NUMERIČNE METODE 1

Finančna matematika

1. domača naloga

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom *ime-priimek-vpisna-1.zip* in jih oddajte preko sistema Moodle (http://ucilnica.fmf.uni-lj.si) najkasneje do 23. decembra 2013. ZIP datoteka naj vsebuje izpolnjeno poročilo, ki ga najdete v priloženi *.tex datoteki. Rešitvi priložite programe, s katerimi ste naloge rešili in izjavo, da ste naloge reševali samostojno. Naloge naj bodo rešene v Matlabu (uporabite lahko tudi Octave ali Scilab). Priložite programe, s katerimi ste naloge rešili. Programi naj bodo smiselno poimenovani in razporejeni v mapah, ki naj bo bodo poimenovane nal1, nal2, ... K vsaki nalogi spada glavna skripta, ki izpiše rešitve naloge (rekurzija.m, borza.m, dospetje.m, sistem.m). Prosim, da preverite, če se skripte izvedejo v komandni vrstici (recimo klic rekurzija se mora izvesti brez napak), v nasprotnem boste izgubili polovico točk pri konkretni nalogi. Dodatna naloga prinese dodatne točke, lahko pa jo naredite namesto ene izmed prvih štirih.

Na vsa vprašanja glede nalog, uporabe Matlaba, se bom potrudil odgovoriti čim prej. Vprašanja so več kot dobrodošla. Upoštevajte le, da bom od 1. decembra do 14. decembra službeno odsoten. Naj bodo c_1, c_2, c_3, c_4 zadnje štiri cifre vaše vpisne številke.

1. Integral
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{kn}}{a^k + x^k}\, dx$$
zadošča rekurzivni zvezi
$$I_{n+1} = \frac{1}{kn+1} - a^k I_n, \quad i = 0, 1, \ldots$$
Naj bo $a = 5 + \frac{c_3}{10} + \frac{c_4}{100}$.
   (a) Izračunajte I_0, za $k = 2$. Kam gredo členi I_n, ko gre $n \to \infty$.
   (b) V Matlabu z dano rekurzijo za k = $a - 1$, izračunajte prvih 20 členov zaporedja. Izpišite I_{19}, I_{20}. Za izračun I_0 lahko uporabite kar numeričen izračun integrala v Matlabu ali Mathematici. V Matlabu si lahko pomagate z ukazom `quad`.
   (c) Za $a > 1$ je numerično stabilno računanje v obratni smeri. Postavite $\tilde{I}_{20} = 0$ in $k = a - 1$ ter izračunajte člene $\tilde{I}_{19}$, $\tilde{I}_{18}$, ..., $\tilde{I}_0$ z rekurzivno formulo v obratni smeri. Izpišite $\tilde{I}_0$, $\tilde{I}_1$, $\tilde{I}_2$. Kakšna je razlika $\frac{|\tilde{I}_0 - I_0|}{|I_0|}$?

   Za izpis rezultatov uporabite `format long e`. Rezultate prikažite tudi grafično. Nalogo rešite v Matlabovi skriptni datoteki `rekurzija.m`

2. Leta 1982 je na borzi v Vancouveru prišlo do napake pri izračunu vrednosti borznega indeksa. Borzni indeks je padal, čeprav so cene delnic rasle. Do napake je prišlo, ker so pri računanju indeksa rezali decimalke od tretje naprej. V nalogi boste le to simulirali. Borzni indeks so računali adaptivno po formuli

$$\text{nov indeks} = \text{star indeks} + \tfrac{1}{\text{število delnic}} * (\text{skupna sprememba cen delnic}).$$

Postavite začetni indeks na 1000. Število delnic naj bo konstantno enako

$$1000 + 100 * c_4 + 10 * c_3 + c_2.$$

Indeks se spremeni pri vsaki spremembi cen delnic. To se zgodi N-krat, kjer je $N = 10^5$. Spremembe cen delnic določite naključno z ukazom

$$\texttt{randn}(\text{'state'}, 0); \qquad \texttt{spremembeCen} = \texttt{randn}(1, N) * 10;$$

Računajte na dva načina:

(a) Pri vsakem izračunu indeksa odrežite decimalke od tretje naprej. Uporabite ukaz `fix`.

(b) Pri vsakem izračunu indeksa zaokrožite rezultat na tri decimalke. Uporabite ukaz `round`.

Izpišite končni indeks v obeh primerih ter narišite graf spreminjanja borznega indeksa za oba primera (na isti sliki). Nalogo rešite v Matlabovi skriptni datoteki `borza.m`

3. Iz podatkov o načrtovanem denarnem toku lahko izračunamo **donosnost do dospetja** kot rešitev nelinearne enačbe

$$\frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{D_n}{(1+r)^n} - I_0 = 0,$$

kjer je I_0 začetni vložek in D_j pričakovani dobiček po j-tem letu. Za naložbo, pri kateri za začetni vložek

$$I_0 = 1000 + (c_1 + c_2)10 + c_3 + c_4 \quad \text{EUR}$$

ob koncu 1., 2., 3. oziroma 4. leta dobimo $200, 150, 100$ oziroma 1100 EUR. Izračunajte donosnost do dospetja na vsaj 8 mest natančno. Uporabite katero izmed iterativnih metod, ki smo jih uporabili na vajah.

Nalogo rešite v Matlabovi skriptni datoteki `dospetje.m`.

4. Podan je sistem enačb

$$\begin{aligned} x^3 + Ay^3 - 4Ax^2y &= A^3, \\ x^2 + y^2 &= r^2, \end{aligned}$$

kjer je $A = 1 + c_3/10 + c_4/100$.

Za $r = 1$, $r = 1.5$ in $r = 2$ z Newtonovo metodo izračunajte vse realne rešitve sistema na 10 decimalk natančno.

Nalogo rešite v Matlabovi skriptni datoteki `sistem.m`.

5. **Dodatna naloga** Na rob pašnika, ki ima obliko kroga z radijem 10 metrov, zabijemo količek in nanj privežemo kozo. Koliko mora biti dolga vrvica, s katero je privezana koza, da bo lahko v dolgem času popasla s% pašnika. Kakšen pa je odgovor, če je pašnik kvadratne oblike s stranico 10 m? Namig: odgovor bo v tem primeru odvisen tudi od lokacije količka. Odgovor ponazorite z grafom.