1. PISNI IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD 1

Finančna matematika

18. januar 2010

Vpisna številka: Ime in priimek:

1. Kako bi numerično stabilno izračunali vrednosti funkcije
$$f(x) = \frac{\tan(2+x) - \tan(2-x)}{x}$$
za majhne x? Utemeljite, zakaj pride do težav. Stabilno izračunajte vrednosti $f(x)$ za $x = 10^{-5}, 10^{-8}$ ter določite limito $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Rešitev. Za majhne x velja $\tan(2+x) \approx \tan(2-x)$. Do problemov pride, ker odštevamo dve približno enaki števil. Izraz pretvorimo v stabilno obliko
$$\frac{\tan(2+x) - \tan(2-x)}{x} = \frac{\frac{\sin(2+x)}{\cos(2+x)} - \frac{\sin(2-x)}{\cos(2-x)}}{x} = \frac{\sin(2+x)\cos(2-x) - \sin(2-x)\cos(2+x)}{x\cos(2+x)\cos(2-x)}$$
$$= \frac{\sin(2+x-(2-x))}{x\cos(2+x)\cos(2-x)} = \frac{\sin(2x)}{x\cos(2+x)\cos(2-x)}.$$
Limito preprosto izračunamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} \frac{1}{\cos(2+x)\cos(2-x)} = \frac{2}{\cos^2(2)}.$$
Izračuna na osem decimalk sta oba $1,15487984$. ∎

2. Dana je iteracijska formula
$$x_{r+1} = A\,x_r + B\,\frac{1}{x_r} + C\,\frac{1}{x_r^3}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$
za računanje $\sqrt{a}$, $a > 0$.
   (a) Določite neznane koeficiente A, B, C, tako da bo red konvergence vsaj kubičen.
   (b) Z dano iteracijo izračunajte $\sqrt{7} = 2.6457513110$ na pet decimalk natančno. Za začetni približek vzemite $x_0 = 3$.

Rešitev. Da bo metoda vsaj reda 3 mora veljati $g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, $g'(\sqrt{a}) = 0$, $g''(\sqrt{a}) = 0$. Tako dobimo tri enačbe
$$\sqrt{a}A + \frac{1}{\sqrt{a}}B + \frac{1}{\sqrt{a}^3}C = \sqrt{a}$$
$$A - \frac{1}{a}B - \frac{3}{a^2}C = 0$$
$$2\frac{1}{\sqrt{a}^3}B + 12C\frac{1}{\sqrt{a}^5} = 0.$$
Sistem rešimo in dobimo $A = \frac{3}{8}$, $B = \frac{3a}{4}$, $C = -\frac{a^2}{8}$. V nastavek vstavimo $a = 7$, saj računamo $\sqrt{7}$. Prva dva približka sta: $x_1 = \frac{3}{8}3 + \frac{7\cdot 3}{4\cdot 3} - \frac{7^2}{8}\frac{1}{3^3} = \frac{153}{54}$, $x_2 = 2,64575131204$.

∎

3. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunajte LU razcep matrike A z delnim pivotiranjem.

(b) Izračunajte determinanto matrike A. Pomagajte si z izračunanim LU razcepom.

Rešitev.

$$A = \begin{bmatrix} \underline{3} & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \\ \underline{6} & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -4 & 6 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 & 6 \end{bmatrix} \overset{G}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \overset{G}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \overset{3\updownarrow 4}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{G}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{G}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{G}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{3\updownarrow 4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{3\updownarrow 4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P.$$

Upoštevamo $PA = LU$, tako dobimo $\det(PA) = \det(P)\det(A) = \det(L)\det(U) \to \det(A) = \det(L)\det(U)/\det(P) = 1 \cdot -192/-1 = 192$. ∎

4. S pomočjo QR razcepa z Givensovimi rotacijami rešite predoločen sistem $Ax = b$ za podatke

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 12 \\ 6 & 3 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Hkrati bomo delali transformacijo tudi na b. Prva Givensova rotacija je oblike

$$R_{13}^T = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & & \frac{3}{5} & \\ & 1 & & \\ -\frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, R_{13}^T A = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 12 \\ 0 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}, R_{12}^T b = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Druga Givensova rotacija je oblike

$$R_{24}^T = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ & & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}, R_{24}^T R_{13}^T A = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R_{24}^T R_{13}^T b = \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

Na koncu rešimo sistem

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

in dobimo $x_1 = \frac{1}{75}$, $x_2 = \frac{52}{75}$.

■