. *replicating portfolio*). Včasih bomo tudi rekli, da je X **zaščitni portfelj** (angl. *hedge*). Če za dano pogojno terjatev X obstaja izvedbeni portfelj θ, potem rečemo, da je X **dosegljiva** ali **tržna pogojna terjatev** (angl. *attainable contingent claim, marketed contingent claim*). Z $\mathcal{M}$ označimo množico vseh dosegljivih pogojnih terjatev. Za pogojno terjatev rečemo, da je **netvegana**, če je $X(\omega) = C$ za vse $\omega \in \Omega$. Pri tem je C neka konstanta. Terjatev je **tvegana**, če je $X(\omega_i) \neq X(\omega_j)$ za neka ω_i in ω_j iz Ω.

Odslej privzemimo, da je A_1 netvegan vrednostni papir, npr. brezkuponska obveznica z obrestno mero R ($R > 0$): V modelu rečemo, da je R **netvegana obrestna mera**. Velja

$$S_1(\omega) = (1 + R)c_1$$

za vse $\omega \in \Omega$.

Definicija 2.1 Pogojna terjatev X je **strogo pozitivna**, če velja $X(\omega) > 0$ za vse $\omega \in \Omega$. Pogojna terjatev X je **pozitivna**, če je $X(\omega) \geq 0$ za vse $\omega \in \Omega$ in $X(\omega) > 0$ za vsaj en $\omega \in \Omega$. ◊

Naj bodo ε_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ standardi bazni vektorji za $\mathbb{R}^N$. ϵ_i je torej vektor, ki ima edino neničelno komponento na i-tem mestu enako 1. Ker smo privzeli, da je A_1 netvegan vrednostni papir, je $S_1 = V_1(\varepsilon_1)$ strogo pozitivna dosegljiva pogojna terjatev. Poleg tega so za vse i pogojne terjatve $S_i = V_1(\varepsilon_i)$ pozitivne in dosegljive.

Vprašanja, na katera želimo odgovoriti so naslednja:

1.) Ali imajo vsi izvedbeni portfelji θ za dano pogojno terjatev enako začetno ceno $V_0(\theta)$?

2.) Ali je cena dobičkonosne pogojne terjatve vedno pozitivna?

3.) Ali lahko za vse pogojne terjatve poiščemo izvedbene portfelje?

4.) Ali lahko poiščemo ceno izvedbenega portfelja, če je cena takega portfelja enolična?

Preden začnemo s podajanjem teorije, ki bo dala odgovore na ta vprašanja, pripomnimo, da je množica vseh pogojnih terjatev vektorski prostor

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R}\},$$

ki ga identificiramo z $\mathbb{R}^K$, množico vseh izvedbenih portfeljev pa vektorski prostor $\mathbb{R}^N$.

Trditev 2.2 *$V_t(\theta)$ je linearna funkcija v θ za oba časa $t = 0$ in $t = 1$.*

To sledi iz definicije (II.1) in (II.2) obeh preslikav, ki sta linearni v θ.

Preslikava

$$\begin{aligned} V_1 : \mathbb{R}^N &\to \mathcal{L}(\Omega) \\ V_1(\theta) &= M\theta \end{aligned}$$

je surjektivna natanko tedaj, ko ima matrika M rang enak K. To je ekvivalentno temu, da je K stolpcev matrike M linearno neodvisnih. Za množico

$$\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$$

vrednostnih papirjev rečemo, da je **neodvisna**, če so pripadajoči stolpci

$$\{S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_n}\}$$

matrike M linearno neodvisni. Če množica $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$ ni neodvisna, rečemo, da je **odvisna**.

Trditev 2.3 *Vsaka pogojna terjatev ima svoj izvedbeni portfelj natanko tedaj, ko v množici vrednostnih papirjev $\mathcal{A}$ obstaja podmnožica K neodvisnih vrednostnih papirjev.*

Definicija 2.4 Če ima v našem modelu trga vsaka pogojna terjatev svoj izvedbeni portfelj, potem rečemo, da je **trg poln** (angl. *complete market*). Sicer pa rečemo, da je **trg nepoln** (angl. *incomplete market*). ◊

Iz elementarnih lastnosti linearnih preslikav, ki jih poznamo iz linearne algebre, dobimo še naslednje trditve:

Posledica 2.5 *Potreben pogoj za polnost trga je $N \geq K$.*

Trditev 2.6 *Vsaka pogojna terjatev ima en sam izvedbeni portfelj natanko tedaj, ko je $N = K$ in je množica $\mathcal{A}$ neodvisna.*

Trditev 2.7 *Če je množica vrednostnih papirjev odvisna, potem ima vsaka dosegljiva pogojna terjatev neskončno mnogo izvedbenih portfeljev.*

3 Zakon ene cene in cenovni funkcional

Če za poljubna dva izvedbena portfelja ϕ in θ pogojne terjatve X, velja $V_0(\phi) = V_0(\theta)$, potem rečemo, da v modelu velja **zakon ene cene** (angl. *law of one price*). Iz predpostavke o neobstoju arbitraže sledi zakon ene cene:

Trditev 3.1 *Na popolnem trgu velja zakon ene cene.*

Dokaz Denimo, da sta ϕ in θ taka izvedena portfelja pogojne terjatve X, da velja $V_0(\phi) > V_0(\theta)$. Taka ϕ in θ obstajata, če zakon ene cene ne velja. Označimo $\theta_0 = \theta - \phi$. Potem je $V_0(\theta_0) < 0$ in $V_1(\theta_0) = 0$. Naj bo $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ pozitivna dosegljiva pogojna terjatev. Spomnimo se, da taka pogojna terjatev obstaja (npr. S_i). Označimo s ψ izvedbeni portfelj za X. Naj bo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tako število, da je

$$V_0(\psi + \lambda_0\theta_0) = 0.$$

Ker je $V_0(\theta_0) \neq 0$, tak λ_0 obstaja. Iz $V_1(\psi + \lambda_0\theta_0) = X$ sledi, da je $\psi + \lambda_0\theta_0$ arbitražni portfelj. ∎

Trditev 3.2 *Na danem trgu, ne nujno popolnem, velja natanko ena od možnosti:*

(a) *velja zakon ene cene,*

(b) *za vsako pogojno terjatev X in vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ lahko najdemo izvedbeni portfelj ϕ za X z $V_0(\phi) = \lambda$.*

Dokaz Denimo, da zakon ene cene ne velja. Naj bo X dana pogojna terjatev ter ϕ in θ dva izvedbena portfelja, za katera je $V_0(\phi) \neq V_0(\theta)$. Potem je $\theta_0 = \theta - \phi$ tak portfelj, da je $V_0(\theta_0) \neq 0$ in $V_1(\theta_0) = 0$. Za vsak skalar μ je potem $\phi + \mu\theta_0$ izvedbeni portfelj za X. Zanj velja

$$V_0(\phi + \mu\theta_0) = V_0(\phi) + \mu V_0(\theta_0).$$

Ker je $V_0(\theta_0) \neq 0$, lahko za dan λ najdemo tak μ, da je $V_0(\phi + \mu\theta_0) = \lambda$ in $V_1(\phi + \mu\theta_0) = X$.

Očitno pogoja (a) in (b) ne moreta veljati hkrati. ∎

Trditev 3.2 pove, da je za smiseln model trga logično, da privzamemo, da velja zakon ene cene. Iz veljavnosti zakona ene cene sledi neprotislovnost naslednje definicije.

Definicija 3.3 Na množici $\mathcal{M}$ dosegljivih pogojnih terjatev definiramo funkcional

$$\pi_0 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

s predpisom

$$\pi_0(X) = V_0(\phi),$$

kjer je ϕ nek izvedbeni portfelj za X. Vrednost $\pi_0(X)$ imenujemo **pravična** (**realna**) **vrednost** pogojne terjatve X (angl. *fair value, real value*). ◊

Iz zakona ene cene in linearnosti $V_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sledi:

Izrek 3.4 *π_0 je linearen funkcional.*

Linearen funkcional π_0 imenujemo **cenovni funkcional** (angl. *pricing functional*).

Definicija 3.5 Linearen funkcional $\pi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je **krepko pozitiven**, če je $\pi(u) > 0$ za vsak pozitiven vektor u. ◊

Trditev 3.6 *Za dani trg, ne nujno popoln, so naslednje trditve ekvivalentne:*

(a) *na trgu ni arbitražnega portfelja,*

(b) *za vsak portfelj θ s pozitivno končno vrednostjo $V_1(\theta) \in \mathcal{L}(\Omega)$ velja $V_0(\theta) > 0$,*

(c) *na trgu ni pozitivne dosegljive terjatve X, ki ima izvedbeni portfelj θ z $V_0(\theta) = 0$,*

(d) *cenovni funkcional π_0 je krepko pozitiven.*

Dokaz Ekvivalenca (a) in (b) sledi iz definicije arbitražnega portfelja. Prav tako iz definicije sledi implikacija iz (a) v (c). Ekvivalenca (c) in (d) sledi iz definicije krepko pozitivnega funkcionala.

Predpostavimo sedaj, da (a) ne velja in da je ϕ arbitražni portfelj. Če je $V_0(\phi) = 0$ in $V_1(\phi)$ pozitivna pogojna terjatev, potem (c) ne velja. Naj bo $V_0(\phi) < 0$ in $V_1(\phi)$ pozitivna pogojna terjatev. Spomnimo se predpostavke, da je A_1 netvegan vrednostni papir. Ker je $c_1 > 0$, obstaja tako število $\delta > 0$, da je $V_0(\phi) + \delta c_1 = 0$. Potem je portfelj $\phi' = \phi + \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ tak, da je $V_0(\phi') = 0$ in $V_1(\phi') = V_1(\phi) + \delta S_1$ je strogo pozitivna pogojna terjatev, saj so vse komponente vektorja S_1 pozitivne. Tako za ϕ' trditev (c) ne velja in dokaz je končan. ■

Trg brez arbitraže je natanko tisti, na katerem imajo vse pozitivne pogojne terjatve X pozitivno ceno $\pi_0(X)$. To se zdi ekonomsko smiselno.

Za $j = 1, 2, \ldots, K$ definiramo **Arrow-Debreujevo** pogojno terjatev E_j s predpisom

$$E_j(\omega_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Arrow-Debreujeve pogojne terjatve so tiste, pri katerih dobimo izplačano eno enoto, če je ekonomija v točno določenem stanju, sicer pa v času $t = 1$ ne dobimo nič. Očitno tvorijo $E_1, E_2, \ldots, E_K$ bazo vektorskega prostora $\mathcal{L}(\Omega)$. Za polnost trga tako zadošča pokazati, da so vse Arrow-Debreujeve pogojne terjatve dosegljive. Še več, trg je poln natanko tedaj, ko so Arrow-Debreujeve pogojne terjatve dosegljive.

Če je π krepko pozitiven funkcional na $\mathcal{L}(\Omega)$, potem je $\pi(E_j) > 0$ za vse j. Velja tudi obrat. Preden ga dokažemo, se spomnimo Rieszovega izreka o upodobitvi linearnega funkcionala $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ki pravi, da je

$$\varphi(v) =< v, u_\varphi >$$

za enolično določen vektor u_φ. Glede na ortonormirano bazo $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je

$$u_\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(u_j) u_j.$$

Za linearen funkcional $\pi : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathbb{R}$ je $\pi(X) =< X, u_\pi >$ za

$$u_\pi = \begin{bmatrix} \pi(E_1) \\ \pi(E_2) \\ \vdots \\ \pi(E_K) \end{bmatrix}.$$

Trditev 3.7 *Naj bo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearen funkcional. Potem so naslednje trditve ekvivalentne:*

(a) *φ je krepko pozitiven,*

(b) *$\varphi(e_i) > 0$ za vektorje $e_1, \ldots, e_n$ iz standardne baze,*

(c) *vektor u_φ je strogo pozitiven.*

Dokaz Ker je $u_\varphi = \begin{bmatrix} \varphi(e_1) \\ \varphi(e_2) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{bmatrix}$, sta (b) in (c) ekvivalentni trditvi. Ker je φ krepko pozitiven, je $\varphi(e_i) > 0$ za vse i. Torej (b) sledi iz (a).

Privzemimo, da velja (c). Naj bo $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ pozitiven vektor in naj bo $u_j > 0$. Potem je

$$\varphi(u) =< u, u_\varphi >= \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi(e_i) > u_j \varphi(e_j) > 0.$$

Torej je φ krepko pozitiven funkcional. ■

Za zgled si poglejmo primer enostavnega trga, za katerega je $N = K = 2$. Naj bo A_1 netvegan vrednostni papir (obveznica) in A_2 tvegan vrednostni papir (delnica). V času $t = 1$ je lahko ekonomija v enem od dveh stanj: $\Omega = \{\delta, \sigma\}$. δ je dobro stanje, v katerem je vrednost A_2 zrasla, σ pa slabo stanje, v katerem je vrednost A_2 padla (ali pa zrasla manj). Naj bo

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

vektor cen, $c_i > 0$ in

$$M = \begin{bmatrix} c_1(1+R) & c_2(1+d) \\ c_1(1+R) & c_2(1+s) \end{bmatrix},$$

matrika izplačil, $d > s > -1$. Pri tem je R (efektivna) obrestna mera obveznice, d stopnja donosa delnice, če je ekonomija v dobrem stanju in s stopnja donosa (izgube) delnice, če je ekonomija v slabem stanju.

Za dan portfelj $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$ izračunamo $V_0(\phi) = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ in

$$V_1(\phi) = \begin{bmatrix} (1+R)\phi_1 + (1+d)\phi_2 \\ (1+R)\phi_1 + (1+s)\phi_2 \end{bmatrix}.$$

Trditev 3.8 *V enostavnem trgu za $N = K = 2$ ni arbitražne priložnosti natanko tedaj, ko je $s < R < d$.*

Dokaz Naj bosta $E_1(\delta) = 1, E_1(\sigma) = 0$ in $E_1(\delta) = 0, E_1(\sigma) = 1$ Arrow-Debreujevi pogojni terjatvi. Opazimo, da je $detM = (1 + R)(s - d)c_1c_2 \neq 0$, zato je matrika M obrnljiva. Njen inverz je

$$M^{-1} = \frac{1}{d-s}\begin{bmatrix} -\frac{1+s}{(1+R)c_1} & \frac{1+d}{(1+R)c_1} \\ \frac{1}{c_2} & -\frac{1}{c_2} \end{bmatrix}.$$

Ker je M obrnljiva, je trg poln in vsaka pogojna terjatev ima natanko en izvedbeni portfelj. Izvedbena portfelja za E_1 in E_2 sta dana s stolpcema matrike M^{-1}:

$$\phi_1 = M^{-1}E_1 = \frac{1}{d-s}\begin{bmatrix} -\frac{1+s}{(1+R)c_1} \\ \frac{1}{c_2} \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 = M^{-1}E_2 = \frac{1}{d-s}\begin{bmatrix} \frac{1+d}{(1+R)c_1} \\ -\frac{1}{c_2} \end{bmatrix}$$

Pravični ceni za E_1 in E_2 sta

$$\pi_0(E_1) = V_0(\phi_1) =< \phi_1, c >= \frac{(R-s)}{(d-s)(1+R)}$$

in

$$\pi_0(E_2) = V_0(\phi_2) =< \phi_2, c >= \frac{(d-R)}{(d-s)(1+R)}.$$

Ker je π_0 krepko pozitiven natanko tedaj, ko je $\pi_0(E_j) > 0$ za $j = 1, 2$ (trditev 3.7), sledi, da je π_0 krepko pozitiven natanko tedaj, ko je $R > s$ in $d > R$. Pozitivnost π_0 je po trditvi 3.6 ekvivalentna pogoju o neobstoju arbitražnega portfelja. Tako smo dokazali trditev 3.8. ■

Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}$ vektorski podprostori in $\pi : U \to \mathbb{R}$ linearen funkcional. Potem rečemo, da je linearen funkcional $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **razširitev** π, če je $\tilde{\pi}(u) = \pi(u)$ za vse $u \in U$.

Naslednji izrek bomo uporabili pri dokazovanju trditev o našem modelu trga. Dokaz izreka zahteva nekaj znanja iz teorije konveksnosti in ga tu ne bomo navedli.

Izrek 3.9 *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}$ vektorski podprostor in $\pi : U \to \mathbb{R}$ krepko pozitiven linearen funkcional. Potem obstaja razširitev $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za π, ki je krepko pozitivna na $\mathbb{R}^n$. Če je $U \neq \mathbb{R}^n$, je takih razširitev neskončno mnogo.*

Z uporabo ekvivalence (a) $\Leftrightarrow$ (d) v trditvi 3.6 in gornjega izreka dobimo naslednjo posledico. Spet izpustimo predpostavko o neobstoju arbitraže.

Posledica 3.10 *Predpostavimo, da na našem trgu velja zakon ene cene. Potem na trgu ni arbitražnega portfelja natanko tedaj, ko ima cenovni funkcional π_0 krepko pozitivno razširitev $\tilde{\pi}_0 : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Če trg ni poln, potem obstaja neskončno mnogo takih razširitev.*

4 Zamenjava numerarja

Doslej smo uporabljali denar kot osnovno enoto za računanje vrednosti posameznih finančnih inštrumentov in za računanje deležev različnih vrednostnih papirjev, ki imajo na trgu enako vrednost. Vrednosti finančnih inštrumentov pa lahko izrazimo tudi drugače, npr. v enotah enega od vrednostnih papirjev na trgu. Ta vrednostni papir potem imenujemo **numerar** (angl. *numeraire*). Lahko tudi rečemo, da smo dani vrednostni papir izbrali za računovodsko enoto.

Privzemimo, da je A_i tak vrednostni papir, da je S_i strogo pozitiven vektor, torej $S_i(\omega) > 0$ za vse $\omega \in \Omega$. Taka je npr. obveznica A_1. Izberimo A_i za numerar. Potem označimo

$$\tilde{c}_j = \frac{c_j}{c_i},\ \tilde{S}_j = \frac{S_j}{S_i},\ j = 1, 2, \ldots, K,$$

kjer je $\frac{S_j}{S_i} = \begin{bmatrix} \frac{S_j(\omega_1)}{S_i(\omega_1)} \\ \vdots \\ \frac{S_j(\omega_k)}{S_i(\omega_k)} \end{bmatrix}$. Označimo še $\tilde{c} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_N \end{bmatrix}$.

Število $\tilde{S}_j(\omega)$ pomeni število enot vrednostnega papirja A_j izraženo v enotah A_i, če je v času $t = 1$ ekonomija v stanju ω.

Za dan portfelj $\phi \in \mathbb{R}^N$ označimo

$$\tilde{V}_0(\phi) = <\phi, \tilde{c}>$$

in

$$\tilde{V}_1(\phi) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j \tilde{S}_j.$$

Slučajni proces $(\tilde{V}_0(\phi), \tilde{V}_1(\phi))$ imenujemo **diskontirani vrednostni proces za** ϕ glede na A_i (angl. *discounted value process*).

Definicija 4.1 Slučajni proces (X_0, X_1), kjer je X_0 konstanta in X_1 slučajna spremenljivka, je **martingal** glede na verjetnost Q, če velja

$$E_Q(X_1) = X_0.$$

Pri tem je $E_Q(X)$ matematično upanje slučajne spremenljivke $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ glede na Q. Če označimo $q_j = Q(\omega_j)$, potem je

$$E_Q(X) = \sum_{j=1}^{K} X(\omega_j) q_j.$$

Definicija 4.2 Verjetnosti P in Q na Ω sta **ekvivalenti**, če je $P(\omega) \neq 0$ natanko tedaj, ko je $Q(\omega) \neq 0$. ◊

V našem modelu imenujemo vnaprej dano verjetnost P **naravna verjetnost.** Privzamemo, da je $P(\omega) \neq 0$ za vse $\omega \in \Omega$. Če bi bilo $P(\omega) = 0$ za kak ω, potem bi vzeli $\Omega - \{\omega\}$ za našo množico stanj ekonomije, saj stanje ω ne nastopi. Verjetnost Q je torej ekvivalentna P natanko tedaj, ko je $Q(\omega) > 0$ za vse $\omega \in \Omega$.

Definicija 4.3 Verjetnost $Q : \Omega \to [0, 1]$ imenujemo **ekvivalentna martingalska verjetnost** (angl. *equivalent martingale probability*) glede na numerar A_i, če velja:

1. Q in P sta ekvivalentni verjetnosti,

2. $\tilde{c}_j = E_Q(\tilde{S}_j)$ za $j = 1, 2, \ldots, N$. ◊

Lema 4.4 *Verjetnost Q je ekvivalentna martingalska verjetnost glede na A_i natanko tedaj, ko sta P in Q ekvivalentni verjetnosti in je za vsak portfelj ϕ diskontirani vrednostni proces $(\tilde{V}_0(\phi), \tilde{V}_1(\phi))$ martingal glede na Q.*

Dokaz Naj bo $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$ dan portfelj. Predpostavimo, da je Q ekvivalentna martingalska verjetnost glede na A_i. Z uporabo definicij definicij in linearnosti matematičnega upanja dobimo

$$\tilde{V}_0 = \sum_{j=1}^{N} \phi_j \tilde{c}_j = \sum_{j=1}^{N} \phi_j E_Q\left(\tilde{S}_j\right) = E_Q\left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j \tilde{S}_j\right) = E_Q\left(\tilde{V}_1(\phi)\right).$$

Obratna implikacija sledi, če za portfelj ϕ vzamemo katerega od baznih portfeljev ϵ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. ■

Naj bo Q ekvivalentna martingalska verjetnost glede na A_i. Na vektorskem prostoru pogojnih terjatev $\mathcal{L}(\Omega)$ definiramo linearen funkcional π^Q s predpisom

$$\pi^Q(X) = c_i E_Q\left(\frac{X}{S_i}\right).$$

Pri tem je $\frac{X}{S_i}$ običajni kvocient funkcij, ki je dobro definiran na Ω, saj je $S_i(\omega) \neq 0$ za vse i. Velja torej $\frac{X}{S_i}(\omega) = \frac{X(\omega)}{S_i(\omega)}$.

Trditev 4.5 *Funkcional π^Q je krepko pozitivna razširitev cenovnega funkcionala π_0.*

Dokaz Ker je matematično upanje linearno, je tudi π^Q linearen. Pokažimo najprej, da je krepko pozitiven. Naj bo X pozitivna pogojna terjatev in k tak indeks, da je $X(\omega_k) > 0$. Potem z uporabo definicij in upoštevanjem dejstva, da so c_i, q_j in $S_i(\omega_j)$ vselej pozitivni, $X(\omega)$ pa nenegativen, dobimo

$$\pi^Q(X) = c_i E_Q\left(\frac{X}{S_i}\right) = c_i \sum_{j=1}^{K} \frac{X(\omega_j)}{S_i(\omega_j)} q_j \geq \frac{c_i X(\omega_k) q_k}{S_i(\omega_k)} > 0. \qquad \blacksquare$$

Zato je π^Q krepko pozitiven funkcional.

Preverimo še, da π^Q razširja π_0. Naj bo X dosegljiva pogojna terjatev in ϕ izvedbeni portfelj za X, tj. $X = V_1(\phi)$. Potem je

$$\pi_0(X) = V_0(\phi) = c_i \tilde{V}_0(\phi) = c_i E_Q\left(\tilde{V}_1(\phi)\right) =$$

$$c_i E_Q\left(\frac{V_1(\phi)}{S_i}\right) = c_i E_Q\left(\frac{X)}{S_i}\right) = \pi^Q(X).$$

Trditev 4.6 *Naj bo $\hat{\pi} : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathbb{R}$ krepko pozitivna razširitev cenovnega funkcionala π_0. Potem obstaja elvivalentna martinagalska verjetnost Q glede na A_i za katero je*

$$\hat{\pi}_0(X) = \pi^Q(X) = c_i E_Q(\frac{X}{S_i})$$

za vse $X \in \mathcal{L}(\Omega)$.

Dokaz Ker je $\hat{\pi}_0$ krepko pozitiven, obstaja tak strogo pozitiven vektor $u \in \mathbb{R}^K$, da je

$$\hat{\pi}_0(X) = \langle X, u \rangle.$$

Definirajmo sedaj verjetnost Q na Ω s predpisom

$$q_j = Q(\omega_j) = u_j \frac{S_i(\omega_j)}{c_i} \tag{II.3}$$

za $j = 1, 2, \ldots, K$. Q je res verjetnost, saj je

$$\sum_{j=1}^{K} q_j = \sum_{j=1}^{K} \frac{S_i(\omega_j) u_j}{c_i} = \frac{\hat{\pi}_0(S_i)}{c_i} = \frac{\pi_0(S_i)}{c_i} = 1,$$

in je $q_j > 0$ za vse j. Ta zadnja lastnost pove tudi, da sta P in Q ekvivalentni verjetnosti.

Spomnimo se, da velja $u_j = \frac{c_i q_j}{S_i(\omega_j)}$. Potem z uporabo definicij za pogojno terjatev X dobimo

$$\pi^Q(X) = c_i E_Q\left(\frac{X}{S_i}\right) = c_i \sum_{j=1}^{K} \frac{X(\omega_j)}{S_i(\omega_j)} q_j = \sum_{j=1}^{K} X(\omega_j) u_j = \hat{\pi}_0(X).$$

Torej sta π^Q in $\hat{\pi}_0$ enaka.

Preostane nam še pokazati, da je Q martingalska. Za vsak $l = 1, 2, \ldots, K$ imamo

$$\begin{aligned} E_Q\left(\tilde{S}_l\right) &= \sum_{j=1}^{K} \frac{S_l(\omega_j)}{S_i(\omega_j)} q_j = \sum_{j=1}^{K} \frac{S_l(\omega_j) u_j}{c_i} = \\ &= \frac{\hat{\pi}_0(S_l)}{c_i} = \frac{\pi_0(S_l)}{c_i} = \frac{c_l}{c_i} = \tilde{c}_l. \end{aligned}$$ ■

V naslednjem izreku spet predpostavimo, da trg ni nujno popoln.

Izrek 4.7 ***(prvi osnovni izrek vrednotenja premoženja)*** *Ekvivalentna martingalska verjetnost glede na A_i obstaja natanko tedaj, ko na trgu ne obstaja arbitražna priložnost.*

Dokaz Posledica 3.10 pove, da na trgu ni arbitraže natanko tedaj, ko ima π_0 krepko pozitivno razširitev na $\hat{\pi}_0$ na $\mathcal{L}(\Omega)$. Trditvi 4.5 in 4.6 pa povesta, da π_0 ima krepko pozitivno razširitev $\hat{\pi}_0 = \pi^Q$ natanko tedaj, ko obstaja ekvivalentna martingalska verjetnost Q glede na A_i. ■

Izrek 4.8 ***(drugi osnovni izrek vrednotenja premoženja)*** *Če je trg popoln, tj. brez arbitraže, potem obstaja enolično določena ekvivalentna martingalska verjetnost glede na dani numerar natanko tedaj, ko je trg poln.*

Dokaz Če je trg popoln in poln, potem je π_0 definirana na $\mathcal{L}(\Omega)$ in ima samo trivialno razširitev π_0. Po posledici 3.10 je ta krepko pozitivna. Če je trg popoln, a ni poln, potem drugi del posledice 3.10 pove, da ima π_0 neskončno mnogo krepko pozitivnih razširitev. Po trditvi 4.6 za vsako tako razširitev $\tilde{\pi}_0$ obstaja ekvivalentna martingalska verjetnost Q glede na A_i, za katero je $\pi^Q = \tilde{\pi}_0$. Torej je tudi ustreznih verjetnosti Q neskončno mnogo. ■

Včasih gornja izreka zaradi njune pomembnosti imenujemo tudi **prvi in drugi osnovni izrek finančne matematike.**

Definicija 4.9 Če za numerar izberemo netvegan vrednostni papir, potem ekvivalentno martingalsko verjetnost glede na ta numerar imenujemo **do tveganja nevtralna verjetnost** (angl. *risk-neutral probability*). ◊

Če je R efektivna obrestna mera obveznice A_1 in je trg poln, potem je

$$\pi_0(X) = c_1 E_Q\left(\frac{X}{S_1}\right) = E_Q\left(\frac{X}{1+R}\right).$$

Torej je pravična vrednost pogojne terjatve X enaka pričakovani vrednosti diskontirane pogojne terjatve.

Poglejmo na enostavnem trgu z $N = K = 2$, kaj je ekvivalentna martingalska verjetnost glede na obveznico A_1. Uporabimo enake oznake kot v trditvi 3.8. Ta nam pove, da je trg brez arbitraže natanko tedaj, ko je $s < R < d$. Privzemimo, da to velja. Cenovni funkcional π_0 je dan s predpisom

$$\pi_0(E_1) = \langle \phi_1, c\rangle = \frac{(R-s)}{(d-s)(1+R)}$$

in

$$\pi_0(E_2) = \langle \phi_2, c\rangle = \frac{(d-R)}{(d-s)(1+R)}.$$

Vektor $u \in \mathbb{R}^2$, za katerega je $\pi_0(X) = \langle X, u\rangle$, je potem enak

$$u = \begin{bmatrix} \frac{R-s}{(d-s)(1+R)} \\ \frac{d-R}{(d-s)(1+R)} \end{bmatrix}.$$

Do tveganja nevtralna verjetnost (glede na A_1) je podana z izrazom (II.3):

$$Q(\delta) = \frac{R-s}{d-S} \text{ in } Q(\sigma) = \frac{d-R}{d-S}.$$

Ker je trg poln, je Q enolično določena (izrek 4.8).

Verjetno si je bralec že postavil naslednje vprašanje: Ali je lahko ekvivalentna martingalska verjetnost Q enaka naravni verjetnosti P? Ali bolj splošno, v kakšnem odnosz sta si verjetnosti P in Q?

Predpostavimo, da je v našem zgledu $P = Q$. Označimo $q = Q(\delta)$. Potem je

$$q = \frac{R-s}{d-s} \text{ in } 1-q = \frac{d-R}{d-s} = Q(\sigma).$$

Za matematični upanji velja

$$c_2 = E_Q\left(\frac{S_2}{1+R}\right) = E_P\left(\frac{S_2}{1+R}\right),$$

oziroma

$$(1+R)c_2 = E_Q(S_2) = E_P(S_2). \tag{II.4}$$

Donos tveganega vrednostnega papirja A_2 je enak

$$Y(\omega) = \frac{S_2(\omega) - c_2}{c_2}$$

za $\omega \in \{\delta, \sigma\}$. Uporabimo (II.4) in dobimo, da je pričakovani donos (matematično upanje Y) enak:

$$E_Q(Y) = E_P(Y) = \frac{E_P(S_2) - c_2}{c_2} = \frac{(1+R)c_2 - c_2}{c_2} = R.$$

To pomeni, da bi enakost $P = Q$ veljala le tedaj, ko bi bil pričakovani donos tveganega vrednostnega papirja enak donosu netveganega vrednostnega papirja. Tako enakost $P = Q$ ni smiselna, saj investitor želi večji pričakovani donos za tvegan vrednostni papir (premijo za tveganje), sicer bi vsa sredstva vložil v netvegan vrednostni papir in imel zagotovljen donos R. Da bo investitor vložil svoja sredstva v tvegan vrednostni papir, mora veljati

$$E_P(Y) > R.$$

To pomeni, da P ni ekvivalentna martingalska verjetnost glede na A_1, saj investitorji **niso nevtralni do tveganja** oziroma **so nenaklonjeni tveganju** (angl. *risk-averse*). Enakost $E_Q(Y) = R$ tudi razloži, zakaj Q imenujemo do tveganja nevtralna verjetnost. Q je verjetnost, glede na katero je pričakovani donos neodvisen od tveganja.

Do tveganja nevtralna verjetnost Q je le tehnični pripomoček za računanje pravične vrednosti $\pi_0(X)$. S pomočjo Q lahko pravično vrednost pogojne terjatve X izračunamo, ne da bi eksplicitno poznali izvedbeni portfelj za X. Verjetnost Q **je neodvisna** od P, pač pa se izraža samo z vrednostmi vrednostnih papirjev (natančneje z njihovimi donosi). To ni presenečenje, saj je pravična vrednost definirana kot strošek izvedbenega portfelja, ki ni odvisen od P.

Samo poimenovanje do tveganja nevtralne verjetnosti je lahko zavajajoče. V bistvu se zaradi vpeljave Q odnos investitorjev do tveganja ni prav nič spremenil. Pač pa smo s pomočjo Q v naš verjetnostni model za izračun pravične vrednosti vključili »tržno ceno za tveganje«. Namesto do tveganje nevtralna verjetnost bi bilo boljše reči **na tveganje prilagojena verjetnost** (angl. *risk-adjusted probability*).

Kako poiščemo pravično vrednost za nedosegljive pogojne terjatve? Naj bo $X \in \mathcal{L} - \mathcal{M}$ nedosegljiva pogojna terjatev. Označimo

$$\mathcal{M}_X = \{Y \in \mathcal{M}; X \leq Y\}.$$

Tu oznaka $X \leq Y$ pomeni, da je $Y - X$ pozitivna pogojna terjatev. Ker je S_1 strogo pozitivna pogojna terjatev, je $\mathcal{M}_X$ gotovo neprazna množica. Gotovo obstaja tak $a > 0$, da je

$$X \leq aS_1.$$

Pogojne terjatve iz $\mathcal{M}_X$ imenujemo **dominantne dosegljive pogojne terjatve** ali **superzaščitne pogojne terjatve** za X (angl. *dominating attainable contingent claim, suprahedge*). Za vsak $Y \in \mathcal{M}_X$ je cena $\pi_0(Y)$ zadostna za kritje stroškov X.

Vprašanje je, ali obstaja v $\mathcal{M}_X$ tak Y, da je cena $\pi_0(Y)$ minimalna. Odgovor je pozitiven. Dokaz dejstva, da π_0 doseže minimum na $\mathcal{M}$ zahteva nekaj rezultatov iz konveksnosti in linearnega programiranja ter ga tu ne bomo navedli.

Izrek 4.10 *Za vsako nedosegljivo pogojno terjatev X obstaja dominantna pogojna terjatev $Y_{min} \in \mathcal{M}_X$, za katero je*

$$\pi_0(Y_{min}) = \inf_{Y \in \mathcal{M}} (\pi_0(Y)).$$

Še več, velja

$$\inf_{Y \in \mathcal{M}} (\pi_0(Y)) = \sup_{\sigma \in \mathcal{E}^+_{\pi_o}} (\sigma(X)) = \sup_{\sigma \in \mathcal{E}^{++}_{\pi_o}} (\sigma(X)),$$

kjer je $\mathcal{E}^+_{\pi_o}$ množica vseh pozitivnih in $\mathcal{E}^{++}_{\pi_o}$ množica vseh krepko pozitivnih razširitev π_0 na $\mathcal{L}(\Omega)$.