Mikroekonomija

Potrošnikov problem

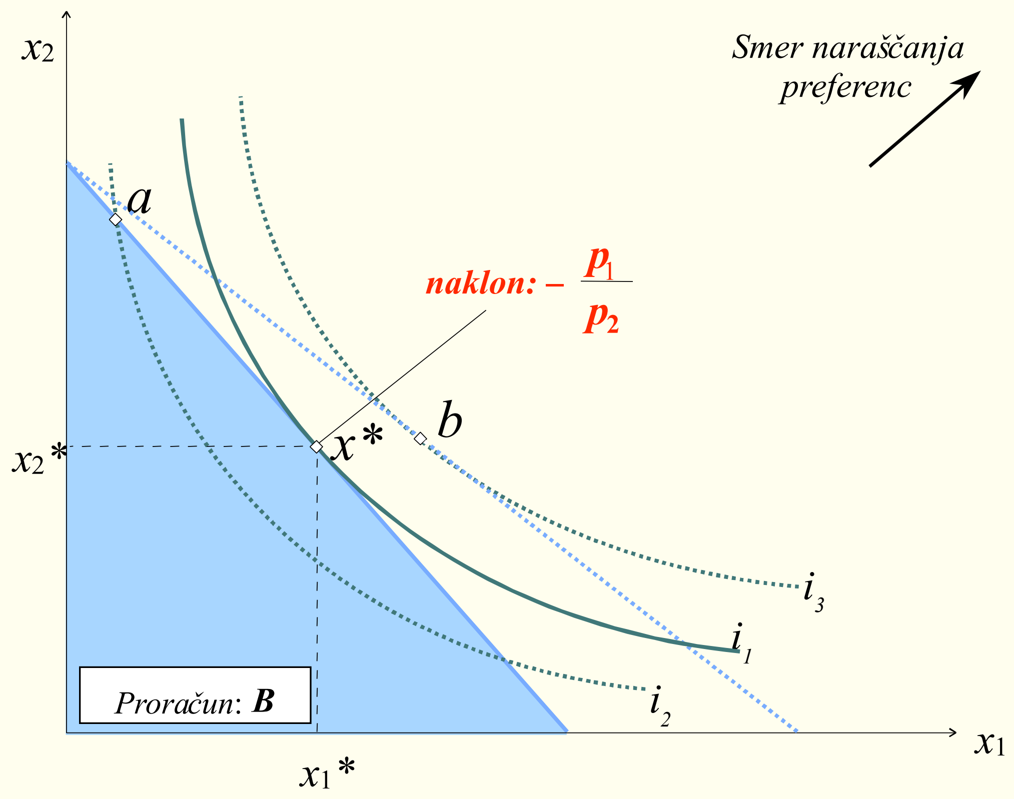
Aljoša Feldin

Ekonomska fakulteta Ljubljana

Potrošnikovo obnašanje

- Kako bi opisali svoje obnašanje v trgovini s hrano?
- Kaj so pomembne spremenljivke?
- Kako se odločamo?

Potrošnikova izbira in povpraševanje
Preference in izbire



Zaželene lastnosti osnovnega standardnega modela preferenc

- Iz podane šibke preferenčne relacije izpeljati striktne preference in indiferenčno relacijo.
- Napovedi osnovnega modela preferenc naj bi bile čim bliže izbiram potrošnika.
- Možnost numerične predstavitve preferenc (zaradi analitične priročnosti) s funkcijo koristnosti. Izbire bomo tako lahko primerjali s številkami.
- Čim manj potrebnih predpostavk, ki zagotavljajo delovanje naše teorije ob kar najmanj omejitvah.

Temelji teorije

- Množica izbir,
- Množica možnosti,
- Preferenčna relacija,
- Vedenjska predpostavka.

Množica izbir

Definicija:

Množica *X* predstavlja množico možnih izbir, ki jih ima potrošnik na voljo.

Lastnosti:

- $\emptyset \neq X \subseteq \Re^n_+$,
- *X* je zaprta in konveksna in vsebuje izbiro **0.**

Primer:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \ldots \text{ kilogramov kruha} \\ \ldots \text{ litrov mleka} \\ \ldots \\ \ldots \text{ parov rokavic} \end{matrix} \quad , x \in X$$

- Množica možnosti, $B \subseteq X$, predstavlja vse alternative, ki so potrošniku v njegovih okoliščinah dosegljive.
- Preferenčna relacija opisuje potrošnikov okus glede na različne izbire, ki so mu na voljo.
- Vedenjska predpostavka zaključi ali zapre model. Pove nam, kaj žene potrošnika pri njegovih izbirah. V splošnem predpostavljamo, da potrošnik išče dosegljivo izbiro, ki mu bo najljubša glede na njegov okus.

Preferenčna relacija

- Z aksiomi formaliziramo dejstvo, da potrošniki LAHKO izbirajo in da morajo biti izbire konsistentne.
- $\succeq$ je binarna relacija definirana na *X*.
- $x^1 \succeq x^2$; preberemo:" x^1 je vsaj tako dober kot x^2 ".
- A1: Popolnost. $\forall x^1 \neq x^2$ iz *X* velja ali $x^1 \succeq x^2$ ali $x^2 \succeq x^1$.
- A2: Refleksivnost. $\forall x \in X, \quad x \succeq x$.
- A3: Tranzitivnost. Za katerekoli tri x^1, x^2, x^3 iz *X* velja, da če $x^1 \succeq x^2$ in $x^2 \succeq x^3$ potem $x^1 \succeq x^3$.

Preferenčna relacija

- A3 zahteva konsistentnost potrošnikovih preferenc, vsi skupaj pa definirajo osnovno RACIONALNOST potrošnika.
- Potrošnik je sposoben RANGIRATI vse izbire v *X* od najboljše do najslabše.
- Definicija:

  Binarna relacija $\succeq$ na množici izbir *X*, ki zadošča A1-A3 je preferenčna relacija.

Preferenčna relacija

- Definicija:
  Binarna relacija $\succ$ na X je definirana kot:
  $x^1 \succ x^2$ če in samo če $x^1 \succeq x^2$ in $x^2 \not\succeq x^1$.

  $\succ$ predstavlja striktne preference in beremo:
  x^1 je boljši od x^2.

- Definicija:
  Binarna relacija $\sim$ na X je definirana kot:
  $x^1 \sim x^2$ če in samo če $x^1 \succeq x^2$ in $x^2 \succeq x^1$.

  $\sim$ predstavlja indiferenčno relacijo in beremo:
  x^1 je enakovreden x^2.

Preferenčna relacija

Definicija:

Naj bo x^0 točka v X. Glede na vsako tako točko lahko definiramo naslednje podmnožice X :

1. $\precsim\left(x^0\right) \equiv \left\{x \mid x \in X, x^0 \succsim x\right\}$ je množica nič boljših od x^0.

2. $\succsim\left(x^0\right) \equiv \left\{x \mid x \in X, x^0 \precsim x\right\}$ je množica vsaj tako dobrih kot x^0.

Preferenčna relacija

3. $\prec\left(x^{0}\right) \equiv \left\{x \mid x \in X, x^{0} \succ x\right\}$ je množica slabših od x^0.

4. $\succ\left(x^{0}\right) \equiv \left\{x \mid x \in X, x^{0} \prec x\right\}$ je množica boljših od x^0.

5. $\sim\left(x^{0}\right) \equiv \left\{x \mid x \in X, x^{0} \sim x\right\}$ je množica enakovrednih x^0.

- Kaj nam A1-A3 povejo o izgledu $\sim\left(x^{0}\right)$?

Preferenčna relacija

Predpostavimo: $X = \Re_+^n$.

- A4: Zveznost. Za vsak $x \in X$ sta množici "vsaj tako dobrih" in "nič boljših" od *x* zaprti. Iz tega sledi, da je množica "enakovrednih" *x* (indiferenčna krivulja) zaprta (neprekinjena).

Kaj to pomeni?

Preferenčna relacija

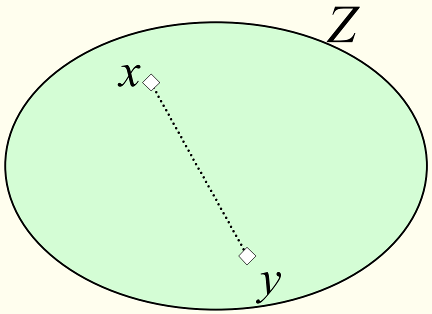
A5: Striktna monotonost preferenc. Za vsak par $x^0, x^1 \in \Re^n_+$ velja, če $x^0 \geq x^1$, potem $x^0 \succsim x^1$ in če $x^0 \neq x^1$, potem $x^0 \succ x^1$.

Kaj še manjka?

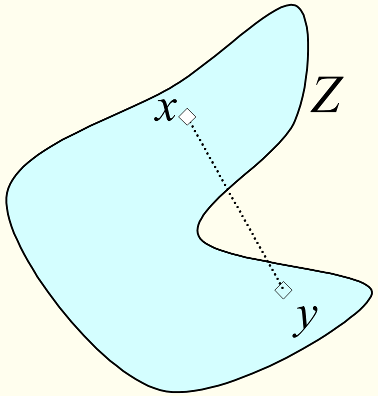
Preferenčna relacija

Definicija:

Množica $Z \subseteq R^K$ je konveksna, če $t\,x + (1-t)y \in Z$ $\forall\ x,y \in Z, \forall t \in [0,1]$.



konveksno



nekonveksno

Preferenčna relacija

A6′: Konveksnost. Če $x^0 \succsim x^1$, potem $tx^0 + (1-t)x^1 \succsim x^1, \forall t \in [0,1]$.

A6: Striktna konveksnost. Če $x^1 \neq x^0$ in $x^0 \succsim x^1$, potem $tx^0 + (1-t)x^1 \succ x^1, \forall t \in (0,1)$.

Uravnoteženost okusov in padajoča mejna stopnja nadomestljivosti.

Kaj sedaj vemo o izgledu $\sim(x^0)$?

Proračunska omejitev

- Potrošnik ima na voljo fiksen znesek denarja, dohodek $y > 0$.
- Cene dobrin, ki so mu na voljo, so striktno pozitivne: $p=(p_1, p_2, \ldots, p_n) >> 0$.
- Potrošnik na te cene nima vpliva, ni nobenih količinskih popustov. Torej: cene so linearne.
- Za nakup svežnja dobrin $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ potroši:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p \cdot x$$

- Potrošnikov proračun je torej definiran kot:

$$B = \left\{ x \mid x \in \Re_{+}^{n}, p \cdot x \leq y \right\}$$

Potrošnikov problem

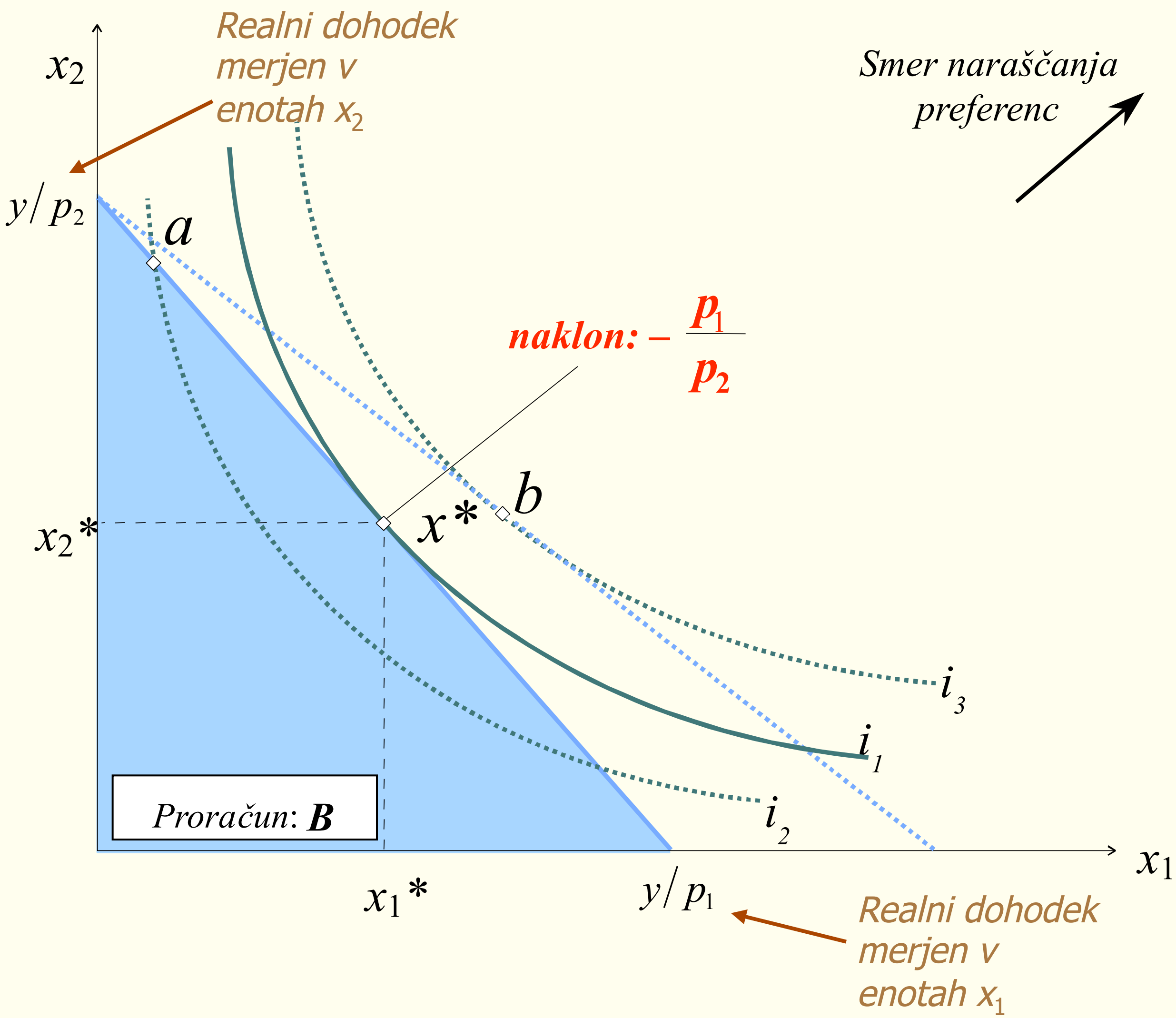
Opisali smo množico izbir potrošnika, *X*, njegove preference, $\succsim$, v množici *X pa* mu je zaradi njegovih okoliščin dejansko dosegljiva le podmnožica izbir *B*. Predpostavimo, da išče izbiro, ki je najboljša glede na njegov okus in mu je dosegljiva.

Prvič lahko formuliramo potrošnikov problem (CP):

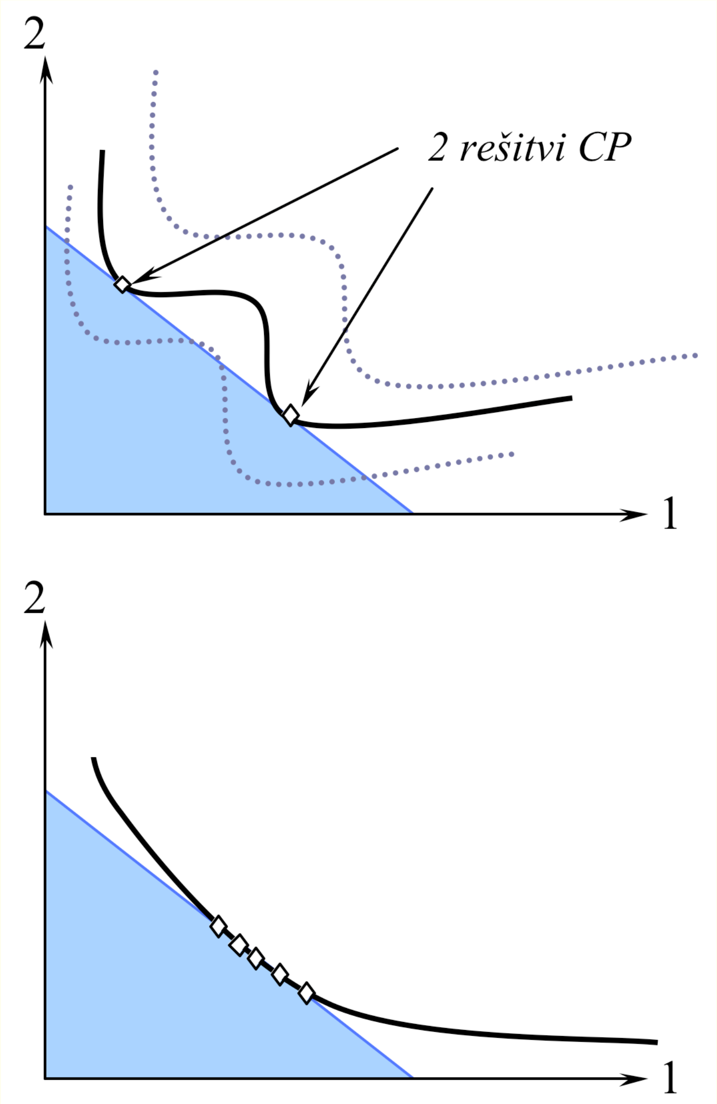
Potrošnik išče $x^* \in B \subseteq X$, tak da

$$x^* \succsim x \quad \forall x \in B.$$

Potrošnikov problem



Vloga konveksnosti v potrošnikovem problemu



Razkrite preference

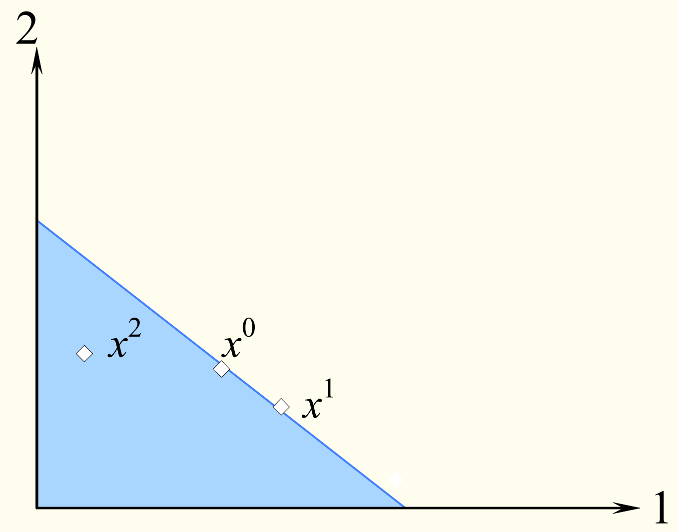
- Ali se nam zdi koncept preferenc smiseln v praksi? Opazljiv?
- Ali so izbire, ki jih opazimo, skladne z modelom potrošnika z lokalno nezasičenimi preferencami, ki rešuje CP?
- Definicija:

  Če je x^1 izbran pri (p^1, y^1), x^2 izbran pri (p^2, y^2),..., in x^n izbran pri (p^n, y^n), potem govorimo o končni množici podatkov o povpraševanju.

Razkrite preference

- Predpostavimo končno množico podatkov o povpraševanju.

  Če je x^0 izbran pri (p^0, y^0) in $p^0 \cdot x^1 \leq y^0 \Rightarrow x^0 \succeq x^1$.
- Če so potrošnikove preference lokalno nezasičene $\Rightarrow$ $x^0 \succ x^2$.



Splošni aksiom razkritih preferenc (SARP)

- Definicija:
  Vzemimo neko končno množico podatkov o povpraševanju. Podatki ***razkrijejo***, da je x^j vsaj tako dober kot x^i ($x^j \succeq x^i$), če $p^j \cdot x^i \leq y^j$.
  Podatki ***razkrijejo***, da je x^j boljši kot x^i ($x^j \succ x^i$), če $p^j \cdot x^i < y^j$.
  Podatki zadovoljujejo SARP, če za preference, ki jih podatki razkrijejo, ne moremo najti cikla $x^{n_1} \succeq x^{n_2} \succeq \cdots \succeq x^{n_1}$ (kjer je eden ali več $\succeq$ kar $\succ$).
- Izrek:
  Končna množica podatkov o povpraševanju zadovoljuje SARP, če in samo če so podatki skladni z maksimizacijo lokalno nezasičenih preferenc.

Splošni aksiom razkritih preferenc (SARP)

Primer 1:

		Svežnji		
		a	*b*	*c*
		(10,10,10)	(9,25,7.5)	(15,5,9)
Cene	(10,10,10)	300	415	290
	(10,1,2)	130	130	173
	(1,1,10)	120	109	110

$\Rightarrow$ $a \succ c$ pri (p=(10,10,10), y=300)

$b \succeq a$ pri (p=(10,1,2), y =130)

$c \succ b$ pri (p=(1,1,10), y =110)

$\Rightarrow$ $a \succ c \succ b \succeq a$

Podatki niso skladni s potrošnikovim obnašanjem izhajajočim iz modela maksimiranja preferenc.

Funkcija koristnosti

- Za reševanje CP bi radi uporabili diferencialno analizo.
- Uporabiti moramo vse informacije vgrajene v preference.

- Definicija:

  Realna funkcija $u : \Re^n_+ \to \Re$ je <u>funkcija koristnosti</u>, ki <u>predstavlja</u> preferenčno relacijo $\succeq$, če za vsak par $x^0, x^1 \in \Re^n_+$ velja $u\left(x^0\right) \geq u\left(x^1\right) \quad \Leftrightarrow \quad x^0 \succeq x^1$.

Obstoj funkcije koristnosti

- Katerim lastnostim morajo zadoščati preference, da jih lahko predstavimo s funkcijo koristnosti?

- Izrek:

  Naj binarna relacija $\succeq$ zadošča aksiomom A1-A5. Potem obstaja zvezna realna funkcija $u : \Re_+^n \to \Re$, ki predstavlja preference $\succeq$.

Funkcija koristnosti

- Izrek nam omogoča delo z enostavnimi numeričnimi podatki namesto z relacijami na množicah.

- POZOR: Vsaka pozitivna monotona transformacija na $u(\cdot)$ nam da novo funkcijo, ki ravno tako predstavlja iste preference. ($v(x)=\ln(x+2)+7$)

- Funkcija koristnosti je ordinalna (samo vrstni red ima smisel) in ne kardinalna (kjer ima tudi razlika med posameznimi vrednostmi smisel)
- Primer: Leksikografske preference

  Preference so definirane na $X=[0,1]\times[0,1]$, kot

  $(x_1,x_2)\succ(y_1,y_2)$ če $(x_1>y_1) \vee (x_1=y_1,\ x_2>y_2)$, in ne dopuščajo numerične reprezentacije. Zakaj?

Lastnosti funkcije koristnosti

- Definicija

  $u: X \rightarrow R$ je <u>strogo naraščajoča</u>, če $u(x) > u(y)$ $\forall$ x, y, kjer $x \geq y$ in $x \neq y$.

- Izrek:

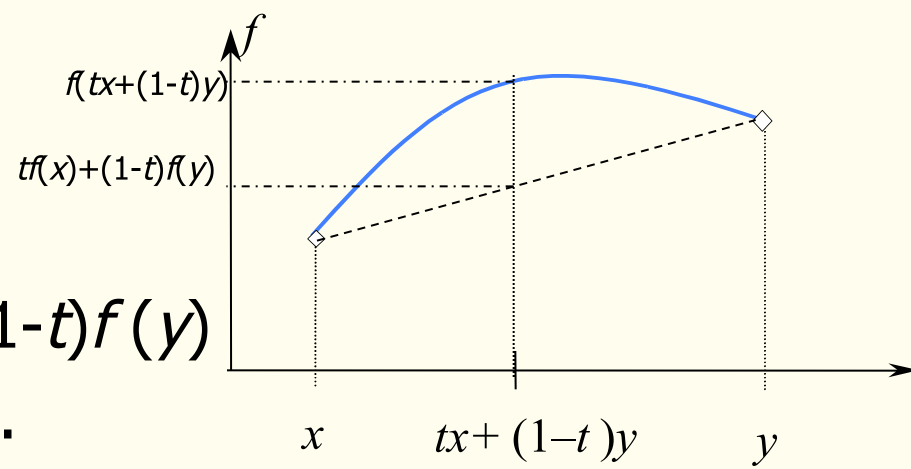
Naj $u(\cdot)$ predstavlja $\succeq$; $\succeq$ strogo monotone $\Leftrightarrow$ $u(\cdot)$ strogo naraščajoča.

- Definicija

f je <u>strogo konkavna</u>,

če $f(tx+(1-t)y) > tf(x)+(1-t)f(y)$

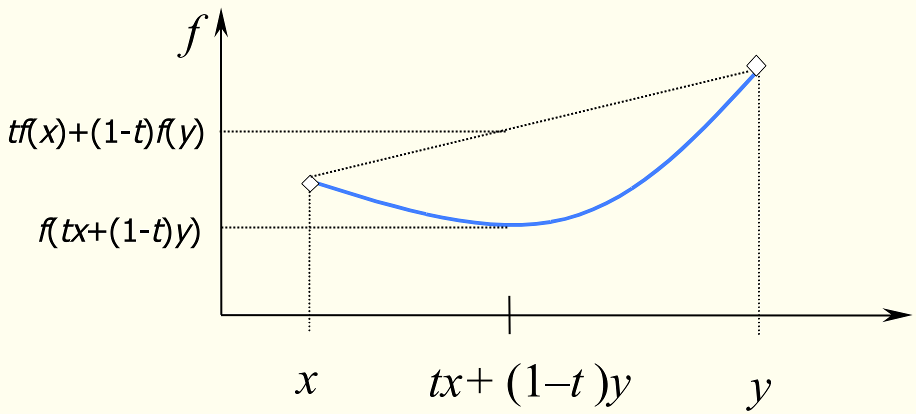
$\forall$ $x,y \in X$: $x \neq y$, $\forall t \in (0,1)$.



Lastnosti funkcije koristnosti

- Definicija

f je <u>strogo konveksna</u>, če $f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y)$ $\forall\ x,y \in X$: $x \neq y$, $\forall t \in (0,1)$.



- Definicija

f je <u>strogo kvazi-konkavna</u>, če $f(tx+(1-t)y) > f(y)$ $\forall\ x,y \in X$: $f(x) \geq f(y)$, $x \neq y$, $\forall t \in (0,1)$.

Lastnosti funkcije koristnosti

- Izrek:

(a) Naj bodo preference $\succeq$ predstavljene z $u(\cdot)$.

  - u konkavna $\Rightarrow$ $\succeq$ konveksne.
  - u strogo konkavna $\Rightarrow$ $\succeq$ strogo konveksne.

(b) Naj bo $u(\cdot)$ numerična reprezentacija preferenc .

  - $\succeq$ strogo konveksne $\Leftrightarrow$ u strogo kvazi-konkavna

Princip padajoče mejne nadomestljivosti

Privzemimo odvedljivost funkcije $u(\cdot)$.

V $\Re^2$ je krivulja, ki predstavlja indiferenčno krivuljo $x_2=f(x_1)$. Definirana je z $u(x_1, x_2)=u(x_1, f(x_1))=$const.

- Mejna stopnja nadomestljivosti dobrine x_2 za dobrino x_1 je definirana z naklonom indiferenčne krivulje:

  $MRS_{21}(x) = -f'(x_1)$. Zakaj – ?

- Poiščimo popolni diferencial indiferenčne krivulje:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \cdot f'(x_1) = 0$$

Princip padajoče mejne nadomestljivosti

$$\Rightarrow \quad MRS_{21}(x) = \frac{\partial u(x)/\partial x_1}{\partial u(x)/\partial x_2} = \frac{MU_1(x)}{MU_2(x)}$$

Mejna koristnost dobrine x_1 je prirastek v koristnosti, ki ga potrošniku prinese potrošnja dodatne enote x_1.

$$MU_1 = \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}$$

V splošnem: $MRS_{ij}(x) = \frac{\partial u(x)/\partial x_j}{\partial u(x)/\partial x_i} = \frac{MU_j(x)}{MU_i(x)}$

Ker so preference konveksne:

$$\frac{dMRS_{21}(x)}{dx_1} = -f''(x_1) < 0$$

Padajoča mejna stopnja nadomestljivosti.

Potrošnikov problem še enkrat

- Prepišimo potrošnikov problem v problem maksimizacije koristnosti (PMK):

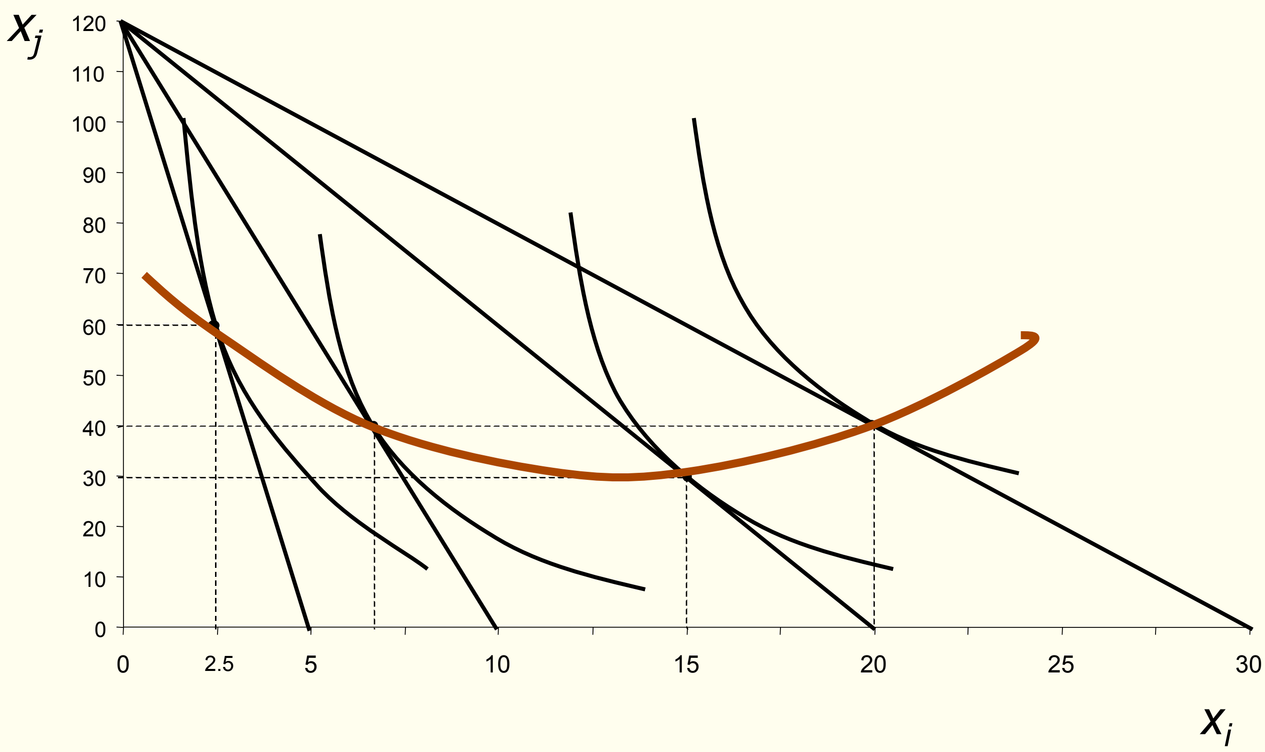
$$\max_{x \in \Re^n_+} u(x) \text{ tako, da } p \cdot x \leq y \,.$$

- Ali je PMK dobro definiran, ali ima rešitev?
  - *u* (·) je realna in zvezna.
  - *B* ni prazna, je zaprta in omejena, torej kompaktna.
  - Obstaja ***Weierstrassov*** izrek, ki ob takih pogojih zagotavlja rešitev PMK.
- Ker je *B* konveksna množica tako kot tudi preference, je maksimand, *x**, enoličen.
- Ker so preference strogo monotone bo maksimand ležal na robu *B*.

- Rešitev x^* je odvisna od parametrov PMK, od cen p in dohodka y. Ker je rešitev enolična lahko nanjo gledamo kot na funkcijo $x^* = x(p, y)$.

- $x(p, y)$ je Marshallova funkcija povpraševanja.

- Ko so y in vse cene razen p_i konstantne, x_i pokaže klasično povpraševanje potrošnika po dobrini i ob spreminjanju cene p_i.



x_j
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
2.5
5
10
15
20
25
30
x_i