NUMERIČNE METODE 1

Finančna matematika

2. domača naloga

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom *ime-priimek-vpisna-2.zip* in jih oddajte preko sistema Moodle (http://ucilnica.fmf.uni-lj.si) najkasneje do konca 25. januarja 2014. ZIP datoteka naj vsebuje izpolnjeno poročilo, ki ga najdete v priloženi *.tex datoteki. Rešitvi priložite programe, s katerimi ste naloge rešili. Naloge naj bodo rešene v Matlabu (uporabite lahko tudi Octave ali Scilab).
Naj bodo c_1, c_2, c_3, c_4 zadnje štiri cifre vaše vpisne številke `vpisna`.

1. Napišite program `[l, ud, uu] = tridiag_sistem(d,u,v)`, ki poišče LU razcep tridiagonalne nesingularne matrike A, ki ima glavno diagonalo d, naddiagonalo u in poddiagonalo v. Kot rezultat vrnete `l,` poddidagonalo matrike L, ter `ud` in `uv,` ki sta glavna diagonala in naddiagonala matrike U. Parametri funkcije pa so vektorji (stolpci), ki predstavljajo glavno diagonalo `d` matrike A in ustrezno naddiagonalo `u` ter poddiagonalo `v`. Uporabite LU razcep brez pivotiranja, ki ga priredite tako, da bo matriko take oblike in velikosti $n \times n$ razcepil v času $O(n)$. Za podatke, ki jih dobite z ukazom `[d, u, v, b] = generiraj_stiri(vpisna)`, izračunajte norme $||A||_1, ||A||_2, ||A||_\infty, ||A||_F$ ter pogojenostno število $\kappa_2(A)$. Z LU razcepom brez pivotiranja, ki ga dobite s pomočjo napisane funkcije, rešite sistem $Ax = b$. Naj bodo motnje sistema določene z naslednjimi Matlabovimi ukazi:

   $$\epsilon = 10\hat{\ }{-6}; \quad \delta b = \epsilon * kron\,(ones(200,1), [-1; 1; 1; -1; 1])\,; \quad \delta A = \epsilon * ones(1000);$$

   Poiščite rešitev $\widehat{x}$ zmotenega tridiagonalnega sistema $(A + \delta A)\widehat{x} = b + \delta b$ ter izračunajte relativno motnjo rešitve

   $$\frac{||\widehat{x} - x||_2}{||x||_2}.$$

   Primerjajte jo z oceno za občutljivost linearnih sistemov.

2. Na primeru aproksimacije s polinomom primerjajte natančnost metod za reševanje problema najmanjših kvadratov, ki so vgrajene v Matlabu (če katera od teh metod ni vgrajena v Matlabu, je program zanjo na spletni strani
   http://www-lp.fmf.uni-lj.si/plestenjak/vaje/ nla/nla_primeri.htm):

   - operacija \,
   - normalni sistem,
   - psevdoinverz,
   - QR razcep v Matlabu.

Sestavite tabelo napak, ki jo shranite v spremenljivko `napake`, za vse zgornje metode. Napake so števila $||p - \widetilde{p}||_2$, kjer je p točna rešitev, $\widetilde{p}$ pa rešitev, ki jo vrne vsaka od zgoraj navedenih metod.

Za aproksimacijo podatkov y uporabite model $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5$. Testne podatke in natančne rešitve dobite s klicem
`[x, y, beta] = podatki(c1, c2)`.

3. Podanih je 31 točk (x_i, y_i), ki predstavljajo meritve. Po metodi najmanjših kvadratov poiščite najboljše aproksimacije za podane modele in primerjajte napako ter razvrstite modele od najboljšega do najslabšega.

   (a) $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$,

   (b) $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$,

   (c) $r(x) = a_0 \frac{1}{x} + a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$,

   Meritve dobite s podprogramom `[x,y]=meritve30(vpisna)`. Podprogram je na voljo na spletni učilnici.

4. Komet se giblje po hiperbolični (eliptični) orbiti. Znanih je deset meritev položaja planeta v (x, y) ravnini:

$$x = [W \;\; 0.95 \;\; 0.87 \;\; 0.77 \;\; 0.67 \;\; 0.57 \;\; 0.44 \;\; 0.30 \;\; 0.16 \;\; 0.01],$$
$$y = [0.38 \;\; 0.32 \;\; 0.27 \;\; 0.22 \;\; 0.18 \;\; 0.15 \;\; 0.13 \;\; 0.12 \;\; 0.13 \;\; 0.14],$$

   kjer je $W = 1 + \frac{1}{25} \cdot \frac{c_1 c_3}{100}$. Določite koeficiente, shranjeni naj bodo v spremenljivki `koef`, v kvadratni formi

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = -1,$$

   ki se najbolje prilega podatkom po metodi najmanjših kvadratov. Narišite orbito, na sliko dodajte podane točke. Pomagajte si tako, da narišete nivojnico funkcije

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + 1$$

   pri $z = 0$ z uporabo funkcije `contour`:

```
[X,Y]=meshgrid(xmin:deltax:xmax, ymin:deltay:ymax);
Z=a*X.^2 + b*X.*Y + c*Y.^2 + d*X + e*Y +1;
contour(X,Y,Z,[0 0])
```