

8. ENOObDOBNI MODEL TRGA - ekvivalentna martingalska verjetnost

1. Obravnavamo enoobdobni model finančnega trga. Ekonomsko negotovost v času 1 opisuje množica stanj $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Začetne cene vrednostnih papirjev B , S^1 in S^2 znašajo $B_0 = 90$, $S_0^1 = 54$ ter $S_0^2 = 48$. Končna izplačila prikazuje spodnja preglednica.

	ω_1	ω_2	ω_3
B_1	100	100	100
S_1^1	100	80	40
S_1^2	100	40	40

- (a) Izračunajte netvegano obdobjno obrestno mero.
 (b) Določite do tveganja nevtralnno verjetnost in dokažite, da trg ne dopušča arbitraže. Ali je trg poln?
 (c) Pozitivna pogojna terjatev C ima v času 0 ceno $C_0 = 20$, v času 1 pa izplačila

	ω_1	ω_2	ω_3
C_1	x	20	y

Določite pogoje za x in y , da bo razširjeni trg (B, S^1, S^2, C) brez arbitraže.

- (d) Izberite delnico S^2 za numerar in izračunajte pripadajočo ekvivalentno martingalsko verjetnost.
 (e) Z uporabo točke (d) ponovno rešite nalogo (c). Kaj opazite?
2. Na trgu so podane obveznica B z začetno ceno $B_0 = 10$ in netveganim donosom 10% ter delnici S^1 in S^2 s cenama $S_0^1 = 20$ ter $S_0^2 = 30$. Za končne vrednosti delnic velja $S_1^i = S_0^i(1+r)$, kjer ima r verjetnostno funkcijo

$$r \stackrel{P}{\sim} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Določite do tveganja nevtralnno verjetnost Q in dokažite, da trg ni poln.
 (b) Določite take cene naslednjih pogojnih terjatev, da trg ostane brez arbitraže. Pri tem obravnavajte vsako pogojno terjatev posebej.
 (i) $X = \max\{S_1^1, S_1^2\}$,
 (ii) $Y = (S_1^1)^2$.

Ali je katera pogojna terjatev dosegljiva?

- (c) *Problem prodajalca.* Finančnik je prodal instrument z izplačili Y . Poiščite njegov superzaščitni portfelj na trgu (B, S^1) . Kakšna so njegova cena in izplačila?
 (d) *Enostavni donos* portfelja θ je slučajna spremenljivka $r_\theta = \frac{V_1(\theta) - V_0(\theta)}{V_0(\theta)}$. Njeno matematično upanje je *pričakovani donos* portfelja.

Izračunajte pričakovana donosa obveznice in delnice S^1

- (i) glede na naravno verjetnost P ,
 (ii) glede na do tveganja nevtralnno verjetnost Q .

Domača naloga

1. **(Izpit 31.8.2010)** Cena delnice S danes znaša 100 EUR, obdobjna obrestna mera na netveganem bančnem računu pa je 10%. Privzemite, da prihodnji razvoj cene delnice lahko opišemo z enoobdobnim binomskim modelom s parametroma u in d , kjer je $u > 1$ in $d = u^{-1}$.
 - (a) Naj bo $u = 1.25$. Dokažite, da je trg brez arbitraže, in izračunajte do tveganja nevtralne verjetnosti končnih stanj v modelu.
 - (b) Na delnico S zapišemo evropsko nakupno opcijo z zapadlostjo 1 in izvršilno ceno 98 EUR. Z modelom iz točke (a) določite njeno ceno v času 0.
 - (c) Privzemite, da je na trgu možno kupiti opcijo iz (b) po ceni $\frac{160}{11} = 14.\overline{54}$ EUR. Skonstruirajte arbitražo.
 - (d) *Umerjanje (kalibriranje) modela.* Privzemite, da je cena opcije $\frac{160}{11}$ EUR pravilna, napačen pa je vaš model (torej parameter u) iz točke (a). Popravite model tako, da bo pravilno vrednotil obravnavano opcijo. Koliko sta nova u' in q' ?
Nasvet: Pazite na lastnosti parametrov, ki so navedene na začetku naloge. Postavljeni model tudi ne sme dopuščati arbitraže

2. **(Izpit 4.7.2011)** Obravnavamo enoobdobni model trga, na katerem trgujemo z dvema enotskima brezkuponskima obveznicama različnih izdajateljev. Prva obveznica je netvegana z začetno ceno $0 < D < 1$. Druga obveznica je tvegana (lahko propade): njena začetna cena je $0 < F < 1$, njeno izplačilo v času 1 pa je v primeru solventnosti izdajatelja enako 1, v primeru bankrota pa izplača delež $0 \leq \delta < 1$, znan kot *stopnja povračila (recovery rate)*.
 - (a) Določite do tveganja nevtralno verjetnost v modelu ter potrebne in zadostne pogoje za parametre D , F in δ , pod katerimi je obravnavani trg brez arbitraže?
 - (b) Izrazite do tveganja nevtralno verjetnost bankrota izdajatelja druge obveznice s pomočjo D , F in δ .
 - (c) Naj bo trg brez arbitraže in naj bo naravna verjetnost bankrota izdajatelja druge obveznice enaka p . Izračunajte pričakovani donos tvegane obveznice in določite potrebne in zadostne pogoje za parameter p , pod katerimi je pričakovani donos tvegane obveznice višji od pričakovanega donosa netvegane obveznice. Pojasnite rezultat.

3. **(Izpit 28.6.2012)** Naj bo S_t cena delnice S v trenutku t . *Delniško ovratnico (equity collar)* v času 0 sestavimo z
 - nakupom delnice S ,
 - nakupom prodajne opcije z izvršilno ceno K ,
 - prodajo (izdajo) nakupne opcije z izvršilno ceno L .
 Pri tem sta obe opciji napisani na delnico S in imata zapadlost $T > 0$.
 - (a) Naj bo $K = 16$ in $L = 30$. Določite izplačila delniške ovratnice v času T v odvisnosti od S_T .

Naj bo $S_0 = 20$, zapadlost ovratnice $T = 1$ in naj trenutna netvegana obrestna mera za to dospelje znaša $R = 5\%$. Privzemite, da bodo v času 1 možne tri cene delnice S , in sicer 28, 21 in 14.

- (b) Izberite delnico S za numerar in določite pripadajočo ekvivalentno martingalsko verjetnost. Ali je na trgu možna arbitraža?

Nasvet: Pri bančnem računu vzemite $B_0 = 20$.

- (c) Določite ceno delniške ovratnice iz (a).
- (d) Privzemite, da je delniška ovratnica iz (a) postala likviden finančni instrument in da se je na trgu zanjo izoblikovala cena $20\frac{5}{7}$. Na trgu bi radi izdali še eno delniško ovratnico. Fiksirajmo $K = 16$. Ali je možno izbrati tak $L > 21$, da bo cena delniške ovratnice enaka ceni delnice S (*zero cost collar*)?