Poglavje IV

Model finančnega trga z več obdobji

V tem poglavju bomo predstavili model finančnega trga z več obdobji.

1 Uvod

V tem modelu predpostavimo, da je trgovanje možno v časih $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, kjer je $T \geq 2$. V času T zaključimo s trgovanjem in zapremo vse odprte pozicije.

Predpostavimo, da v modelu trga lahko trgujemo z N finančnimi inštrumenti (delnicami, blagom, obveznicami, denarjem na banki, izvedenimi finančnimi inštrumenti, itd.)

Predpostavimo še, da se v času T ekonomija lahko nahaja v K različnih stanjih iz množice $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_K\}$. Na Ω imamo dano verjetnost $P : \Omega \to [0, 1]$, ki je za vsak $\omega \in \Omega$ pove verjetnost, da bo ekonomija v času T v stanju ω. Privzemimo, da je $P(\omega) > 0$ za vse $\omega \in \Omega$. Označimo $p_i = P(\omega_i)$. Potem velja $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1, \quad 0 < p_i < 1$.

V vmesnih časih $1, 2, \ldots, T - 1$ se nam informacije o možnih stanjih in njihovih verjetnosti odkrivajo postopoma z minevanjem časa. V času t imamo vse informacije iz časa $t-1$ in še nekaj novih. Informacijsko strukturo podamo na dva načina. Lahko jo podamo z naraščajočim zaporedjem σ - algeber $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_T$, kjer je $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ in $\mathcal{F}_T$ je potenčna množica množice Σ. Lahko pa za vsako σ - algebro podamo particijo $\mathcal{P}_t$ množice Σ na atome, to je razcep Ω na minimalne neprazne podmnožice v $\mathcal{F}_t$:

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k_t} A_i^t,$$

kjer je

$$\mathcal{P}_t = \{A_1^t, \dots A_{k_t}^t\}$$

in

$$A_i^t \bigcap A_j^t = \phi \text{ za } i \neq j.$$

Odslej bomo privzeli, da poznamo informacijsko strukturo za stanje ekonomije v časih od 0 do T, torej da poznamo σ - algebre $\mathcal{F}_t$ in njihove particije $\mathcal{P}$. Označimo $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_t\}_{t=0}^N$.

Slučajni proces $\mathcal{X} = (X_t)_{t=0}^T$ je zaporedje slučajnih spremenljivk $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$. Rečemo, da je slučajni proces $\mathcal{X}$ **prilagojen** informacijski strukturi $\mathcal{P}$, če je za vsak t slučajna spremenljivka X_t merljiva glede na $\mathcal{F}_t$. Slučajni proces $\mathcal{X}$ je **napovedljiv** glede na $\mathcal{P}$, če je X_0 merljiva glede na $\mathcal{F}_0$ in je X_t merljiva glede na $\mathcal{F}_{t-1}$ za $t = 1, 2, \dots T$. Za napovedljiv proces je vrednost $X_t(\omega)$ znana že v času $t-1$.

Pogojne terjatve imajo sedaj lahko različne dospelosti (ali zapadlosti) $S \in \{1, 2, \dots, T\}$. Pogojna terjatev z dospelostjo S je vzorec izplačil v času S, ki je pogojen z informacijo, ki jo imamo takrat. Podan je s slučajno spremenljivko $X_S : \Omega \to \mathbb{R}$, ki je merljiva glede na $\mathcal{F}_S$, torej je konstantna na vsakem od atomov A_j^S, $j = 1, 2, \dots, k_S$. X_S podamo s k_S - terico števil

$$\begin{bmatrix} X(A_1^S) \\ X(A_2^S) \\ \vdots \\ X(A_{k_S}^S) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k_S}$$

$X(A_j^S)$ je višina izplačila/plačila v času S, če se zgodi dogodek A_j^S.

Za vsakega od N finančnih inštrumentov v modelu poznamo njegovo izplačilo S_T v času T in njegov **cenovni proces** (angl. *price process*) $\{S_t\}_{t=0}^T$. Za vsak t je S_t slučajna spremenljivka na Ω z nenegativnimi vrednostmi in $\{S_t\}_{t=0}^T$ je prilagojen $\mathcal{P}$.

Privzemimo še, da je $S_t^i(\omega) > 0$, če je $S_T^i(\omega) > 0$. Torej je $S_0^i > 0$ za vse i. Poleg tega privzemimo, da je $S_T^1(\omega) > 0$ za vse $\omega \in \Omega$. Torej je tudi $S_t^1(\omega) > 0$ za vse $\omega \in \Omega$ in vse $t \in \{0, 1, \dots, T\}$.

Posebna primera finančnega premoženja, ki zadoščata tej zahtevi sta npr. brezkuponska obveznica z zapadlostjo T, ali pa sredstva naložena na bančnem računu. Privzemimo, da je

$$\begin{aligned} S_0^1 &= 1 \quad \text{in} \\ S_t^1(\omega) &= S_{t-1}^1(\omega)(1 + R_t(\omega)) \end{aligned}$$

za vse $\omega \in \Omega$, kjer je $\{R_t\}_{t=0}^T$ proces obrestnih mer, za katere velja:

- $R_0(\omega) = 0$ za vse $\omega \in \Omega$
- $R_t(\omega) > -1$ za vse ω in $t \geq 1$
- $\{R_t\}_{t=0}^N$ je napovedljiv proces glede na $\mathcal{P}$.

Če je za vsak t funkcija $R_t : \Omega \to \mathbb{R}$ konstantna, rečemo, da smo na trgu z **deterministično obrestno mero**. Če je $R_t = R$ neodvisna od t, pa rečemo, da smo na trgu s **konstantno obrestno mero**. Če obrestna mera ni deterministična, rečemo, da je **stohastična**.

Tudi pojem netveganega vrednostnega papirja, portfelja, inštrumenta itd., je sedaj odvisen od časovnega obzorja, ki ga gledamo. Obveznica z zapadlostjo T je netvegana na intervalu $[0, T]$. Njena vrednost v času S, $1 \leq S < T$, pa ni znana vnaprej in lahko zelo niha glede na informacijsko strukturo v času S.

Obveznica z zapadlostjo T je netvegana v vsakem intervalu $[t, T]$, tvegana pa v intervalu $[t_1, t_2]$, $t_2 < T$. Bančni račun, tj. sredstva naložena na banki s spremenljivo obrestno mero so netvegana v vsakem intervalu $[t, t+1]$.

Ponovimo še druge predpostavke popolnega trga, ki ga privzamemo v modelu:

- za vse finančne inštrumente na trgu predpostavimo, da so neskončno deljivi. Kupimo in prodamo lahko poljubno mnogo vsakega inštrumenta,
- na trgu ni trenja, tj. ni davkov, transakcijskih stroškov, inštrumenti ne izplačujejo dividend,
- dovolimo kratko prodajo vsakega od inštrumentov.

V našem modelu lahko trgujemo v vsakem od vmesnih časov t. **Statični portfelj** je kombinacija različnih pozicij v vsakem od N osnovnih vrednostnih papirjev. Podan je z N-terico števil

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

φ_j pove, kolikšen delež i - tega vrednostnega papirja imamo/smo si izposodili.

Dinamični portfelj z zapadlostjo S je portfelj, katerega sestava se spremeni v časih $0, 1, \ldots, S$. Podan je z zaporedjem $\Phi = (\Phi_1, \ldots \Phi_S)$:

- V času $t = 0$ investitor kupi portfelj Φ_1,
- v času $t = 1$ proda Φ_1 in kupi Φ_2,
- splošno, investitor ima v časovnem intervalu $[t-1, t]$ v lasti Φ_t. Tega proda v času t po trenutnih tržnih cenah in oblikuje portfelj Φ_{t+1}. To stori zadnjič v času $t = S-1$. V času $t = S$ investitor proda vse premoženje/poplača dolgove in se umakne s trga.

V realnosti bo investitor portfelj Φ_t v času $t-1$ oblikoval glede na informacije ki bodo znane takrat. Takemu preoblikovanju portfelja rečemo **stohastični dinamični portfelj** ali **trgovalna strategija** ali **strategija trgovanja** (angl. *trading strategy*).

Strategija trgovanja z zapadlostjo S je zaporedje

$$\underset{\frown}{\Phi}_t = (\underset{\frown}{\Phi}_t)_{t=1}^S = (\phi_t^1, \phi_t^2, \ldots, \phi_t^N)_{t=1}^S,$$

za katero velja:

Za vsak $i = 1, 2, \ldots, N$ je slučajni proces $\{\phi_t^i\}_{t=1}^S$ napovedljiv glede na $\mathcal{P}$. To pomeni, da je $\phi_t^i : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka glede na $\mathcal{F}_{t-1}$ za vse $i = 1, 2, \ldots, N$, oziroma, sestava portfelja v času $[t-1, t]$ bo znana v času $t-1$, ko poznamo informacijo $\mathcal{P}_{t-1}$.

2 Vrednotenje trgovalnih strategij

Za trgovalno strategijo Φ z zapadlostjo S imamo **nabavno vrednost** (angl. *acquisition value*) v času $t = 0, 1, \ldots, S-1$:

$$V_t^A(\underset{\frown}{\Phi}) = \sum_{i=1}^N \phi_{t+1}^i S_t^i,$$

in **prodajno (likvidacijsko) vrednost** (angl. *liquidation value*):

$$V_t^L(\underset{\frown}{\Phi}) = \sum_{i=1}^N \phi_t^i S_t^i,$$

Vrednost V_0^A imenujemo **začetna vrednost (cena)** in vrednost V_S^L **končna vrednost** trgovalne strategije $\underset{\frown}{\Phi}$.

Strategijo trgovanja $\underset{\frown}{\Phi}$ imenujemo **strategija samofinanciranja,** če je

$$V_t^L(\underset{\frown}{\Phi}) = V_t^A(\underset{\frown}{\Phi})$$

za vse $t = 1, 2, \ldots, S-1$. Pišemo kar $V_t(\underset{\frown}{\Phi}) = V_t^L(\underset{\frown}{\Phi})$.

Trditev 2.1 *Množica vseh strategij trgovanja z dospetjem S je vektorski prostor, podmnožica vseh strategij samofinanciranja z dospetjem S je vektorski podprostor. Funkcije V_t^A in V_t^L so linearne funkcije. $V_t(\Phi)$ je merljiva glede na $\mathcal{F}_t$.*

3 Pogojne terjatve

V modelu predpostavimo, da investitor v času $t = 0$ pove, kakšno premoženje si želi v času zapadlosti S, $1 \leq S \leq T$, za vsakega od možnih atomov iz $\mathcal{P}_S$. Svoje želje poda s funkcijo $X_S : \Omega \to \mathbb{R}$, ki je merljiva glede na $\mathcal{F}_S$. Zato je X_S podana s k_S - terico

$$X_S = \begin{bmatrix} X_S(A_1^S) \\ X_S(A_2^S) \\ \vdots \\ X_S(A_{k_S}^S) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k_S}.$$

X_S imenujemo pogojna terjatev z **dospelostjo** (oz. **zapadlostjo**) S (angl. *contingent claim with maturity S*). Pogojna terjatev X_S je **dosegljiva** (angl. *attainable*), če obstaja taka strategija samofinanciranja $\underset{\frown}{\Phi}$, da je $V_S(\underset{\frown}{\Phi}) = X_S$. V tem primeru rečemo, da je $\underset{\frown}{\Phi}$ **izvedbena strategija** (angl. *replicating strategy*) za X_S.

Množico pogojnih terjatev z dospelostjo S označimo z $\mathcal{L}_S(\Omega)$, množico vseh dosegljivih pogojnih terjatev z dospelostjo S pa z $\mathcal{M}_S$.

Definicija 3.1 Na trgu velja **zakon ene cene za dospelost S**, če za vsako dosegljivo pogojno terjatev X z več izvedbenimi strategijami $\{\Phi_j\}_{j\in J}$ velja $V_0^A(\Phi_j) = V_0^A(\Phi_l)$ za vse $j, l \in J$. X_S je **pozitivna** pogojna terjatev, če je $X_S(A_j^S) \geq 0$ za vse j in $X_S(A_j^S) > 0$ za vsaj en j. ◊

Če na trgu velja zakon ene cene, potem definiramo **cenovni funkcional**

$$\pi_S : \mathcal{L}_S(\Omega) \to \mathbb{R}$$

s predpisom

$$\pi_S(X_S) = V_0^A(\underset{\frown}{\Phi})$$

za neko (torej vsako) izvedbeno strategijo Φ. Ker je V_0^A linearna preslikava, je tudi π_S linearen funkcional.

Lema 3.2 *Zakon ene cene za dospelost S velja natanko tedaj, ko za vsako izvedbeno strategijo $\underset{\frown}{\Phi}$ za ničelno pogojno terjatev $X_S \equiv 0$ velja $V_0(\underset{\frown}{\Phi}) = 0$.*

Dokaz Ničelna strategija trgovanja je strategija samofinanciranja in je izvedbena strategija za ničelno pogojno terjatev. Zato mora biti po zakonu ene cene $V_0(\Phi) = 0$ za vsako izvedbeno strategijo Φ za $X_S \equiv 0$.

Obratno, če je $V_0(\underset{\frown}{\Phi}) = 0$ za vsako izvedbeno strategijo $\underset{\frown}{\Phi}$ za ničelno pogojno terjatev, potem predpostavimo, da zakon ene cene ne velja. Naj sta Φ_1 in Φ_2 izvedbeni strategiji za pogojno terjatev X_S in naj bo $V_0(\Phi_1) \neq V_0(\Phi_2)$ in $V_S(\Phi_1) = V_S(\Phi_2) = X_S$. Potem je $\Phi_1 - \Phi_2$ izvedbena strategija za $V_S(\Phi_1 - \Phi_2) = V_S(\Phi_1) - V_S(\Phi_2) \equiv 0$. Ker je $V_0(\Phi_1 - \Phi_2) = V_0(\Phi_1) - V_0(\Phi_2) \neq 0$, smo prišli do protislovja. Zato zakon ene cene velja. ■

Podobno, kot smo pokazali v modelu z enim obdobjem, pokažemo tudi sedaj, da je predpostavka, da zakon ene cene za dospelost S velja, smiselna predpostavka za naš model.

Trditev 3.3 *Natanko ena od trditev v modelu trga, ki ni nujno popoln, velja:*

1.) *Zakon ene cene za dospelost S velja,*

2.) *za vsako pogojno terjatev $X_S \in \mathcal{M}_S$ in vsako število $\lambda \in \mathbb{R}$ obstaja tak izvedbeni portfelj $\underset{\frown}{\Phi}$, da je $V_0(\Phi) = \lambda$.*

Dokaz Predpostavimo, da zakon ene cene za dospelost S ne velja. Potem po lemi 3.2 obstaja izvedbena strategija $\underset{\frown}{\Phi}$ za ničelno pogojno terjatev z $V_0(\Phi) \neq 0$. Naj bo $\underset{\frown}{\Psi}$ izvedbena strategija za pogojno terjatev X_S. Potem je tudi $\Psi + \gamma\underset{\frown}{\Phi}$ izvedbena za X_S. Za $\gamma_0 = \frac{\lambda - V_0(\Psi)}{V_0(\underset{\frown}{\Phi})}$ potem dobimo

$$V_0(\underset{\frown}{\Psi} + \gamma_0 \cdot \underset{\frown}{\Phi}) = V_0(\underset{\frown}{\Psi}) + \lambda - V_0(\Psi) = \lambda.$$

Trditev 3.4 *Zakon ene cene velja za vse dospelosti $S = 1, 2, \ldots T$ natanko tedaj, ko velja za dospelost T.*

Dokaz Predpostavimo, da zakon ene cene velja za dospelost T. Naj bo $\underset{\frown}{\Phi} = (\Phi)_{t=0}^{S}$ izvedbena strategija za $0 \in \mathcal{M}_S$, kjer je $1 \leq S \leq T$. Potem je $\underset{\frown}{\Psi} = (\Psi)_{t=0}^{T}$ podana z

$$\Psi_t = \Phi_t \text{ za } t = 0, 1, \ldots S$$

in

$$\Psi_t = 0 \text{ za } t = S + 1, S + 2, \ldots T$$

izvedbeno strategijo za $0 \in \mathcal{M}_T$. Ker velja zakon ene cene za dospelost T, je $V_0(\underset{\frown}{\Psi}) = 0$. Ker je $S \geq 1$, je $V_0(\underset{\frown}{\Psi}) = V_0(\underset{\frown}{\Phi}) = 0$. Iz leme 3.2 sledi, da zakon ene cene velja tudi za dospelost S. ■

Poslej bomo rekli na kratko zakon ene cene velja namesto zakon ene cene velja za dospelost T in s tem za vse dospelosti.

Definicija 3.5 Strategija samofinanciranja Φ z dospelostjo S je **arbitražna strategija** z dospelostjo S, če je $V_0(\Phi) = 0$, $V_t(\Phi) \geq 0$ za vse $t = 1, 2 \dots S$ in $V_S(\Phi) \not\equiv 0$. $\Diamond$

Opazimo, da je strategija arbitražna, če investitorju ni treba vložiti nobenih sredstev v časih $t = 0, 1, \dots S-1$, ob zapadlosti pa ima s pozitivno vrednostjo dobiček.

Kot v modelu z enim obdobjem, tudi v modelu z več obdobji predpostavka o neobstoju arbitražne strategije, pomeni, da so tržne cene v ravnovesju. Obstoj arbitražne strategije bi povečal povpraševanje nad ponudbo, kar bi povečalo cene.

Trditev 3.6 *Na trgu, ki ni nujno popoln, ne obstaja arbitražna strategija dospelostjo S, za vse $1 \leq S \leq T$, natanko tedaj, ko ne obstaja arbitražna strategija z dospelostjo T.*

Dokaz Naj bo $\underset{\frown}{\Phi} = (\Phi_t)_{t=0}^S$ arbitražna strategija z dospelostjo S, kjer je $1 \leq S < T$. Potem definiramo trgovalno strategijo $\underset{\frown}{\Psi} = (\Psi_t)_{t=1}^T$ s predpisom

$$\Psi_t = \Phi_t, \quad t = 0, 1, \dots, S,$$

$$\Psi_t = \begin{bmatrix} V_S(\underset{\frown}{\Psi}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ za } t = S+1, \dots, T.$$

Potem je $V_0(\underset{\frown}{\Psi}) = V_0(\underset{\frown}{\Phi}) = 0$ in

$$V_t(\underset{\frown}{\Psi}) \geq 0 \text{ za } t \geq 1,$$

ker to velja za $V_t(\Phi)$, $\quad t = 1, 2, \dots, S$ in je $S_t > 0$ za vse t. Očitno je $V_T(\underset{\frown}{\Psi})$ neničelna pogojna terjatev. Zato je $\underset{\frown}{\Psi}$ arbitražna strategija z dospelostjo T. $\blacksquare$

Poslej bomo rekli na kratko *na trgu ni arbitraže* ali tudi *na trgu ni arbitražne priložnosti* namesto *na trgu ni arbitražne strategije z dospelostjo T in s tem z dospelostjo S, $1 \leq S \leq T$.*

Sedaj bomo spet privzeli, da je trg popoln, torej da na njem ni arbitraže.

Trditev 3.7 *Predpostavimo, da je $\underset{\frown}{\Phi} = (\Phi_t)_{t=0}^S$ strategija samofinanciranja z dospelostjo T. Naj bo*

$$V_T(\Phi)(\omega) \geq 0 \text{ za vse } \omega \in A_j^s$$

za neka s in j, $0 \leq s < T$ in $1 \leq j \leq k_s$. Potem je

$$V_t(\Phi)(\omega) \geq 0 \text{ za vse } \omega \in A_j^s$$

za vse t, za katere $s \leq t \leq T$. Še več, če je $V_T(\Phi)(\omega) = 0$ za vse $\omega \in A_j^s$, potem je $V_t(\Phi)(\omega) = 0$ za vse $\omega \in A_j^s$ in vse t, za katere je $s \leq t \leq T$.

Dokaz Privzemimo, da prvi del trditve ne velja. Naj bo t_0 največje tako število t iz $\{0, 1, \dots, T-1\}$, da je $V_t(\Phi)(\omega) < 0$ za nek $\omega \in A_j^s$. Torej je $s \leq t_0 < T$ in $V_t(\Phi)(\omega) \geq 0$ za vse $\omega \in A_j^s$ in t, za katere je $t_0 < t \leq S$. Označimo z A dogodek $A_j^s \bigcap [V_{t_0}(\Phi) < 0]$. Ker je $V_{t_0}(\Phi)$ merljiva glede na $\mathcal{F}_{t_0}$, je $A \in \mathcal{F}_{t_0}$. Sedaj definirajmo strategijo samofinanciranja $\underset{\frown}{\Psi}$ s predpisom

$$\Psi_t = 0, \quad t = 1, 2, \dots, t_0,$$

$$\Psi_t = \mathcal{X}_A \cdot \left(\Phi_t - \begin{bmatrix} \frac{V_{t_0}(\Phi)}{S_{t_0}^1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad t = t_0 + 1, \dots, T.$$

Tu je

$$\mathcal{X}_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A \\ 1, & \omega \in A \end{cases}$$

indikatorska funkcija dogodka A. Za cenovni proces strategije $\underset{\frown}{\Psi}$ potem velja:

- $V_t(\underset{\frown}{\Psi}) = 0$ za $t \leq t_0$,
- $V_t(\underset{\frown}{\Psi})(\omega) = 0$ za $\omega \notin A$,
- $V_t(\underset{\frown}{\Psi})(\omega) = V_t(\underset{\frown}{\Phi})(\omega) - \frac{V_{t_0}(\underset{\frown}{\Phi})(\omega) \cdot S_t^1(\omega)}{S_{t_0}^1(\omega)} > 0$ za $\omega \in A$ in za $t > t_0$.

Torej je $\underset{\frown}{\Psi}$ arbitražna strategija z dospelostjo T, kar je v protislovju s predpostavko o popolnosti trga.

Če je $V_T(\Phi)(\omega) = 0$ za $\omega \in A_j^s$, potem je tudi $V_T(-\Phi)(\omega) = 0$ za $\omega \in A_j^s$. Zato nam zgornji sklep pove, da za $\omega \in A_j^s$ velja $V_t(-\Phi)(\omega) \geq 0$ za $s \leq t \leq T$. To je možno samo, če je $V_t(\Phi)(\omega) = 0$ za $\omega \in A_j^s$. ■

Posledica 3.8 *Če je $\underset{\frown}{\Phi}$ strategija samofinanciranja z dospetjem T, za katero je $V_T(\underset{\frown}{\Phi}) \leq 0$, potem je $V_t(\underset{\frown}{\Phi}) \leq 0$ za vse t, za katere je $0 \leq t \leq T$. Če je $V_T(\Phi) = 0$, potem je $V_t(\Phi) = 0$ za vse t, za katere je $0 \leq t \leq T$.*

Za dokaz vzamemo $A_j^s = \Omega$ in $s = 0$ v trditvi 3.7.

Posledica 3.9 *V popolnem trgu za poljubni dve strategiji samofinanciranja $\underset{\frown}{\Phi}$ in $\underset{\frown}{\Psi}$ z enako vrednostjo ob dospetju $V_T(\underset{\frown}{\Psi}) = V_T(\underset{\frown}{\Psi})$ velja*

$$V_t(\underset{\frown}{\Phi}) = V_t(\underset{\frown}{\Psi}) \text{ za vse } t,\ 0 \leq t \leq T. \tag{IV.1}$$

Dokaz Razlika $\underset{\frown}{\Phi}$ - $\underset{\frown}{\Psi}$ je izvedbena strategija za ničelno pogojno terjatev $0 \in \mathcal{M}_T$. Potem je $V_t(\underset{\frown}{\Phi} - \underset{\frown}{\Psi}) = 0$ za $t = 0, 1, \ldots, T$ po posledici 3.8. Zato velja (IV.1). ■

Posledica 3.9 pove, da v popolnem trgu velja zakon ene cene. Velja še več, dve strategiji z enakim izplačilom ob dospetju S imata enake vrednosti v vseh predhodnih časih $t = 0, 1 \ldots, T - 1$.

4 Stroga pozitivnost cenovnega funkcionala

Cenovni funkcional $\pi_S : \mathcal{M}_S \to \mathbb{R}$ je dan s predpisom

$$\pi_S(X_S) = V_0(\underset{\frown}{\Phi})$$

za neko izvedbeno strategijo $\underset{\frown}{\Phi}$ za pogojno terjatev X_S z dospelostjo S.

Izrek 4.1 *Predpostavimo, da trg ni nujno popoln. Potem na trgu ni arbitraže natanko tedaj, ko je cenovni funkcional π_S krepko pozitiven za vse S.*

Dokaz Predpostavimo, da na trgu ni arbitraže. Naj bo X_S pozitivna pogojna terjatev in Φ izvedbena strategija za X_S. Potem po posledici 3.8 je $V_t(\Phi) \geq 0$ za vse t, $0 \leq t \leq S$. Če bi veljalo $V_0(\Phi) = 0$, potem bi bila Φ arbitražna strategija. Torej mora biti $\pi_S(X_S) = V_0(\Phi) > 0$.

Obratno, predpostavimo, da je π_S krepko pozitiven. Naj bo Φ taka trgovalna strategija, da je $V_t(\Phi) \geq 0$ za vse t, $0 \leq t \leq S$ in $V_S(\Phi) = X_S$ neničelna pogojna terjatev. Potem je $V_0(\underset{\frown}{\Phi}) = \pi_S(X_S) > 0$. Torej na trgu ni arbitražne strategije. ■

Podobno kot v modelu z enim obdobjem tudi v modelu trga z več obdobji definiramo bazične, Arrow-Debreujeve pogojne terjatve z dospelostjo S z vektorji

$$E_j^S = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k_S}, \quad j = 1, 2, \dots, k_S.$$

E_j^S ima enico na j-tem mestu. Predstavlja pogojno terjatev, ki ob zapadlosti S izplača 1 enoto, če se dogodek A_j^S zgodi. Pišemo lahko tudi

$$E_j^S = \mathcal{X}_{A_j}^S.$$

$\{E_1^S, E_2^S, \dots, E_{k_S}^S\}$ je baza vektorskega prostora $\mathcal{L}_S(\Omega)$ vseh slučajnih spremenljivk merljivih glede na $\mathcal{F}_S$. Za pogojno terjatev X_S velja

$$X_S = \sum_{j=1}^{k_S} \alpha_j E_j^S \text{ za neke skalarje } \alpha_j$$

Pri tem je $\alpha_j = X_S(A_j^S)$. Za vsak S, $1 \leq S \leq T$, rečemo, da je trg **poln za dospelost** S, če je $\mathcal{M}_S = \mathcal{L}_S(\Omega)$, tj. vsaka pogojna terjatev z dosegljivostjo S je dosegljiva. Očitno je trg poln za dospelost S natanko tedaj, ko je vsaka Arrow - Debreujeva pogojna terjatev E_j^S, $j = 1, 2, \dots, k_S$ dosegljiva.

Trditev 4.2 *Trg je poln za vse dospelosti S, $1 \leq S \leq T$ natanko tedaj, ko je poln za dospelost T.*

Dokaz Predpostavimo, da je trg poln za dospelost T in izberimo pogojno terjatev E_j^S z dospelostjo S. Označimo $X_T = \mathcal{X}_{A_j}^S$. Torej je $X_T(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A_j^S \\ 1, & \omega \in A_j^S \end{cases}$, pogojna terjatev z dospelostjo T. Ker je trg poln za to dospelost, obstaja taka izvedbena strategija $\underset{\frown}{\Phi} = (\phi_t)_{t=0}^T$, da je $V_T(\underset{\frown}{\Phi}) = X_T$. Ker je $X_T(\omega) = 0$ za $\omega \notin A_j^S$, nam trditev 3.7 pove, da je $V_S(\Phi)(A_l^S) = 0$ za $l \neq j$. Ker je $X_T(\omega) = 1$ za $\omega \in A_j^S$, nam trditev 3.7 pove, da je $V_S(\Phi)(A_j^S) = \alpha_j > 0$.

Torej je $V_S(\Phi) = \alpha_j E_j^S$. Definiramo sedaj trgovalno strategijo $\underset{\frown}{\Psi} = (\Psi_t)_{t=0}^S$ s predpisom $\psi_t = \frac{1}{\alpha_j}\Phi_t$, $t = 0, 1, \dots, S$. Ta je izvedbena za E_j^S. Ker je j poljuben, je vsaka Arrow - Debreujeva pogojna terjatev E_j^S, $j = 1, 2, \ldots, k_S$ dosegljiva in trg je poln za dospelost S. ∎

Z enakim sklepanjem kot smo dokazali izrek 3.9 v poglavju IV dokažemo naslednji izrek.

Izrek 4.3 *Predpostavimo, da trg ni nujno popoln, vendar na njem velja zakon ene cene. Potem na trgu ni arbitraže natanko tedaj, ko ima cenovni funkcional* $\pi_S : \mathcal{M}_S \to \mathbb{R}$ *krepko pozitivno razširitev* $\hat{\pi}_S : \mathcal{L}_S(\Omega) \to \mathbb{R}$. *Če trg ni poln, potem je takih razširitev neskončno mnogo.*

Če trg ni poln, potem za vsako pogojno terjatev $X \in \mathcal{L}_S(\Omega) \backslash \mathcal{M}_S$ definiramo množico **dominantnih dosegljivih terjatev** kot

$$\mathcal{D}_X^S = \{Y \in \mathcal{M}_S; \quad Y - X \geq 0\}.$$

Ker je prvi vrednostni papir pozitiven i.e $S_t^1 > 0$ za vse t, je $\mathcal{D}_X^S \neq \phi$.

Pravično vrednost za nedosegljivo pogojno terjatev potem definiramo s predpisom

$$\pi_S(X) = \inf_{Y \in \mathcal{D}_X^S} \pi_S(Y).$$

Smiselnost te definicije in alternativne možnosti za izračun nam da naslednji izrek, ki ga pa ne bomo dokazali.

Izrek 4.4 *Za vsako nedosegljivo pogojno terjatev* $X \in \mathcal{L}_S(\Omega)$ *obstaja taka dominantna pogojna terjatev* $Y_0 \in \mathcal{D}_X^S$, *da je*

$$\pi_S(Y_0) = \inf_{Y \in \mathcal{D}_X^S} \pi_S(Y).$$

Velja še

$$\pi_S(Y_0) = \sup_{\hat{\pi} \in \xi_\pi^+} \hat{\pi}(X) = \sup_{\widetilde{\pi} \in \xi_\pi^{++}} \widetilde{\pi}(X),$$

kjer je ξ_π^+ *množica vseh pozitivnih razširitev* π_S *in* ξ_π^{++} *množica vseh krepko pozitivnih razširitev* π_S.

5 Martingali

Naj bo $\mathcal{X} = (X_t)_{t=0}^T$ slučajni proces, ki je prilagojen informacijski strukturi $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$. Potem rečemo, da je $\mathcal{X}$ martingal glede na $\mathcal{F}$, če za pogojno matematično upanje velja

$$E(X_t | \mathcal{F}_S) = X_S$$

za vse $0 \leq S \leq t \leq T$. Tu računamo pogojno matematično upanje glede na dano verjetnost P. V posebnem primeru imamo $E(X_t) = E(X_t|\mathcal{F}_0) = X_0$. Če je X cenovni proces nekega vrednostnega papirja, potem dejstvo, da je martingal, pomeni, da je pričakovana cena (= pogojno matematično upanje) tega papirja $X_t(\omega)$ v prihodnosti enaka trenutni ceni $X_S(\omega)$. Martingali torej predstavljajo procese, pri katerih sta pričakovana rast ali padec enaka 0.

Trditev 5.1 *Predpostavimo, da za martingala $(X_t)_{t=0}^T$ in $(Y_t)_{t=0}^T$ velja $X_T = Y_T$. Potem je $X_t = Y_t$ za vse $t = 0, 1, \ldots, T$.*

Dokaz Za $t = 0, 1, \ldots, T$. imamo

$$X_t = E(X_T|\mathcal{F}_t) = E(Y_T|\mathcal{F}_t) = Y_t.$$

Lema 5.2 *Slučajni proces $(X_t)_{t=0}^T$ je martingal natanko tedaj, ko je $E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = X_t$ za vse $t = 0, 1, \ldots, T-1$.*

Dokaz Ker je zaporedje $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ naraščajoče, za pogojno matematično upanje velja

$$E(E(X_t|\mathcal{F}_r)|\mathcal{F}_p) = E(X_t|\mathcal{F}_p)$$

za vse $t \geq r \geq p \geq 0$. Potem z indukcijo na $t - p$ dokažemo

$$E(X_{t+2}|\mathcal{F}_t) = E(E(X_{t+2}|\mathcal{F}_{t+1})|\mathcal{F}_t) = E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = X_t$$

in

$$E(X_{t+i+1}|\mathcal{F}_t) = E(E(X_{t+i+1}|\mathcal{F}_{t+1})|\mathcal{F}_t) = E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = X_t.$$

Definicija 5.3 Slučajni proces $(X_t)_{t=0}^T$ je **podmartingal**, če je

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$$

za vse $0 \leq s \leq t \leq T$. In je **nadmartingal**, če je

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$$

za vse $0 \leq s \leq t \leq T$. Če je cenovni proces podmartingal, potem pričakujemo porast vrednosti, če pa je nadmartingal, potem pa pričakujemo upad vrednosti v bodočnosti.

Lastnost biti martingal (podmartingal, nadmartingal) je odvisna od verjetnosti P in od informacijske strukture $\mathcal{F}$. Slučajni proces $(X_t)_{t=0}^T$ je **naraščajoč**, če je

$$X_0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_T.$$

in je **padajoč**, če je

$$X_0 \geq X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_T.$$

Izrek 5.4 *(Doobov razcep)*
Vsak prilagojen slučajni proces $(X_t)_{t=0}^T$ *ima enoličen razcep*

$$X_t = M_t + A_t, \tag{IV.2}$$

kjer je $(M_t)_{t=0}^T$ *martingal in* $(A_t)_{t=0}^T$ *napovedljiv proces z* $A_0 = 0$. *Če je* $(X_t)_{t=0}^T$ *podmartingal (nadmartingal), potem je napovedljiv proces* $(A_t)_{t=0}^T$ *naraščajoč (padajoč).*

Dokaz Za $t = 0, 1, \ldots, T$ definiramo rekurzivno

$$M_0 = X_0 \text{ in } A_0 = 0$$

ter

$$\begin{aligned} M_{t+1} &= M_t + X_{t+1} - E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) \\ A_{t+1} &= A_t - X_t + E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Za vsak $t = 0, 1, \ldots, T-1$ velja

$$\begin{aligned} E(M_{t+1}|\mathcal{F}_t) &= E(M_t|\mathcal{F}_t) + E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) - E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) \\ &= M_t. \end{aligned}$$

Lema 5.2 pove, da je $(M_t)_{t=0}^T$ martingal. Iz definicije A_{t+1} sledi, da je A_{t+1} merljiva glede na $\mathcal{F}_t$. Zato je slučajni proces $(A_t)_{t=0}^T$ napovedljiv.

Preverimo sedaj enoličnost razcepa. Če je

$$X_t = M_t^{'} + A_t^{'}$$

drug razcep z enakimi lastnostmi, potem je najprej

$$X_0 = M_0 = M_0^{'} \text{ in } A_0 = A_0^{'} = 0.$$

Z indukcijo na t pokažimo enakost obeh razcepov. Naj bo $M_t = M_t^{'}$ in $A_t = A_t^{'}$. Potem je

$$X_{t+1} = M_{t+1} + A_{t+1} = M_{t+1}^{'} + A_{t+1}^{'}.$$

Za pogojna matematična upanja glede na $\mathcal{F}_t$ velja

$$M_t + E(A_{t+1}|\mathcal{F}_t) = M_t^{'} + E(A_{t+1}^{'}|\mathcal{F}_t) \text{ in}$$

$$M_t + A_{t+1} = M_t^{'} + A_{t+1}^{'},$$

kjer smo upoštevali, da sta $(M_t)_{t=0}^T$ in $(M_t^{'})_{t=0}^T$ martingala in $(A_t)_{t=0}^T$ in $(A_t^{'})_{t=0}^T$ napovedljiva. Potem je $A_{t+1} = A_{t+1}^{'}$ in zato tudi $M_{t+1} = M_{t+1}^{'}$.

Če je $(X_t)_{t=0}^T$ nadmartingal, potem je $A_{t+1} - A_t = E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) - X_t \leq 0$. Torej je proces $(A_t)_{t=0}^T$ padajoč. Podobno za primer, ko je $(X_t)_{t=0}^T$ podmartingal, velja $A_{t+1} - A_t = E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) - X_t \geq 0$. Zato je zaporedje $(A_t)_{t=0}^T$ naraščajoče. ∎

Razcep (IV.2) imenujemo **Doobov razcep.** Martingalski del razcepa $(M_t)_{t=0}^T$ imenujemo **šok** ali **nepredvidljivi del**, slučajni proces $(A_t)_{t=0}^T$ pa imenujemo **trend** ali **predvidljivi del.**

6 Osnovna izreka vrednotenja

Vrednostni papir je **numerar**, če je njegov cenovni proces pozitiven za vsak atom iz $\mathcal{P}_t$ in za vse t. Predpostavili smo, da je prvi vrednostni papir numerar. Za vsak $j = 1, 2, \ldots, N$ definiramo diskontirani cenovni proces

$$\widetilde{S}_t^j = \frac{S_t^j}{S_t^1} \text{ za } j = 1, 2, \ldots, N \text{ in } t = 0, 1, \ldots, T.$$

Za dano strategijo trgovanja $\underset{\frown}{\Phi}$ sta njena začetna in končna vrednost v času t diskontiranega procesa enaka

$$\widetilde{V}_t^L(\underset{\frown}{\Phi}) = \frac{V_t^L(\underset{\frown}{\Phi})}{S_t^1}$$

in

$$\widetilde{V}_t^A(\underset{\frown}{\Phi}) = \frac{V_t^A(\underset{\frown}{\Phi})}{S_t^1}.$$

Za strategijo samofinanciranja Φ pa je

$$\widetilde{V}_t(\underset{\frown}{\Phi}) = \frac{V_t(\underset{\frown}{\Phi})}{S_t^1}$$

Za pogojno terjatev X_S z zapadlostjo S je **diskontirana pogojna terjatev** enaka $\widetilde{X}_S = \frac{X_S}{S_S^1}$. Če je X_S dosegljiva in je $\underset{\frown}{\Phi}$ njena izvedbena strategija, potem je

$$\widetilde{V}_S(\underset{\frown}{\Phi}) = \widetilde{X}_S.$$

Definicija 6.1 Verjetnost Q na Ω je **ekvivalentna martingalska verjetnost**, če velja:

- Q je ekvivalentna z dano verjetnostjo P, tj. $P(\omega) \neq 0$ natanko tedaj, ko je $Q(\omega) \neq 0$.
- Diskontirani cenovni procesi $(\widetilde{S}_t^j)_{t=0}^T$ so martingali glede na Q in $\mathcal{F}_t$, tj:

$$E_Q(\widetilde{S}_t^j | \mathcal{F}_s) = \widetilde{S}_s^j \tag{IV.3}$$

za $0 \leq s \leq t \leq T$ in $j = 1, 2, \ldots, N$. $\Diamond$

Trditev 6.2 *Naj bo Q ekvivalenta verjetnost s P. Potem je Q ekvivalentna martingalska verjetnost natanko tedaj, ko je za vsako strategijo samofinanciranja $\underset{\frown}{\Phi}$ z zapadlostjo S, $1 \leq S \leq T$, diskontirani proces vrednosti $(\widetilde{V}_t(\underset{\frown}{\Phi}))_{t=0}^{S}$ martingal glede na Q in $\mathcal{F}$, tj.*

$$E_Q(\widetilde{V}_t(\underset{\frown}{\Phi})|\mathcal{F}_s) = \widetilde{V}_s(\Phi) \tag{IV.4}$$

za $0 \leq s \leq t \leq S$.

Dokaz Če velja (IV.4) za vse $\underset{\frown}{\Phi}$, potem velja tudi (IV.3) saj za $\underset{\frown}{\Phi}$ lahko vzamemo statični portfelj, ki vsebuje eno enoto j - tega vrednostnega papirja.

Obratno, če velja (IV.3), potem se spomnimo, da je $\widetilde{V}_t(\Phi)$ linearna kombinacija $\widetilde{S}_t^j$, $j = 1, 2, \ldots, N$ in da je pogojno matematično upanje linearno. ■

Posledica 6.3 *Za vsako dosegljivo pogojno terjatev X_S z zapadlostjo S velja*

$$\pi_S(X_S) = S_0^1 E_Q(\widetilde{X}_S).$$

Dokaz Naj bo $\underset{\frown}{\Phi}$ izvedbena strategija za X_S. Potem je

$$\pi_S(X_S) = V_0(\Phi) = S_0^1 \widetilde{V}_0(\underset{\frown}{\Phi}) = S_0^1 E_Q(\widetilde{V}_S(\Phi)|\mathcal{F}_0) = S_0^1 E_Q(\widetilde{X}_S)$$

Izrek 6.4 *Naj bo Q verjetnost ekvivalentna P. Če je*

$$E_Q(\widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Phi})) = \widetilde{V}_0(\underset{\frown}{\Phi})$$

za vse strategije samofinanciranja $\underset{\frown}{\Phi}$ z zapadlostjo T, potem je Q ekvivalentna martingalska verjetnost.

Dokaz Po trditvi 6.2 je dovolj pokazati, da je $(\widetilde{S}_t^j)_{t=0}^T$ martingal glede na Q in $\mathcal{F}_t$ za vse j. Po lemi 5.2 zadošča pokazati

$$E_Q(\widetilde{S}_{t+1}^j|\mathcal{F}_t) = \widetilde{S}_{t+1}^j \tag{IV.5}$$

za vse j in t. Iz definicije in lastnosti pogojnega matematičnega upanja vemo, da je za dokaz enakosti (IV.5) dovolj pokazati

$$E_Q(\widetilde{S}_{t+1}^j \chi_A) = E_Q(\widetilde{S}_t^j \chi_A) \tag{IV.6}$$

za vse atome $A \in \mathcal{P}_t$.

Za dokaz enakosti (IV.6) oblikujemo naslednjo strategijo trgovanja $\underset{\frown}{\Phi}$:

- do časa $s-1$ ne kupimo/prodamo nobenega vrednostnega papirja
- če se v času s zgodi A, potem v času s prodamo eno enoto j-tega vrednostnega papirja in dobljena sredstva investiramo v prvi vrednostni papir,
- v času $s+1$ zapremo vse pozicije in dobljena sredstva investiramo v prvi vrednostni papir do zaključnega časa T.

Ker je $A \in \mathcal{F}_s$, je $\underset{\frown}{\Phi}$ prilagojen slučajni proces. Φ je strategija samofinanciranja, saj v vsakem času $t = 1, 2, \ldots, T-1$ vse dobičke vložimo. Iz opisa strategije sledi, da je $V_0(\underset{\frown}{\Phi}) = 0$. Končna vrednost pa je

$$V_T(\underset{\frown}{\Phi}) = \chi_A \left(\frac{S_s^j}{S_s^1} - \frac{S_{s+1}^j}{S_{s+1}^1} \right) S_T^1.$$

Zato je

$$\widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Phi}) = \chi_A \widetilde{S}_s^j - \chi_A \widetilde{S}_{s+1}^j.$$

Ker je

$$E_Q(\widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Phi})) = \widetilde{V}_0(\Phi) = 0,$$

je

$$E_Q(\chi_A \widetilde{S}_s^j - \chi_A \widetilde{S}_{s+1}^j) = 0,$$

kar je ekvivalentno enakosti (IV.6). Dokaz je končan. ■

Trditev 6.5 *Pogoj $E_Q(\widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Phi})) = 0$ za vsako strategijo samofinanciranja z $V_0(\underset{\frown}{\Phi}) = 0$ je ekvivalenten pogoju $E_Q(\widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Phi})) = \widetilde{V}_0(\underset{\frown}{\Phi})$ za vsako strategijo samofinanciranja $\underset{\frown}{\Phi}$.*

Dokaz Če pogoj $E_Q(\widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Phi})) = \widetilde{V}_0(\underset{\frown}{\Phi})$ velja splošno, potem velja tudi za strategije samofinanciranja z ničelno začetno vrednostjo.

Predpostavimo, da je $E_Q(\widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Phi})) = 0$ za vsako strategijo samofinanciranja z $V_0(\underset{\frown}{\Phi}) = 0$. Potem oblikujemo strategijo $\underset{\frown}{\Psi}$, pri kateri v času $t = 0$ investiramo vsoto $V_0(\underset{\frown}{\Phi})$ za nakup $\frac{V_0(\underset{\frown}{\Phi})}{S_0^1}$ enot prvega vrednostnega papirja. Torej imamo $\widetilde{V}_0(\underset{\frown}{\Psi}) = \widetilde{V}_0(\underset{\frown}{\Phi})$. Ker je $\underset{\frown}{\Phi} - \underset{\frown}{\Psi}$ strategija samofinanciranja in je $\widetilde{V}_0(\underset{\frown}{\Phi} - \underset{\frown}{\Psi}) = 0$, nam naša predpostavka pove, da velja $E_Q(\widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Phi}) - \widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Psi})) = 0$ oziroma $E_Q(\widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Phi})) = E_Q(\widetilde{V}_T(\underset{\frown}{\Psi})) = \widetilde{V}_0(\underset{\frown}{\Phi})$. ■

Trditev 6.6 *Naj bo Q ekvivalentna martingalska verjetnost. Na $\mathcal{L}_S(\Omega)$ definiramo linearni funkcional*

$$\pi_S^Q(X_S) = S_0^1 \cdot E_Q(\widetilde{X}_S)$$

Potem je π_S^Q krepko pozitivna razširitev cenovnega funkcionala $\pi_S : \mathcal{M}_S \to \mathbb{R}$.

Dokaz Naj bo X_S pozitivna pogojna terjatev. Potem je $X_S(A) > 0$ za nek $A \in \mathcal{P}_S$ in $X_S(A) \geq 0$ za vse $A \in \mathcal{P}_S$. Zato je

$$\pi_S^Q(X_S) = S_0^1 E_Q(\frac{X_S}{S_S^1}) = S_0^1 \sum_{j=1}^{k_S} \frac{X_S(A_j^S)}{S_S^1(A_j^S)} Q(A_j^S) > 0.$$

Torej je π_S^Q krepko pozitiven.

Če je $X_S \in \mathcal{M}_S$, je $X_S = V_S(\underset{\frown}{\Phi})$ za neko trgovalno strategijo $\underset{\frown}{\Phi}$. Potem je

$$\pi_S(X_S) = V_0(\Phi) = S_0^1 \widetilde{V}_0(\Phi) = S_0^1 E_Q(\widetilde{V}_S(\Phi)) = S_0^1 E_Q(\widetilde{X}_S) = \pi_S^Q(X_S).$$

Torej je π_S^Q razširitev π_S. ■

Trditev 6.7 *Če je $\hat{\pi}_T : \mathcal{L}_T(\Omega) \to \mathbb{R}$ krepko pozitivna razširitev cenovnega funkcionala $\pi_T : \mathcal{M}_T \to \mathbb{R}$, potem obstaja taka ekvivalentna martingalska verjetnost Q, da je*

$$\hat{\pi}_T(X_T) = \pi_T^Q(X_T)$$

za vse $X_T \in \mathcal{L}_T(\Omega)$.

Dokaz Ker je $\hat{\pi}$ krepko pozitiven, je

$$\hat{\pi}_T(X_T) = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j X_T(\omega_j)$$

za neka pozitivna števila α_j, $j = 1, 2, \ldots, K$. Še več, $\alpha_j = \hat{\pi}_T(E_j^T)$. Za dokaz trditve bomo uporabili izrek 6.4 in trditev 6.5. Naj bo $\underset{\frown}{\Phi}$ strategija samofinanciranja in $V_0(\underset{\frown}{\Phi}) = 0$. Potem je

$$\hat{\pi}_T(V_T(\Phi)) = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j V_T(\Phi)(\omega_j) = \pi_T(V_T(\Phi)) = V_0(\Phi) = 0. \quad \text{(IV.7)}$$

Definirajmo verjetnost $Q : \Omega \to [0, 1]$ s predpisom

$$Q(\omega_j) = q_j = \frac{\alpha_j S_T^1(\omega_j)}{S_0^1}, \ j = 1, 2, \ldots, K.$$

Ker so vsi α_j pozitivni in je S_t^1 numerar, torej strogo pozitiven, je $q_j > 0$ za vse j. Ker je tudi

$$\sum_{j=1}^{K} q_j = \sum_{j=1}^{K} \frac{\alpha_j S_T^1(\omega_j)}{S_0^1} = \frac{\pi_T(S_T^1)}{S_0^1} = \frac{S_0^1}{S_0^1} = 1,$$

je Q verjetnost, ki je ekvivalentna P. Z uporabo (IV.7) dobimo

$$E_Q(\widetilde{V}_T(\Phi)) = \sum_{j=1}^{K} q_j \frac{V_T(\Phi)(\omega_j)}{S_T^1(\omega_j)} = \frac{1}{S_0^1} \sum_{j=1}^{K} \alpha_j V_T(\Phi)(\omega_j) = 0.$$

Iz izreka 6.4 in trditve 6.5 sedaj sledi, da je Q ekvivalentna martingalska verjetnost. Iz definicij potem dobimo

$$\pi_T^Q(X_T) = S_0^1 E_Q\left(\frac{X_T}{S_T^1}\right) = S_0^1 \sum_{j=1}^{K} \frac{X_T(\omega_j)}{S_T^1(\omega_j)} q_j = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j X_T(\omega_j) = \hat{\pi}_T(X_T)$$

za vse pogojne terjatve X_T z dospelostjo T. ∎

Sedaj smo pripravili vse potrebno za dokaz obeh osnovnih izrekov finančne matematike za model z več obdobji. V prvem spet predpostavimo, da trg ni nujno popoln.

Izrek 6.8 ***(Prvi osnovni izrek vrednotenja premoženja)*** *Obstoj ekvivalentne martingalske verjetnosti je ekvivalenten pogoju, da je trg brez arbitražne strategije.*

Dokaz Izrek 4.3 in trditev 3.6 nam povesta, da je pogoj o neobstoju arbitražne strategije ekvivalenten obstoju krepko pozitivne razširitve funkcionala π_T.

Iz trditev 6.6 in 6.7 sledi, da je obstoj pozitivne razširitve funkcionala π_T ekvivalenten obstoju ekvivalentne martingalske verjetnosti. ∎

Izrek 6.9 ***(Drugi osnovni izrek vrednotenja premoženja)*** *Privzemimo, da je trg popoln, tj. da ni arbitražnih strategij. Potem obstaja natanko ena ekvivalentna martingalska verjetnost natanko tedaj, ko je trg poln.*

Dokaz Izrek 4.3 nam pove, da ima cenovni funkcional π_T neskončno krepko pozitivnih razširitev, če trg ni poln. Če je trg poln, je π_T definiran na vsem $\mathcal{L}_T(\Omega)$ in ima samo trivialno razširitev π_T. ∎

Za numerar lahko izberemo npr. bančni račun ali brezkuponsko obveznico z zapadlostjo T. Na popolnem in polnem trgu imamo potem dve (v splošnem) različni ekvivalentni martingalski verjetnosti: V primeru, ko je numerar bančni račun, rečemo, da je Q **do prihodnosti nevtralna verjetnost** (angl. *forward-neutral probability*). V primeru bančnega računa imamo $S_1^1 = 1$ in zato je

$$\pi_T^Q(X) = E_Q\left(\frac{X}{S_T^1}\right).$$

V primeru brezkuponske obveznice rečemo, da je Q **do tveganja nevtralna verjetnost** (angl. *risk-neutral probability* ali *risk-adjusted probability*). Tedaj je $S_T^1 = 1$ in zato sledi

$$\pi_T^Q(X) = S_0^1 E_Q(X). \tag{IV.8}$$

Možnost (IV.8) je bolj priročna za diskontiranje izplačil ob dospetju T.

Če v ekonomskem modelu, ki smo ga prepostavili, privzamemo za numerar netvegan finančni instrument, potem je pričakovana vrednost glede na ekvivalentno martingalsko verjetnost enaka zagotovljeni vrednosti, ki nam bi jo prinesel tak instrument. Za numerar bi lahko vzeli tudi finančni instrument, katerega rast je blizu povprečni rasti finančnega trga. Primeri takih numerarjev so npr. borzni indeksi. Za pristop, kjer privzamemo borzni indeks za numerar, se uporablja izraz **pristop s ciljem** (angl. *benchmark approach*).