Binomski model trga

(Rešitve nalog)

(a) Označimo izplačilo obvezničarjev ob dospetju obveznice s P_T^{dZCB}. Ker je obveznica tvegana, $P_T^{\mathrm{dZCB}} \not\equiv N$, ampak je končna vrednost obveznice odvisna od takratne vrednosi podjetja. Velja

$$P_T^{\mathrm{dZCB}} = \begin{cases} N; & V_T \geq N \\ V_T; & V_T < N \end{cases} = \min\{V_T, N\}$$

Izplačilo delničarjev (le v primeru, da v času T svoje delnice prodajo) bo znašalo

$$E_T = \begin{cases} V_T - N; & V_T \geq N \\ 0; & V_T < N \end{cases} = \max\{V_T - N, 0\}.$$

Očitno je položaj delničarjev ekvivalenten dolgi poziciji v evropski nakupni opciji na premoženje podjetja z zapadlostjo T in izvršilno ceno N.

(b) Računamo

$$\min\{V_T, N\} = V_T + \min\{0, N - V_T\} = V_T - \max\{0, V_T - N\}$$

in ugotovimo, da je položaj obvezničarjev ekvivalenten dolgi poziciji v premoženju podjetja in kratki poziciji v evropski nakupni opciji na premoženje podjetja z zapadlostjo T in izvršilno ceno N.

(c) Vrednost podjetja V_t modeliramo z binomskim modelom s T obdobji in parametri V_0, u, d in R. Pri vrednotenju tvegane brezkuponske obveznice bomo uporabili samo končna izplačila

$$P_T^{\mathrm{dZCB}} = \min\{V_T, N\},$$

zato zadostuje, če možna končna stanja prikažemo s tabelo.

Privzemimo, da je $V_0 d^T < N < V_0 u^T$. Stolpcu cen in izplačil dodamo še stolpec do tveganja nevtralnih verjetnosti Q. Te izračunamo s pomočjo do tveganja nevtralne prehodne verjetnosti

$$q = \tfrac{1+R-d}{u-d},$$

ki je neodvisna od časa in stanja.

Stanje	Vrednost podjetja V_T	Izplačilo P_T^{dZCB}	Verjetnost Q
u^T	$V_0 u^T$	N	q^T
$u^{T-1}d$	$V_0 u^{T-1} d$	N	$Tq^{T-1}(1-q)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$u^{n+1}d^{T-n-1}$	$V_0 u^{n+1} d^{T-n-1}$	N	$\binom{T}{n+1} q^{n+1}(1-q)^{T-n-1}$
$u^n d^{T-n}$	$V_0 u^n d^{T-n}$	$V_0 u^n d^{T-n}$	$\binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ud^{T-1}	$V_0 u d^{T-1}$	$V_0 u d^{T-1}$	$Tq(1-q)^{T-1}$
d^T	$V_0 d^T$	$V_0 d^T$	$(1-q)^T$

Število n je največje naravno število, za katerega je

$$V_0 u^n d^{T-n} \leq N.$$

Rešimo neenačbo

$$V_0 d^T (\tfrac{u}{d})^n \leq N$$

$$(\tfrac{u}{d})^n \leq \tfrac{N}{V_0 d^T}$$

$$n \ln \tfrac{u}{d} \leq \ln \tfrac{N}{V_0 d^T}$$

$$n \leq \frac{\ln \frac{N}{V_0 d^T}}{\ln \frac{u}{d}} = \frac{\ln N - \ln(V_0 d^T)}{\ln u - \ln d}$$

Pri tem smo upoštevali, da je naravni logaritem strogo naraščajoča funkcija, zato logaritmiranje ohranja (smeri) neenakosti. Nato upoštevamo še, da je $u > d$ in zato $\frac{u}{d} > 1$ in $\ln \frac{u}{d} > 0$. Deljenje z izrazom $\ln \frac{u}{d}$ zato prav tako ohranja neenakosti.
Največji ustrezni n je

$$n = \left\lfloor \frac{\ln N - \ln(V_0 d^T)}{\ln u - \ln d} \right\rfloor.$$

Cena tvegane brezkuponske obveznice je tako

$$P_0^{\mathrm{dZCB}} = \tfrac{1}{(1+R)^T} \, \mathrm{E}_Q(P_T^{\mathrm{dZCB}}) =$$

$$= \tfrac{1}{(1+R)^T} \Big(\sum_{j=0}^{n} V_0 u^j d^{T-j} \tbinom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} + \sum_{j=n+1}^{T} N \tbinom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} \Big) =$$

$$= \tfrac{1}{(1+R)^T} \Big(V_0 \sum_{j=0}^{n} \tbinom{T}{j} u^j q^j d^{T-j} (1-q)^{T-j} + N \sum_{j=n+1}^{T} \tbinom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} \Big)$$

Posebej še omenimo možnosti, ko $N \leq V_0 d^T$ in $N \geq V_0 u^T$. V prvem primeru vrednost podjetja vselej presega nominalno vrednost obveznice, zato je obveznica v resnici netvegana in obvezničarji zanjo ob izdaji plačajo $P_0^{\mathrm{dZCB}} = \frac{N}{(1+R)^T}$.

V drugem primeru je vrednost podjetja vselej manjša od nominalne vrednosti obveznice, zato je podjetje plačilno nesposobno in obvezničarji ob dospetju prejmejo V_T. V tem primeru so ob izdaji za obveznico pripravljeni plačati $P_0^{\mathrm{dZCB}} = V_0$.

(d) Pri danih podatkih najprej izračunamo $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{1.05-0.92}{1.15-0.92} = \frac{13}{23}$ in uporabimo formulo iz (c).

(i) $n = 0$ in $P_0^{\mathrm{dZCB}} = 30.6947$.
(ii) $n = 1$ in $P_0^{\mathrm{dZCB}} = 36.8214$.
(iii) $n = 2$ in $P_0^{\mathrm{dZCB}} = 42.9158$.

Če obveznica ne bi bila tvegana, bi bilo $P_0^{\mathrm{ZCB}} = \frac{N}{(1+R)^T}$ in bi dobili

(i) $P_0^{\mathrm{ZCB}} = 30.6957$.
(ii) $P_0^{\mathrm{ZCB}} = 36.8348$.
(iii) $P_0^{\mathrm{ZCB}} = 42.9739$.

Nizke cene obveznic so posledica visokih obrestnih mer, vpliv tveganosti na ceno je pri danih podatkih zelo majhen.