

VREDNOTENJE EKSOTIČNIH OPCIJ

Privzemimo, da finančni trg lahko modeliramo z večobdobjnim binomskim modelom. Naj S_t označuje ceno delnice v trenutku t . Definirajmo slučajne spremenljivke

$$Z_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

za $t = 1, \dots, U$. Temeljna predpostavka¹ binomskega modela je neodvisnost porazdelitve spremenljivk Z_t od časa t ter od preostalih vrednosti $Z_{t'}$ za $t \neq t'$.

Slučajne spremenljivke Z_t so zato neodvisne in enako porazdeljene z verjetnostno funkcijo

$$Z_t \sim \begin{pmatrix} u & d \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Naj bo izplačilo finančnega instrumenta v času U slučajna spremenljivka X . Izplačila *enostavnih* (*plain-vanilla*) instrumentov so odvisna le od cene delnice S_U ob zapadlosti, izplačila *eksotičnih* (*exotic*) instrumentov pa so odvisna od celotne poti cene delnice S_0, S_1, \dots, S_U .

Z vpeljavo do tveganja nevtralne verjetnosti Q namesto naravne verjetnosti P lahko začetno ceno instrumenta izračunamo z diskontiranjem njegovega pričakovanega izplačila

$$c = \frac{E_Q(X_U)}{(1+R)^U}.$$

Pričakovano vrednost $E_Q(X_U)$ izračunamo z *analizo polnega binomskega drevesa*, lahko pa jo ocenimo z *Monte Carlo simulacijami*. Če simuliramo vrednosti x_1, \dots, x_N slučajne spremenljivke X (t.j. slučajno izberemo N vrednosti iz porazdelitve X), potem je

$$E_Q(X) \approx \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Opcije na ekstremni razkorak

Privzemimo, da ceno delnice modeliramo z binomskim modelom s parametri S_0, u, d, U in R . Določiti želimo premiji *nakupne* in *prodajne opcije na ekstremni razkorak* (*extreme spread call and put*) z zapadlostjo U in trenutkom delitve T .

Nakupni tip opcije ob zapadlosti U imetniku izplača pozitivni del razlike med najvišjo ceno delnice v obdobju $[T, U]$ in najvišjo ceno delnice v obdobju $[0, T]$, prodajni tip opcije pa pozitivni del razlike med najnižjo ceno delnice v obdobju $[T, U]$ in najnižjo ceno delnice v obdobju $[0, T]$.

Naloga 1

- (a) Naj bo $S_0 = 50, u = 1.05, d = 0.95, U = 5, R = 3\%$ in $T = 3$. Spodnje vrstice prikazujejo 5 možnih poti cene delnice. K vsaki poti pripišite, kolikšno izplačilo ob zapadlosti

¹Predpostavka je ključna pri vpeljavi binomskega modela kot diskretne aproksimacije zveznega Black-Scholesovega modela. Za vrednotenje v binomskem modelu je dovolj konstantnost parametrov u, d in R .

pripada imetniku opcije na ekstremni razkorak nakupnega (X) oziroma prodajnega (Y) tipa.

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Izplačilo X	Izplačilo Y
50.00	52.50	49.88	52.37	49.75	52.24		
50.00	52.50	55.12	57.88	60.78	63.81		
50.00	47.50	49.88	47.38	45.01	42.76		
50.00	47.50	45.12	47.38	49.75	52.24		
50.00	52.50	49.88	52.37	54.99	57.74		

- (b) Pripravite funkcijo `izplacilo(vrsta, T, type)`, ki določi izplačilo opcije ob zapadlosti, če vrsta (vektor) predstavlja zaporedne cene delnice. Vhodni podatek `type` ima lahko vrednosti "call" in "put".

Pozor: Funkcija mora delati pri poljubnih parametrih. Pred oddajo naloge jo testirajte na podatkih, ki so objavljeni v spletni učilnici.

Naloga 2

- (a) Pripravite funkcijo `binomski(S0, u, d, U, R, T, type)`, ki določi premijo opcije na ekstremni razkorak ustreznega tipa z analizo polnega binomskega drevesa. Uporabite funkcijo pri parametrih iz naloge (1a).

Pozor: Funkcija mora delati pri poljubnih parametrih.

- (b) Pripravite funkcijo `monte(S0, u, d, U, R, T, type, N)`, ki oceni premijo nakupne oziroma prodajne opcije na ekstremni razkorak z metodo Monte Carlo. Pri tem simulira N poti cene delnice. Funkcijo uporabite pri vrednostih parametrov $S_0 = 60$, $u = 1.05$, $d = 0.95$, $U = 15$, $R = 1\%$, $T = 8$, `type = "put"` ter $N_1 = 10$, $N_2 = 100$ in $N_3 = 1000$.

Pozor: Funkcija mora delati pri poljubnih parametrih. Pravilnost rezultatov boste lahko presodili v nalogi 3.

Naloga 3

- (a) Natančnost metode Monte Carlo določamo z večkratnim ocenjevanjem ob nespremenjenih pogojih. Nalogo (2b) ponovite $M = 100$ -krat. Pri vsakem N_i narišite histogram, ki prikazuje porazdelitev ocen premije (to je vzorčna porazdelitev ocen). Za boljšo primerjavo naj bo razpon na osi x v vseh histogramih enak.
- (b) Na vsakem histogramu z navpično premico prikažite povprečno oceno, izračunano iz M ponovitev. Primerjajte izračunano povprečje z vrednostjo dobljeno s funkcijo `binomski`. Z vodoravnima puščicama, položenima na abscisno os in izhodiščem v povprečni oceni, prikažite še standardni odklon vzorčne porazdelitve. To je *standardna napaka* ocene z metodo Monte Carlo.

Primer histogramov najdete v spletni učilnici. Zaradi slučajnosti so možna manjša odstopanja od vaših rešitev.