Mikroekonomija

Potrošnikov problem
Nadaljevanje

Aljoša Feldin
Ekonomska fakulteta Ljubljana

Optimizacija brez omejitev

- Recimo, da moramo maksimirati funkcijo $f(x)$ brez omejitev. Ekstrem najdemo tako, da poiščemo, kje imajo parcialni odvodi $f(\cdot)$ ničlo. To je t.i. pogoj prvega reda (FOC) in je potrebni pogoj za maksimum funkcije. Zakaj?
- Na ta način dobimo kandidate za lokalne ekstremne točke funkcije, ki pa niso nujno tudi maksimumi. Lokalni maksimum smo našli, če je v tej točki Hessova matrika drugih odvodov funkcije $f(\cdot)$ negativno semi-definitna. Ta pogoj imenujemo pogoj drugega reda (SOC) in je zadostni pogoj za lokalni maksimum.

Optimizacija brez omejitev

- Tudi, če smo našli lokalni maksimum, ta še ni nujno globalni. Ta je zagotovljen, če je funkcija $f(\cdot)$ konkavna. Zakaj?
- Torej, če je $f(\cdot)$ konkavna, je vsaka rešitev $f'(x^*)=0$ (FOC) avtomatično lokalni in hkrati globalni maksimum.
- Sledi: če je $f(\cdot)$ konkavna, je zadovoljitev FOC potrebni in zadostni pogoj za globalni maksimum.

Recept za optimizacijo z omejitvami – vezani ekstrem

Iščemo rešitev problema

$$\max f(x) \quad \text{t.d.} \quad g_i(x) \leq c_i \text{, za } i=1,\ldots,k$$

za funkcije f, g_1, g_2, . . . , g_k na domeni R^n za neko celo število n in konstante c_1, c_2, . . . , c_k.

Problem rešimo z uporabo ***Kuhn-Tuckerjevih*** pogojev.

Korak 1:
Napišimo Lagrangeovo funkcijo (Lagrangeian).

- Vsaki od k vezi pripada en *multiplikator*. Za vez $g_i(x) \le c_i$ naj bo ta označen z λ_i. Vez prepišemo kot:

$$G_i(x) = c_i - g_i(x) \ge 0.$$

- Lagrangeian je potem: $L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i G_i(x)$

- kjer je λ vektor $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$. Imamo torej funkcijo $n + k$ spremenljivk, n komponent x in k komponent λ.

Korak 2.
Napišimo pogoje prvega reda za x.

- Pogoji prvega reda za x_j ($j = 1,\dots,n$) so $\partial L / \partial x_j = 0$ ali:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial x_j} = 0$$

Korak 3.
Napišimo k vezi - omejitev.

- Omejitev *i* je: $G_i(x) \geq 0$.

Korak 4.
Omejitev za multiplikatorje.

- Manj pomembno. Da popolnoma zadostimo receptu. Multiplikatorji morajo biti ne-negativni: $\lambda_i \geq 0$.

Korak 5.

Napišimo pogoje "komplementarne ohlapnosti".

- Teh je *k;* eden za vsako vez. Pogoj *i* se glasi:

$$\lambda_i \cdot G_i(x)=0.$$

- Kaj pravijo ti pogoji? Kakšna je povezava z optimizacijo brez omejitev?

Korak 6.

Uporabimo vse naštete sestavine.

- Poiščimo x in λ, ki rešijo vse naštete enačbe – pogoje. Rešitve, ki jih tako najdemo, so hkrati rešitve našega problema maksimizacije z omejitvami.

Kako deluje recept v drugačnih okoliščinah?

- Če želimo minimizirati $f(x)$, je to tako kot maksimizirati $-f(x)$.

- Če je omejitev oblike $g_i(x) \geq c_i$, jo prepišemo kot

  $$G_i(x) = g_i(x) - c_i \geq 0.$$

- Če moramo zadovoljiti vez z enakostjo $g_i(x) = c_i$, jo napišemo z dvema omejitvama $g_i(x) \leq c_i$ in $g_i(x) \geq c_i$ ter tako dobimo dva multiplikatorja za dve vezi.

Primer uporabe Kuhn-Tuckerjevih pogojev

Potrošnik uporablja dve dobrini, žitarice in sladice. Če je w količina žitaric in c količina sladic, je njegova funkcija koristnosti podana z

$$u(w,c) = 3\ln(w) + 2\ln(c+2).$$

Potrošnik želi maksimirati koristnost potrošnje glede na štiri vezi. Količini zaužitih žitaric in sladic morata biti ne-negativni. Na voljo ima 10 €, cena vsake od dobrin pa je 1 €. Enota žitaric vsebuje 150 cal, enota sladic pa 200 cal, potrošnik pa ne sme pojesti več kot 1550 cal.

Analitično to pomeni da išče *w* in *c*, ki rešita naslednji problem:

$$\max \{3 \ln(w) + 2 \ln(2+c)\},$$

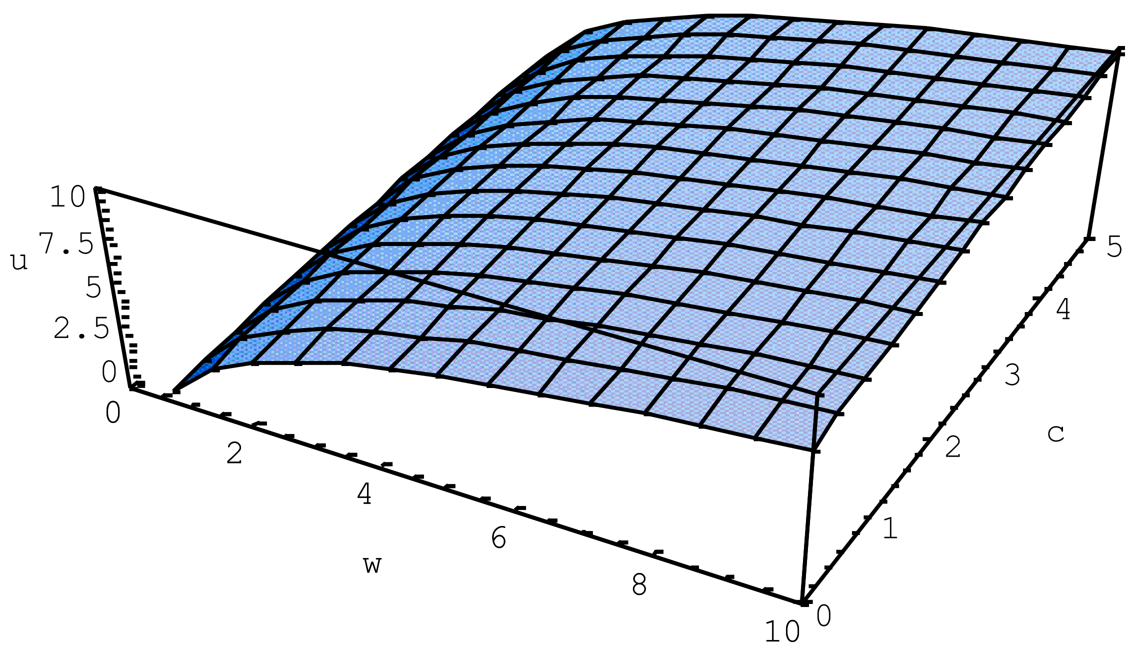
tako da

(C1) $c \geq 0$,

(C2) $w \geq 0$,

(C3) $w + c \leq 10$,

(C4) $150w + 200c \leq 1550$.



Rešimo CP za odvedljivo funkcijo koristnosti *u*.

- Lagrangian:

$$L(x,\lambda,\mu)=u(x)+\lambda\cdot\left(y-\sum_{j=1}^{n}p_jx_j\right)+\sum_{j=1}^{n}\mu_jx_j$$

- Pogoji prvega reda:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\lambda p_j-\mu_j \quad \text{za } j=1,\ldots,n$$

$$\lambda\geq 0,\ \mu_j\geq 0,\ p\cdot x\leq y,\ x\geq 0$$

- Pogoji komplementarne ohlapnosti:

$$\lambda(y-p\cdot x)=0 \quad \text{in} \quad \mu_jx_j=0 \quad \text{za } j=1,\ldots,n$$

- Multiplikatorje μ_j lahko izločimo:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \leq \lambda p_j$$ z enakostjo, če $x_j > 0$

- Če $\lambda > 0$ in sta dobrini *i* in *j* zaužiti v pozitivni količini

$$\longrightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_j} = p_i / p_j \qquad \longleftarrow$$

- Rešitev PMK označimo z $x = x(p,y)$ in jo imenujemo *Marshallovo povpraševanje*.
- Torej, razmerje mejnih koristnosti dveh dobrin je v ravnovesju enako razmerju njunih cen.
- Interpretacija?
- Vemo tudi, da je razmerje mejnih koristnosti kar enako mejni stopnji nadomestljivosti dobrine *j* za dobrino *i*.

Posredna funkcija koristnosti

- Definicija

v imenujemo posredna funkcija koristnosti, če je definirana kot: $v(p,y)$ ... "Vrednost problema (PMK)", ali $v(p,y) = \max u(x)$ t.d. $p \cdot x \leq y$, $x \geq 0$.

- Če so preference strogo konveksne in je tako funkcija $u(\cdot)$ strogo kvazi-konkavna, potem je rešitev problema PMK samo ena, $x(p,y)$, in lahko napišemo:

$$v(p,y) = u(x(p,y)).$$

- Definicija:

Če $f(t \cdot x) = t^k \cdot f(x)$, $\forall k > 0$, potem je $f(x)$ homogena stopnje k v x.

Posredna funkcija koristnosti

- Izrek:

Če je *u* zvezna predstavitev lokalno nezasičenih preferenc, za funkcijo posredne koristnosti *v* velja, da je:

1. Zvezna v *p* in *y* (za $p > 0$ in $y \geq 0$),
2. Homogena stopnje 0 v *p* in *y*,
3. Padajoča v *p* in strogo naraščajoča v *y*,
4. kvazi-konveksna v (*p*,*y*).
5. *Royeva* identiteta; Naj bo $\partial v(p^0, y^0) / \partial y \neq 0$

   Če je $v(p,y)$ odvedljiva v (p^0, y^0) in, potem:

$$x_i\left(p^0, y^0\right) = -\frac{\partial v}{\partial p_i} \bigg/ \frac{\partial v}{\partial y}$$

Intuicija za Royevo identiteto

- Pokažimo, da je: $\frac{\partial v}{\partial y} = \lambda$ (iz PMK).
- Spomnimo se pogoja prvega reda (PMK): $\frac{1}{p_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda$
- Royeva identiteta:

$$x_i(p,y)\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial p_i} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\partial v}{\partial p_i} = \lambda x_i = \frac{x_i}{p_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Interpretacija:

Recimo da p_i pade za 1 EUR. Koliko dodatne koristnosti lahko pridobimo? Potrošnik z dohodkom *y* ima sedaj x_i dodatnih EUR, ker je dobrina *i* cenejša.

$\rightarrow$ lahko potroši "dodatni dohodek" za nakupe *i*

$\rightarrow$ lahko kupi x_i/p_i krat več dobrine *i*

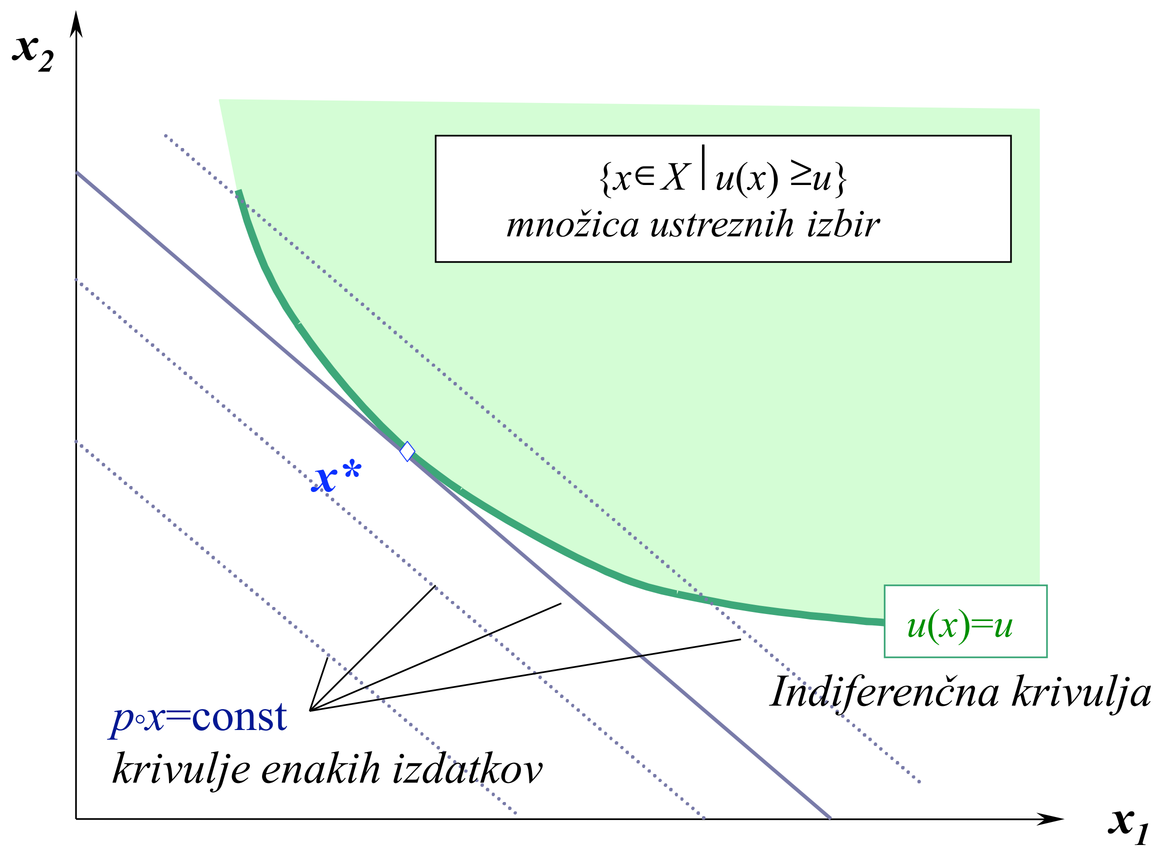
$\rightarrow$ poviša koristnost za $(x_i/p_i)(\partial u/\partial x_i)$

To opisuje naiven odgovor na padec cene dobrine *i* ; potrošnik bo najbrž opravil tudi nekaj substitucije. Vendar, RI pravi, da ta substitucija nima efekta prvega reda na potrošnikovo koristnost.

Dvojnost potrošnikovega problema in izdatkovna funkcija

- Imejmo: funkcijo koristnosti $u(\cdot)$, cene p, in $u \in R$.

Problem minimizacije izdatkov, PMI, (dualni potrošnikov problem): $\min p \cdot x$ t.d. $u(x) \geq u$, $x \geq 0$



Izdatkovna funkcija

- Definicija:

e je izdatkovna funkcija, če je definirana kot:

$$e(p,u) = \min p \cdot x \ \text{ t.d. } u(x) \geq u,\ x \geq 0.$$

Rešitev PMI označimo z $h = h(p,u)$ in jo imenujemo *Hicksovo povpraševanje*.

Izdatkovna funkcija

- Izrek:

Imejmo: $p \geq 0$, $\exists\ x \geq 0$: $u = u(x)$, $u \geq u(0)$, u je zvezna. Potem:

1. PMI ima rešitev za (p,u). Če x reši PMI za (p,u), potem $u(x)=u$. Če u predstavlja strogo konveksne preference, potem ima PMI enolično rešitev za vsak par (p,u). Če x reši PMI za (p,u), potem x reši tudi PMP za $(t{\cdot}p,u)$ in $t > 0$.
2. Izdatkovna funkcija $e(p,u)$ je homogena stopnje ena v p.
3. Izdatkovna funkcija $e(p,u)$ je naraščajoča v p in strogo naraščajoča v u, in
4. Izdatkovna funkcija $e(p,u)$ je konkavna v p.

INTUICIJA?

Hicksovo povpraševanje in izdatkovna funkcija

- Izrek:

Hicksovo povpraševanje in izdatkovna funkcija sta povezana s Shephardovo lemo:

$$h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$$

Homogenost Marshallovega povpraševanja

- Izrek:

Pri naših predpostavkah je potrošnikovo povpraševanje $x_i(p,y)$, $i=1,\ldots,n$, homogeno stopnje nič v cenah in dohodku in izčrpa ves potrošnikov dohodek,

$$p \cdot x(p,y) = y.$$

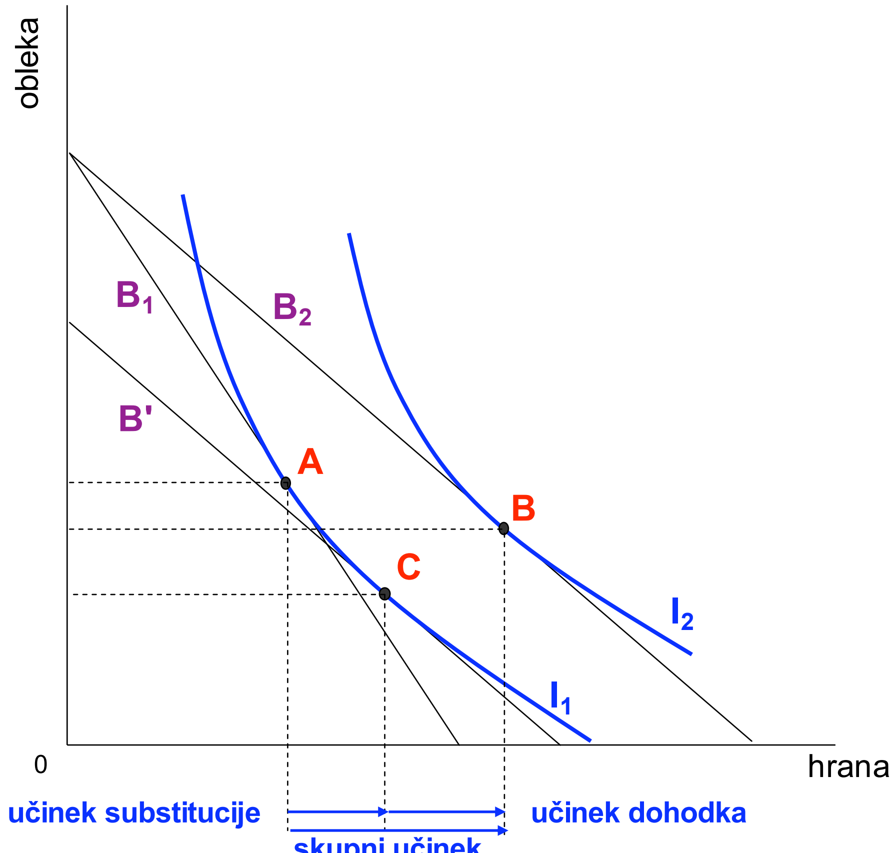
Torej: $x(p,y)=x(tp,ty)$. Naj bo $t=1/p_n$.

$\Longrightarrow$ $x(p,y) = x(p_1/p_n,\ p_2/p_n,\ \ldots,\ 1,\ y/p_n)$.

Kaj to pomeni?

Dohodkovni in substitucijski učinek

- Kako se spreminja povpraševanje, ko se spreminjajo cene dobrin?
- Pričakujemo dva učinka: substitucijskega in dohodkovnega. Uporabimo Hicksovo dekompozicijo celotnega učinka.



Slutskyeva enačba

Izrek:

Pri cenah p in dohodku y je zveza med Marshallovim in Hicksovim povpraševanjem dana z Slutskyevo enačbo:

$$\frac{\partial x_j(p,y)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(p,v(p,y))}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j(p,y)}{\partial y} x_i(p,e(p,u))$$

Dokaz:

Odvajajmo $x_j(p,e(p,u)) \equiv h_j(p,u)$ po p_i: $\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i} + \dfrac{\partial x_j}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial e}{\partial p_i} = \dfrac{\partial h_j}{\partial p_i}$

$\partial e / \partial p_i = h_i(p,u) = x_i(p,e(p,u))$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j}{\partial y} \cdot x_i\big(p,e(p,u)\big) = \frac{\partial h_j}{\partial p_i}$$

Kaj pravi ta izrek?

Odvedljive konkavne funkcije

- Imejmo konkavno dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo ene spremenljivke $f: R \rightarrow R$;

  $\Rightarrow$Prvi odvod je padajoč.

  $\Rightarrow$Drugi odvod je ne-pozitiven.

- Imejmo konkavno dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo več ene spremenljivk $f: R^K \rightarrow R$;

  $\Rightarrow$ za $z \in R^K$ je Hessova matrika drugih odvodov, H(z), simetrična KxK matrika in vsebuje mešane parcialne odvode f v točki z.

$$H(z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_{K-1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_K} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_{K-1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_{K-1} \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_{K-1} \partial z_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_{K-1} \partial z_{K-1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_{K-1} \partial z_K} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_K \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_K \partial z_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_{K-1} \partial z_K} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_K \partial z_K} \end{pmatrix}$$

Definicija:

KxK-matrika je <u>negativno semi-definitna</u>, če $\xi H \xi^T \leq 0$, $\forall \xi \in R^K$.

Opomba: Če je H negativno semi-definitna KxK matrika $\Rightarrow H_{ii} \leq 0$ za $i=1,\ldots,K$.

Dvakrat zvezno odvedljiva funkcija K spremenljivk $f: R^K \rightarrow R$ je konkavna $\Leftrightarrow$ njena Hessova matrika v vsaki točki definicijskega območja f je negativno semi-definitna.

Glavni rezultat

Izrek:

Če je $x(p,y)$ Marshallovo povpraševanje $\Rightarrow$ nxn matrika z ij-tim elementom (Slutskeyeva matrika)

$$s_{ij}(p,y) = \frac{\partial x_i(p,y)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,y)}{\partial y} \cdot x_j(p,y)$$

je simetrična in negativno semi-definitna. Ta matrika vsebuje vse substitucijske člene.

Zakaj?

Zaradi Slutskyeve enačbe je navedeni člen enak $\partial h_i(p,u)/\partial p_j$ v točki $(p,u\,(x(p,y)))$. To je enako $\partial^2 e/(\partial p_i \partial p_j)$. Torej je matrika subst.členov kar Hessova matrika izdatkovne funkcije, ta pa je konkavna v cenah p.

$\Rightarrow$ Matrika substitucijskih členov je simetrična in negativno semi-definitna.

$\Rightarrow$ Diagonalni členi so negativni ALI substitucijski učinek lastne cene na povpraševanje je vedno negativen

Kratek korak vstran – elastičnost povpraševanja

- Definicija:

Elastičnost povpraševanja po dobrini *i* glede na spremembo v spremenljivki *q* je relativna sprememba tega povpraševanja z relativno spremembo v spremenljivki *q*.

$$E_{ip_i} = \frac{\Delta x_i / x_i}{\Delta p_i / p_i} = \frac{\Delta x_i}{\Delta p_i} \frac{p_i}{x_i} \cdots \longrightarrow \cdots \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{x_i}$$

Lastna cenovna elastičnost

$$E_{ip_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}$$ Križna cenovna elastičnost

$$E_{iy} = \frac{\partial x_i}{\partial y} \cdot \frac{y}{x_i}$$ Dohodkovna elastičnost

Zakaj je vse to pomembno?

i normalna dobrina $\frac{\partial x_i(p,y)}{\partial y} > 0$

i inferiorna dobrina $\frac{\partial x_i(p,y)}{\partial y} < 0$

i nujna dobrina $0 \leq \frac{\partial x_i(p,y)}{\partial y} < \frac{x_i}{y}$, $0 \leq E_{iy} < 1$

i luksuzna dobrina $\frac{x_i}{y} \leq \frac{\partial x_i(p,y)}{\partial y}$, $1 < E_{iy}$

i Giffenova dobrina $\frac{\partial x_i(p,y)}{\partial p_i} > 0$

Podrobneje:

Giffenova dobrina: $$\frac{\partial x_j}{\partial p_j} = \underbrace{\frac{\partial h_j}{\partial p_j}}_{\substack{\leq 0 \\ \text{subst. člen lastne cene}}} - \frac{\partial x_j}{\partial Y} x_j$$ (Slutsky)

$\Rightarrow$ Giffenova dobrina mora biti inferiorna. Še več, mora biti tako inferiorna, da dohodkovni efekt prevlada nad substitucijskim.

Izrek o padajočem povpraševanju

- Padec v lastni ceni normalne dobrine bo prinesel porast v povpraševanju po njej. Če padec v ceni povzroči padec v povpraševanju, mora biti dobrina inferiorna.

- Če naj naša teorija velja, mora biti opaženo Marshallovo povpraševanje <u>homogeno stopnje 0,</u> <u>izčrpati mora proračun</u>, Slutskyeva matrika substitucijskih členov povpraševanja pa mora biti <u>simetrična</u> in <u>negativno semi-definitna</u>.