**Enoobdobni model trga**

(Domača naloga)

Obravnavamo enoobdobni model trga, na katerem trgujete z delnicama $S$ in $W$. Ceni delnic v času 0 sta $S_0 > 0$ in $W_0 > 0$. V času 1 sta možni dve stanji sveta $\Omega = \{\omega_{\text{good}}, \omega_{\text{bad}}\}$. Izplačili delnic sta odvisni od končnega stanja in sta podani z $S_1(\omega_{\text{good}}) = S_0u$, $W_1(\omega_{\text{good}}) = W_0h$ in $S_1(\omega_{\text{bad}}) = S_0d$, $W_1(\omega_{\text{bad}}) = W_0\ell$.

Privzemite, da za faktorje $u$, $d$, $h$, $\ell$ velja $u > d > 0$ in $h > \ell > 0$, tako da sta $\omega_{\text{good}}$ in $\omega_{\text{bad}}$ res *dobro* in *slabo* stanje sveta, ter da je $u \neq h$ ali $d \neq \ell$.

(a) Definirajte enostavne donose $r_S$ delnice $S$, $r_W$ delnice $W$ ter $r_\theta$ portfelja $\theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ delnic $S$ in $W$. Pokažite, da lahko donos portfelja $\theta$ zapišemo kot linearno kombinacijo donosov posameznih delnic. Kaj pomenita uteži v dobljeni linearni kombinaciji?

(b) Izrazite pričakovani donos, varianco donosa in tveganost portfelja $\theta$ s pričakovanima donosoma in variancama donosov delnic $S$ in $W$.

*Opomba: Tveganost portfelja je standardni odklon donosa portfelja.*

(c) Naj bo $p = P(\omega_{\text{good}})$. Izračunajte pričakovani donos delnice $S$ in pokažite, da je tveganost delnice $S$ sorazmerna z $u - d$ za kakršnokoli porazdelitev verjetnosti $(p, 1-p)$ na $\Omega$. Pri danih $u$ in $d$ ugotovite, kdaj je tveganost delice $S$ največja.

(d) Izračunajte kovarianco in korelacijo med donosoma delnic $S$ in $W$.

(e) Določite pogoje za $u$, $d$, $h$ in $\ell$, pod katerimi bo trg brez arbitraže. Pokažite, da je pod temi pogoji trg poln. Kaj pogoji za neobstoj arbitraže pomenijo za tveganosti delnic?

(f) Odslej privzemimo, da je trg brez arbitraže. Določite vektor cen stanj.

(g) Vzemite delnico $S$ za numerar in poiščite ekvivalentno martingalsko verjetnost.

(h) Naj bo $S = 50$, $u = 1.1$, $d = 0.95$, $W = 100$, $h = 1.15$, $\ell = 0.9$. Določite začetne cene naslednjih pogojnih terjatev:

(i) $X = 1_{\{\omega_{\text{bad}}\}}$,

(ii) $X = 70$,

(iii) $X = \max\{2S_1, W_1\}$,

(iv) $X = W_1 \cdot 1_{\{S_1 > 50\}}$,

(v) $X = S_1 - S_0$.