

Enoobdobni model trga

(Rešitve nalog)

Najprej zapišemo vektor cen $c = \begin{bmatrix} S_0 \\ W_0 \end{bmatrix}$ in matriko izplačil $M = \begin{bmatrix} S_0 u & W_0 h \\ S_0 d & W_0 \ell \end{bmatrix}$.

- (a) Naj bo S_1 slučajna spremenljivka, ki predstavlja vrednost delnice S v času 1. Enostavni donos delnice S je

$$r_S = \frac{S_1 - S_0}{S_0}.$$

Analogno definiramo še enostavni donos delnice W

$$r_W = \frac{W_1 - W_0}{W_0}.$$

Naj portfelj $\theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ vsebuje α delnic S in β delnic W . Njegovo izplačilo v času 1 je slučajna spremenljivka

$$V_1(\theta) = \alpha S_1 + \beta W_1,$$

njegova cena v času 0 pa konstanta

$$V_0(\theta) = \alpha S_0 + \beta W_0.$$

Enostavni donos portfelja θ je

$$r_\theta = \frac{V_1(\theta) - V_0(\theta)}{V_0(\theta)} = \frac{\alpha S_0}{\alpha S_0 + \beta W_0} \cdot r_S + \frac{\beta W_0}{\alpha S_0 + \beta W_0} \cdot r_W.$$

Utež pred donosom delnice S predstavlja delež sedanje vrednosti portfelja, ki je investiran v delnico S , utež pred donosom delnice W pa delež, investiran v delnico W .

- (b) Uporabimo zvezo

$$r_\theta = \frac{\alpha S_0}{\alpha S_0 + \beta W_0} \cdot r_S + \frac{\beta W_0}{\alpha S_0 + \beta W_0} \cdot r_W$$

iz naloge (a) ter linearnost operatorja pričakovane vrednosti ter izračunamo

$$E(r_\theta) = \frac{\alpha S_0}{\alpha S_0 + \beta W_0} E(r_S) + \frac{\beta W_0}{\alpha S_0 + \beta W_0} E(r_W).$$

Za izračun variance donosa uporabimo formulo

$$\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + b^2 \text{var}(Y) + 2ab \text{cov}(X, Y)$$

in tako dobimo

$$\text{var}(r_\theta) = \left(\frac{\alpha S_0}{\alpha S_0 + \beta W_0} \right)^2 \text{var}(r_S) + \left(\frac{\beta W_0}{\alpha S_0 + \beta W_0} \right)^2 \text{var}(r_W) + \frac{2\alpha\beta S_0 W_0}{(\alpha S_0 + \beta W_0)^2} \text{cov}(r_S, r_W).$$

Tveganost portfelja dobimo iz

$$\sigma(r_\theta) = \sqrt{\text{var}(r_\theta)}.$$

(c) Donos delnice S je slučajna spremenljivka $r_S = \frac{S_1 - S_0}{S_0}$. Lahko preverimo, da je

$$E(r_S) = \frac{E(S_1) - S_0}{S_0},$$

$$\text{var}(r_S) = \frac{1}{S_0^2} \text{var}(S_1) = \frac{1}{S_0^2} (E(S_1^2) - E(S_1)^2),$$

kjer je

$$S_1 \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} S_0 u & S_0 d \\ p & 1-p \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad S_1^2 \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} (S_0 u)^2 & (S_0 d)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Tako dobimo

$$E(r_S) = (u-1)p + (d-1)(1-p),$$

$$\text{var}(r_S) = p(1-p)(u-d)^2,$$

$$\sigma(r_S) = \sqrt{p(1-p)}(u-d).$$

Pri danih parametrih u in d je tveganost delnice S najvišja, ko ima izraz $p(1-p)$ najvišjo vrednost, kar je pri $p = \frac{1}{2}$.

(d) Z uporabo lastnosti kovariance lahko preverimo, da je

$$\text{cov}(r_S, r_W) = \frac{1}{S_0 W_0} \text{cov}(S_1, W_1) = \frac{1}{S_0 W_0} (E(S_1 W_1) - E(S_1)E(W_1)),$$

kjer je

$$W_1 \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} W_0 h & W_0 \ell \\ p & 1-p \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad S_1 W_1 \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} S_0 W_0 u h & S_0 W_0 d \ell \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Tako dobimo

$$\text{cov}(r_S, r_W) = p(1-p)(u-d)(h-\ell),$$

$$\text{cor}(r_S, r_W) = \frac{\text{cov}(r_S, r_W)}{\sigma(r_S)\sigma(r_W)} = 1.$$

(e) Nalogo rešimo tako, da poskusimo poiskati vektor cen stanj $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$.

Zapišemo sistem enačb $M^T \psi = c$ in ga obravnavamo z Gaussovo eliminacijo

$$\left[\begin{array}{cc|c} S_0 u & S_0 d & S_0 \\ W_0 h & W_0 \ell & W_0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} u & d & 1 \\ h & \ell & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} u & d & 1 \\ 0 & u\ell - dh & u - h \end{array} \right]$$

Če je $u\ell - dh \neq 0$, ima sistem enolično rešitev

$$\psi_1 = \frac{\ell - d}{u\ell - dh}, \tag{1}$$

$$\psi_2 = \frac{u - h}{u\ell - dh}, \tag{2}$$

Trg je brez arbitraže natanko tedaj, ko sta izraza (1) in (2) obo pozitivna.

- Če je $u\ell - dh > 0$, je trg brez arbitraže natanko tedaj, ko je $\ell - d > 0$ in $u - h > 0$, torej $\ell > d$ in $u > h$, oziroma

$$d < \ell < h < u. \quad (3)$$

- Če je $u\ell - dh < 0$, je trg brez arbitraže natanko tedaj, ko je $\ell - d < 0$ in $u - h < 0$, torej $\ell < d$ in $u < h$, oziroma

$$\ell < d < u < h. \quad (4)$$

Opazimo, da pogoja (3) ali (4) avtomično implicirata predpostavko $u\ell - dh \neq 0$, na osnovi katere sta izpeljana.

Polnost trga sledi iz drugega osnovnega izreka finančne matematike, saj je ob pogoju $u\ell - dh \neq 0$ vektor cen stanj enolično določen. Lahko tudi upoštevamo, da pogoj $u\ell - dh \neq 0$ pomeni, da je $\det M \neq 0$. Torej je rang matrike M enak številu možnih stanj v času 1.

Ker sta tveganosti delnice S in W

$$\sigma(r_S) = \sqrt{p(1-p)}(u-d), \quad \sigma(r_W) = \sqrt{p(1-p)}(h-\ell),$$

pogoj (3) za neobstoj arbitraže pomeni, da je tveganost delnice S strogo višja od tveganosti delnice W , pogoj (4) pa, da je tveganost delnice W strogo višja od tveganosti delnice S .

Za konec si oglejmo še primer, ko je $u\ell - dh = 0$.

Sistem enačb $M^T \psi = c$ je rešljiv le, če je $u - h = 0$, torej $u = h$. Od tod pa sledi še $\ell = d$. Enakosti $u = h$ in $\ell = d$ sta sicer v nasproju s predpostavkami naloge, pomenita pa, da sta donosa delnic S in W enaka (t.j. enaka v obeh možnih stanjih). Torej ima naš model v resnici le en instrument in eno možno stanje v času 1. Zaradi pozitivnosti vseh parametrov v nalogi je tak trg avtomično brez arbitraže in poln.

Če pa je $u\ell - dh = 0$ in $u - h \neq 0$, pa sistem nima rešitve in trg ni brez arbitraže.

(f) Vektor cen stanj smo izračunali v nalogi (d) in dobili

$$\psi = \begin{bmatrix} \frac{\ell-d}{u\ell-dh} \\ \frac{u-h}{u\ell-dh} \end{bmatrix}.$$

(g) Izberemo delnico S za numerar in izračunamo vektor diskontiranih cen \tilde{c} in matriko diskontiranih izplačil

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{w_0}{s_0} \end{bmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_0 h}{s_0 u} \\ 1 & \frac{w_0 \ell}{s_0 d} \end{bmatrix}.$$

Naj bo ekvivalentna martingalska verjetnost Q podana s $q_1 = Q(\omega_1)$ in $q_2 = Q(\omega_2)$. Martingalska lasnost določa sistem enačb

$$q_1 + q_2 = 1$$

$$\frac{h}{u}q_1 + \frac{\ell}{d}q_2 = 1$$

Če trg ne dopušča arbitraže, je $u\ell - dh \neq 0$ in ima sistem enolično rešitev

$$q_1 = \frac{u\ell - ud}{u\ell - dh},$$

$$q_2 = \frac{ud - dh}{u\ell - dh}.$$

(h) Ponovno izpišemo podatke.

$$c = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 55 & 115 \\ 47.5 & 90 \end{bmatrix}$$

Za vrednotenje pogojnih terjatev uporabimo vektor cen stanj

$$\psi = \begin{bmatrix} \frac{20}{41} \\ \frac{20}{41} \end{bmatrix} = \frac{20}{41} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pogojne terjatve predstavimo z vektorji in jih vrednotimo tako, da njihova izplačila skalarno pomnožimo z vektorjem cen stanj.

$$(i) X = 1_{\{\omega_{\text{bad}}\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \pi_0(X) = \langle X, \psi \rangle = \frac{20}{41} = 0.4878.$$

$$(ii) X = 70 = \begin{bmatrix} 70 \\ 70 \end{bmatrix} \text{ in } \pi_0(X) = \frac{20}{41} \cdot (70 + 70) = \frac{2800}{41} = 68.2927.$$

$$(iii) X = \max\{2S_1, W_1\} = \begin{bmatrix} 115 \\ 90 \end{bmatrix} \text{ in } \pi_0(X) = \frac{20}{41} \cdot (115 + 90) = \frac{4200}{41} = 102.4390.$$

$$(iv) X = W_1 \cdot 1_{\{S_1 > 50\}} = \begin{bmatrix} 115 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } \pi_0(X) = \frac{20 \cdot 115}{41} = \frac{2300}{41} = 56.0976.$$

$$(v) X = S_1 - S_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2.5 \end{bmatrix} \text{ in } \pi_0(X) = \frac{20}{41} \cdot (5 - 2.5) = \frac{50}{41} = 1.2195.$$