

7. ENOObDOBNI MODEL TRGA - cenovni funkcional

1. Obravnavamo enoobdobni model trga z delnico in netveganim bančnim računom s fiksno obrestno mero $R = 5\%$. Začetna cena obeh instrumentov je 1, končna cena delnice pa je podana z $S_1(\omega_1) = 2$ in $S_1(\omega_2) = 0.5$.
 - (a) Izpišite podatke in jih prikažite z *binomskim drevesom*.
 - (b) Dokažite, da je opisan trg poln in ne dopušča arbitraže.
 - (c) Določite izvedbeni portfelj za pogojno terjatev X z izplačili x_1 v stanju ω_1 in x_2 v stanju ω_2 .
 - (d) Dokažite, da na opisanem trgu velja zakon ene cene, in določite cenovni funkcional ter vektor cen stanj.
 - (e) Na trgu je ponujen finančni instrument C z izplačili $C(\omega_1) = 3$ in $C(\omega_2) = 0.2$ v času 1 ter ceno 1.6 v času 0. Kaj bi storili?

2. Enoobdobni model trga sestavljata dva finančna instrumenta in tri možna stanja sveta v času $t = 1$. Prvi instrument je netvegana brezakuponska obveznica s ceno 100 in 5% donosom, drugi pa delnica s ceno $S_0 = 52$ in možnimi prihodnjimi vrednostmi

$$S_1 = \begin{bmatrix} 56 \\ 52 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

- (a) Dokažite, da trg ni poln, in določite množico dosegljivih pogojnih terjatev \mathcal{M} .
- (b) Katere od spodnjih pogojnih terjatev so na trgu dosegljive?
 - (i) $X = |S_1 - S_0|$,
 - (ii) $Y = (2, 3, 4)^T$.
 - (iii) $Z =$ evropska nakupna opcija, napisana na delnico S , z zapadlostjo 1 in izvršilno ceno 50.

Pri dosegljivih terjatvah izračunajte še njihove poštene cene.
- (c) Določite cenovni funkcional $\pi_0 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (d) Poiščite vse krepko pozitivne razširitve $\hat{\pi}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionala π_0 .
- (e) S funkcionalom $\hat{\pi}_0$ določite take cene pogojnih terjatev iz točke (b), da razširjeni trg ostane brez arbitraže. Pri tem
 - (i) obravnavajte tri primere, ko dodate po le eno terjatev,
 - (ii) obravnavajte primer, ko dodate vse terjatve hkrati.

Domača naloga

1. (Kolokvij 31.5.2010) V enoobdobnem modelu trga z dvema vrednostnima papirjema so v času $t = 1$ možna tri stanja ω_g , ω_m in ω_b . Prvi papir je tvegana brezcuponska obveznica B z nominalno vrednostjo 100 in ceno 75. Ta obveznica v času 1 v stanjih ω_g in ω_m izplača svojo nominalno vrednost, v stanju ω_b pa njen izdajatelj propade in ne izplača ničesar. Drugi vrednostni papir je delnica S , katere vrednost v času 1 je

	ω_g	ω_m	ω_b
S_1	54	48	42

njena cena v času 0 pa je 51.

- (a) Dokažite, da trg ni poln, in določite množico dosegljivih pogojnih terjatev.
- (b) Določite vse krepko pozitivne razširitve cenovnega funkcionala.
- (c) Finančnik želi na obravnavanem trgu ponuditi instrument A z izplačili

$$A(\omega_g) = 10, \quad A(\omega_m) = x, \quad A(\omega_b) = 14$$

in začetno ceno y . Dokažite, da obstaja natanko en $x \in \mathbb{R}$, pri katerem je instrument A dosegljiv na trgu (B, S) . Pri tem x določite izvedbeni portfelj pogojne terjatve A in njeno ceno y .

- (d) Naj bo $x = 6$. Določite množico brezarbitražnih cen za terjatev A .

2. (Kolokvij 6.6.2011) V enoobdobnem modelu finančnega trga lahko trgujemo z dvema delnicama S in W . Začetni ceni delnic znašata $S_0 = 10$ in $W_0 = 9$, končni pa sta podani s predpisoma

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 10; & \omega = \omega_b \\ 10; & \omega = \omega_m \\ 12; & \omega = \omega_g \end{cases} \quad \text{in} \quad W_1(\omega) = \begin{cases} 5; & \omega = \omega_b \\ 8; & \omega = \omega_m \\ 13; & \omega = \omega_g \end{cases}$$

- (a) Določite vektor cen stanj za obravnavani model in dokažite, da trg ne dopušča arbitraže.
- (b) Pogojna terjatev X predstavlja dolgo pozicijo v terminkem poslu na delnico S z ročnostjo 1 in izročitveno ceno 10. Določite ceno terjatve X na trgu $\{S, W\}$. Ali je terjatev dosegljiva?
- (c) Na trg $\{S, W\}$ želimo dodati bančni račun B z netvegano obdobjno obrestno mero R . Določite množico dopustnih obrestnih mer R , pri katerih je razširjeni trg $\{B, S, W\}$ brez arbitraže.

Opcije, katerih izplačila so odvisna od vrednosti več tveganih vrednostnih papirjev, imenujemo *mavrične opcije (rainbow options)*, vrednostnim papirjem pa *barve*.

Mavrična nakupna opcija na maksimum (rainbow call on max) ob zapadlosti imetniku omogoča nakup najdražjega izmed vrednostnih papirjev (barv) po vnaprej dogovorjeni izvršilni ceni K .

- (d) Naj bo $R = 10\%$. Določite premijo mavrične nakupne opcije na maksimum z zapadlostjo 1, izvršilno ceno 9 in barvama S, W na trgu $\{B, S, W\}$.

3. (Kolokvij 11.6.2012) Vrednost delnice S danes znaša 6 USD, cena enote zlata pa je 10 USD. Privzemite, da bodo čez en mesec možne naslednje cene delnice in enote zlata

Stanje	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Delnica v USD	8	6	5	4
Enota zlata v USD	8	10	11	12

V nalogi zlato obravnavajte kot povsem finančno blago.

- (a) Določite vektor cen stanj in dokažite, da trg ne dopušča arbitraže.
 (b) V času 0 izdamo evropsko prodajno opcijo na enoto zlata z izvršilno ceno 11 USD in zapadlostjo 1 mesec ter pogojno terjatev Y , ki v času 1 izplača

Stanje	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Izplačilo v USD	5	2	0	0

Določite ceni terjatev v času 0 in ugotovite, ali sta (vsaka posebej) na trgu dosegljivi.

- (c) Dokažite, da lahko s portfeljem delnice in zlata ustvarimo netvegan finančni instrument. Koliko znaša njegov netvegan donos?
 (d) Privzemite, da so glede na naravno verjetnost P vsi izidi ω_i enako verjetni. Izračunajte kovarianco med enostavnim donosom delnice S in enostavnim donosom zlata. Ali sta donosa neodvisna?