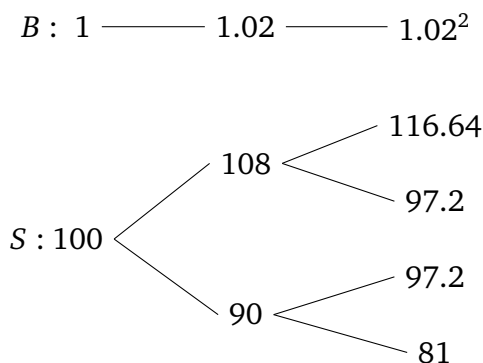


## 10. VEČOBDOBNI MODEL TRGA - ekvivalentna martingalska verjetnost

1. V nalogi je predstavljena alternativna rešitev naloge 2 iz sklopa 9.

V modelu z dvema obdobjema nastopata dva instrumenta. Prvi je bančni račun s konstantno obdobjno obrestno mero 2%, drugi pa delnica z začetno ceno 100. Vrednost delnice lahko v vsakem obdobju naraste za 8% ali pade za 10%.



- Izračunajte do tveganja nevtralne prehodne verjetnosti.
- Izračunajte do tveganja nevtralne verjetnosti vseh stanj v modelu.
- Določite začetno ceno pogojne terjatve  $X$ , ki v trenutku  $t \in \{1, 2\}$  izplača

$$X_t = S_t \cdot 1_{\{S_t < S_{t-1}\}},$$

torej izplača ceno delnice  $S_t$  pod pogojem, da je cena delnice padla.

2. Obravnavamo dvoobdobni model trga, na katerem trgujemo z dvema enotskima brez-kuponskima obveznicama istega izdajatelja. Prva brezkuponska obveznica ima dospelje 1 in ceno  $0 < D(0, 1) < 1$ . Druga ima dospelje 2 in ob času 0 ceno  $0 < D(0, 2) < 1$ . Njena cena v času 1 je lahko  $D(1, 2)_u$  (če obrestna mera pade) ali  $D(1, 2)_d$  (če obrestna mera naraste), kjer je  $0 < D(1, 2)_d < D(1, 2)_u < 1$ .

- Narišite drevo dogodkov, ki pripada opisanemu trgu.
- Določite omejitve za  $D(0, 1)$ ,  $D(0, 2)$ ,  $D(1, 2)_u$  in  $D(1, 2)_d$ , pod katerimi je trg brez arbitraže, in izračunajte do prihodnosti nevtralno verjetnost.
- Ali je opisani trg poln?
- Naj bo  $R(0, 1, 2)$  terminska obrestna mera v času 0 za obdobje  $[1, 2]$ . Kako se  $R(0, 1, 2)$  izraža z  $D(0, 1)$  in  $D(0, 2)$ ?
- Naj bo  $D(1, 2)_u = \frac{1}{1+R(1, 2)_u}$  in  $D(1, 2)_d = \frac{1}{1+R(1, 2)_d}$ . Izrazite pogoj za neobstoj arbitraže z uporabo  $R(0, 1, 2)$ ,  $R(1, 2)_u$  in  $R(1, 2)_d$ .

## Domača naloga

1. (Kolokvij 11.6.2012) Predvideno gibanje cene delnice v prihodnosti naj opisuje binomski model s tremi obdobji in faktorjema  $u = 1.1$  ter  $d = 0.9$ . Danes je delnica vredna 20 EUR, obdobjna obrestna mera za netvegan bančni račun pa znaša 2% in se v prihodnosti ne bo spreminjala.

- (a) Narišite drevo dogodkov ter določite vse do tveganja nevtralne prehodne verjetnosti.
- (b) Določite premijo digitalne opcije z zapadlostjo 3 in izvršilno ceno 20 EUR. To je pogojna terjatev, ki ob zapadlosti izplača 1 EUR pod pogojem, da je tedaj cena delnice višja od izvršilne cene.

Ragljasta<sup>1</sup> opcija (*cliquet* ali *ratchet option*) z zapadlostjo  $T$  je portfelj  $T$  zaporednih opcij, v katerem se prva aktivira v času 0 in ima zapadlost 1, druga se aktivira ob zapadlosti prve in ima zapadlost 2 itd. Izvršilna cena posamezne opcije se določi ob njeni aktivaciji (*reset date*) tako, da je opcija tedaj na meji. Vse opcije v portfelju imajo isto osnovno premoženje.

Imetnik ragljaste opcije plača njeno premijo v času 0, denarne tokove pa lahko prejme ob zapadlosti posamezne opcije ali pa (seštete) v trenutku  $T$ .

- (c) Opcijska raglja je *nakupna*, če so vse opcije v portfelju nakupne. Privzemite, da imetnik prejme izplačila ob zapadlosti posamezne opcije. Določite premijo nakupne ragljaste opcije z zapadlostjo 2.
- (d) Privzemite, da imetnik prejme seštevek izplačil šele ob zapadlosti ragljaste opcije. Določite premijo nakupne ragljaste opcije z zapadlostjo 2.
2. (Izpit 5.9.2012) Obravnavamo model trga z dvema obdobjema in dvema vrednostnima papirjema. Prvi je bančni račun  $B$ , na katerem se stanje v obdobju od 0 do 1 obrestuje z obrestno mero 4%, v obdobju od 1 do 2 pa z obrestno mero 5%.

Drugi vrednostni papir je delnica z začetno ceno  $S_0 = 20$ . Do trenutka 1 vrednost delnice naraste za 5%, ostane nespremenjena ali pade za 10%. V obdobju  $[1, 2]$  nato vrednost delnice naraste za 10% ali pade za 5%, neodvisno od dogajanja v obdobju  $[0, 1]$ .

- (a) Narišite drevo dogodkov, ki prikazuje opisano negotovost.
- (b) Določite do tveganja nevtralno verjetnost v modelu in dokažite, da trg ne dopušča arbitraže. Ali je trg poln?
- (c) Ob času 0 na delnico  $S$  napišemo digitalno opcijo z zapadlostjo 2 in izvršilno ceno 20. Določite njeno premijo v času 0. Ali je opcija na trgu dosegljiva?  
*Digitalna opcija ob zapadlosti izplača znesek 1, če je tedaj cena delnice višja od izvršilne cene.*
- (d) Določite vse možne izvršilne cene  $K$ , pri katerih je digitalna opcija z zapadlostjo 2 na trgu dosegljiva.

---

<sup>1</sup>Raglja kot orodje se imenuje tudi nasadni ključ.