

### 3. TERMINSKE OBRESTNE MERE

1. Naj bo  $t < T < U$  in naj  $t$  označuje današnji dan.  $L(t, T)$  je trenutna navadna obrestna mera za dospelje  $T$ ,  $D(t, T)$  pa trenutni diskontni faktor za isto obdobje.

(a) Izpeljite terminsko obrestno mero  $L(t, T, U)$  v trenutku  $t$  za obdobje  $[T, U]$ . Kako se terminska obrestna mera izraža s trenutnimi diskontnimi faktorji?

(b) Naj bodo trenutne obrestne mere enake za vsa dospelja. Kaj lahko poveste o terminskih obrestnih merah?

(c) *Intenzivnost terminske obrestne mere (instantaneous forward rate)*  $f(t, T)$  je v času  $t$  dogovorjena terminska obrestna mera za finančno transakcijo, ki se prične v trenutku  $T$  in konča 'takoj zatem'. Definirana je kot

$$f(t, T) = \lim_{U \searrow T} L(t, T, U).$$

Naj bo diskontna funkcija  $T \mapsto D(t, T)$  zvezno odvedljiva. Pokažite, da je

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln D(t, T).$$

2. Naj bo  $t < T < U$  in naj  $t$  označuje današnji dan.  $Y(t, T)$  je trenutna moč obresti za dospelje  $T$ ,  $D(t, T)$  pa trenutni diskontni faktor za isto obdobje.

(a) Izrazite terminsko moč obresti  $Y(t, T, U)$  s trenutnima  $Y(t, T)$  in  $Y(t, U)$ .

(b) Naj bodo trenutne moči obresti enake za vsa dospelja. Kaj lahko poveste o terminskih močeh obresti?

(c) Naj bo časovna struktura moči obresti  $Y(t, T)$  naraščajoča funkcija dospelja  $T$ . Dokažite, da je tedaj terminska moč obresti  $Y(t, T, U)$  višja od trenutnih moči  $Y(t, T)$  in  $Y(t, U)$  za poljubna  $T$  in  $U$ .

3. Banka pri poslovanju s svojimi komitenti uporablja zvezno obrestovanje in naslednje moči obresti

$t$	0.5	1.0	1.5	2.0
$Y(0, t)$	3.00%	3.30%	3.50%	4.00%

Podjetnik - njen komitent - ve, da bo čez pol leta potreboval 30 000 EUR kredita, ki ga bo lahko povrnil v enkratnem znesku leto dni po najemu. Že danes bi si rad zagotovil prihodnjo moč obresti in s tem ceno kredita.

(a) Izračunajte terminsko moč obresti  $Y(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .

(b) Kljub dolgotrajnim pogajanjem banka podjetniku ne želi ponuditi vnaprej znane moči obresti. Dokažite, da si podjetnik z ustreznim portfeljem takojšnjega kredita in depozita vseeno lahko zagotovi vnaprej znano ceno kredita.

(c) Ceno kredita iz (b) izrazite z obrestno mero pri zveznem obrestovanju.

(d) Banka si v strahu pred izgubo komitenta naposled le premisli in podjetniku za kredit ponudi terminsko obrestno mero 3.70%. Pripravite arbitražno strategijo in izračunajte podjetnikov netvegan zaslužek.

**Domača naloga**

1. (**Kolokvij 19.4.2010**) Naj bo časovna struktura trenutnih moči obresti  $Y(0, T)$  podana s funkcijo  $Y(0, T) = F(T)$ , kjer je funkcija  $F$  odvedljiva. Naj bo  $0 < T < U$ .

(a) Izrazite terminsko moč obresti  $Y(0, T, U)$  s funkcijo  $F$ .

(b) *Intenzivnost terminske moči obresti*  $f(0, T)$  je definirana kot

$$f(0, T) = \lim_{U \searrow T} L(0, T, U).$$

Pokažite, da velja

$$f(0, T) = F(T) + T \cdot F'(T).$$

(c) Nelson-Sieglov model časovne strukture moči obresti uporablja naslednjo funkcijo

$$F(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-T/\alpha}}{T/\alpha} - \beta_2 e^{-T/\alpha},$$

kjer je  $\alpha > 0$ . Izračunajte  $\lim_{T \searrow 0} F(T)$  in  $\lim_{T \rightarrow \infty} F(T)$  ter intenzivnost terminske moči obresti za Nelson-Sieglov model.

(d) Pojasnite vpliv parametra  $\alpha$  na obliko časovne strukture moči obresti iz Nelson-Sieglovega modela.

2. (**Izpit 22.8.2012**) Naj bo  $0 < T < U$  in naj  $0$  označuje današnji dan.  $Y(0, T)$  je trenutna moč obresti za dospelje  $T$ ,  $D(0, T)$  pa trenutni diskontni faktor za isto obdobje.

(a) Izpeljite terminsko moč obresti  $Y(0, T, U)$  in jo izrazite s trenutnimi diskontnimi faktorji.

(b) Naj bo diskontna funkcija  $T \mapsto D(0, T)$  zvezno odvedljiva. Pokažite, da za intenzivnost terminske moči obresti velja

$$(1) \quad f(0, T) = -\frac{d}{dT} \ln D(0, T).$$

Pri opisovanju obrestnih mer včasih najprej podamo časovno strukturo intenzivnosti terminske moči obresti  $T \mapsto f(0, T) \equiv f(T)$  in nato druge količine izpeljemo iz nje z obratom formule (1),

$$D(0, T) = e^{-\int_0^T f(t) dt}.$$

Naj funkcija  $f$  določa časovno strukturo intenzivnosti terminske moči obresti.

(c) Izrazite trenutno moč obresti  $Y(0, T)$  in terminsko moč obresti  $Y(0, T, U)$  s pomočjo funkcije  $f$  in interpretirajte rezultata.

(d) Naj bo funkcija  $f$  naraščajoča. Dokažite, da je tedaj tudi časovna struktura moči obresti naraščajoča.

*Nasvet: Izračunajte odvod.*