11. VEČOBDOBNI MODEL TRGA - binomski in "trinomski" model trga

1. Predvideno gibanje cene delnice v prihodnosti naj opisuje binomski model s petimi obdobji in faktorjema $u = 1.2$ in $d = 1.05$. Danes je delnica vredna 10 EUR, konstantna obrestna mera za netvegani bančni račun pa znaša 8% in se v prihodnosti ne bo spreminjala.

   (a) Na delnico v trenutku 0 napišemo evropsko nakupno opcijo z zapadlostjo 3 in izvršilno ceno 14 EUR. Izračunajte njeno premijo.

   (b) Na isto delnico hkrati napišemo še evropsko prodajno opcijo z enako zapadlostjo in izvršilno ceno. Izračunajte njeno premijo.

   (c) Preverite, da za opcijski premiji iz nalog (a) in (b) velja pariteta evropskih opcij.

2. *Opcija denar ali nič* (*cash-or-nothing option*) z zapadlostjo T, izvršilno ceno K in izplačilom C je finančni instrument, ki lastniku v času T omogoča izplačilo C pod pogojem, da je tedaj cena delnice (strogo) višja od K. Če je $C = 1$, opcijo imenujemo tudi *digitalna opcija* (*digital option*).

   (a) Izpeljite formulo za vrednotenje opcije denar ali nič z binomskim modelom s parametri T, u, d, S_0 in R.

   (b) Naj bo $S_0 = 50$, $u = 1.1$, $d = 0.95$, $R = 0.04$, $T = 10$, $K = 70$ in $C = 20$. Določite premijo opcije denar ali nič.

   (c) Grafično prikažite razvoj cene delnice tako, da bo lega vozlišča (t, S_t) v binomskem drevesu sorazmerna vrednostima t in S_t ali pa t in $\log S_t$.

   (d) Na obeh slikah prikažite še do tveganja nevtralne verjetnosti končnih stanj z vodoravnimi stolpci enakih višin, ki se pričnejo na nivoju $x = T$ in končajo tako, da njihova dolžina ustreza verjetnosti izbranega stanja.

3. Obravnavamo dvoobdobni model trga, na katerem lahko trgujemo z dvema vrednostnima papirjema. Prvi je netvegan bančni račun z obdobno obrestno mero R, drugi pa tvegana delnica, ki v času $[0, 2]$ ne izplačuje dividend. Cena delnice se giblje po naslednjih pravilih: v času 1 znaša $S_0 u$ ali $S_0 d$, kjer je $0 < d < u$ in S_0 začetna vrednost delnice. Če je v času 1 vrednost delnice enaka $S_0 d$, je nato v času 2 vredna $S_0 ud$ ali $S_0 d^2$, če pa je v času 1 vredna $S_0 u$, v času 2 lahko zavzame vrednosti $S_0 u^2$, $S_0 um$ in $S_0 ud$, kjer je $d < m < u$.

   (a) Narišite drevo dogodkov, ki prikazuje opisano negotovost.

   (b) Naj bo $R = 4\%$, $S_0 = 100$, $u = 1.1$, $m = 1.01$ in $d = 0.95$. Izračunajte do tveganja nevtralno verjetnost v modelu.

   (c) Ali je pri vrednostih parametrov iz naloge (b) trg popoln? Kaj pa poln?

   (d) Na delnico s podatki iz naloge (b) napišemo evropsko nakupno opcijo z zapadlostjo 2 in izvrčilno ceno 107. Določite njeno premijo.

   (e) Ali je opcija iz (d) dosegljiva na trgu (B, S)?

Domača naloga

1. (**Izpit 31.8.2011**) V nalogi privzemite, da je $K < H$. *Nakupna opcija z vrzeljo* (*gap call*) z zapadlostjo T, izvršilno ceno K in *sprožilno ceno* (*trigger price*) H je finančni instrument, ki ob zapadlosti izplača/terja znesek $S_T - K$ pod pogojem, da je $S_T \geq H$, sicer pa ne izplača ničesar. Tu smo z S_t označili ceno osnovnega premoženja opcije v trenutku t.

   (a) Narišite graf odvisnosti izplačila nakupne opcije z vrzeljo ob zapadlosti od cene S_T.

   Prodajna opcija z vrzeljo (*gap put*) z zapadlostjo T, izvršilno ceno K in sprožilno ceno H je finančni instrument, ki ob zapadlosti izplača/terja znesek $K - S_T$ pod pogojem, da je cena S_T strogo manjša od H, sicer pa ne izplača ničesar.

   (b) Naj bo c_0^G premija nakupne opcije z vrzeljo, p_0^G pa premija prodajne opcije z vrzeljo v času 0. Dokažite, da na trgu brez arbitraže velja naslednja pariteta za opcije z vrzelmi
   $$p_0^G = c_0^G - S_0 + K \cdot D(0, T).$$

   Privzemite, da finančni trg lahko modeliramo z binomskim modelom.

   (c) Naj bo $S_0 = 50$, $u = 1.1$, $d = 0.95$, $R = 3\%$. Določite premijo nakupne opcije z vrzeljo z zapadlostjo 2, izvršilno ceno 50 in sprožilno ceno 55.

   (d) *Neodvisno od podatkov iz (c).* Izpeljite formulo za vrednotenje nakupne opcije z vrzeljo z zapadlostjo $T > 0$, izvršilno ceno K in sprožilno ceno H v binomskem modelu s parametri S_0, u, d in R. Privzemite, da je $S_0 d^T < K < H < S_0 u^T$.

2. (**Izpit 12.9.2011**) Cena delnice podjetja A danes znaša 80 EUR, podjetje pa v prihodnosti ne načrtuje izplačila dividend. Privzemite, da finančni trg lahko modeliramo z binomskim modelom s parametri $u = 1.05$, $d = 0.95$ in $R = 2\%$. Na delnico v trenutku 0 napišemo tri opcije, vse z zapadlostjo $T = 2$.

   (a) Prva opcija je evropska nakupna opcija z izvršilno ceno 82 EUR. V trenutku 0 določite njeno premijo v trenutku 1.

   Nasvet. Kako lahko v času 0 *predstavite premijo v trenutku* 1*?*

   (b) Druga opcija je evropska prodajna opcija z izvršilno ceno 82 EUR. V trenutku 0 določite njeno premijo v času 1.

   Tretja opcija je *opcija izbire* (*chooser option* ali *as you like it option*). To je izvedeni finančni instrument z izvršilno ceno K, ki lastniku v trenutku U (*decision date*), $0 < U < T$, da pravico izbirati med evropsko nakupno in evropsko prodajno opcijo, obe z zapadlostjo T in izvršilno ceno K. Kupec premijo plača v času 0, tip opcije določi v trenutku U, do izplačil pa je upravičen ob zapadlosti T.

   (c) Določite začetno premijo opcije izbire z izvršilno ceno 82, trenutkom izbire $U = 1$ in zapadlostjo $T = 2$.

   (d) Opišite investitorja, ki bi bil lahko zainteresiran za nakup opcije izbire?