Poglavje 4

Matrične norme

Matrična norma je preslikava $||.|| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}^+$, za katero velja

(i). $||A|| \geq 0,\ ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

(ii). $||\alpha A|| = |\alpha|||A||$,

(iii). $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$,

(iv). $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$, submultiplikativnost.

Za poljubni matriki A in B in poljuben $\alpha \in \mathbb{C}$.

Naloga 4.1 *Dokaži, da velja* $||A||_F^2 = \mathrm{sl}(A^H A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^H A)$, *kjer so* λ_i *lastne vrednosti* $A^H A$.

Rešitev. Za $B = A^H A$ velja $b_{ii} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} a_{ki} = \sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2$. Tako za sled B dobimo

$$\mathrm{sled}(A^H A) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2 \right) = ||A||_F^2.$$

Matrika $A^H A$ je simetrična, torej se da diagonalizirati. Podobna je matriki z lastnimi vrednostmi na diagonali. Sled podobne matrike je enaka sledi prvotne matrike, tako dobimo $||A||_F^2 = sl(A^H A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^H A)$. ■

Naloga 4.2 *Pokaži, da velja*

$$||A||_1 = \max_i ||A(:, i)|| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}.$$

Rešitev. Upoštevajmo definicijo norme $||A||_1 = \max_{||x||_1=1} ||Ax||_1$, označimo še $y = Ax$. Tako velja $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ in

$$||y|| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Enakost je dosežene za vektor e_k, kjer je k indeks stolpca z največjo prvo normo. ■

Naloga 4.3 *Pokaži naslednje:*

a) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_F \leq ||A||_2 \leq ||A||_F$

b) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_\infty$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_1$

d) $N_\infty(A) \leq ||A||_2 \leq nN_\infty(A)$

Rešitev. a)
Vemo, da velja

$$||A||_2 = \max_{i=1,\dots,n} \sqrt{\lambda_i(A^H A)} = \sigma_1(A) \text{ in } ||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^H A).$$

Lastne vrednosti $A^H A$ so nenegativne, saj velja $\langle A^H Ax, x\rangle = \langle \mu x, x\rangle = \mu = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0$, $\lambda_i = \sigma_i^2$. Razporedimo jih v zaporedje $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \dots \geq \sigma_n^2 \geq 0$. Pozitivni koreni teh lastnih vrednosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$ so singularne vrednosti matrike A. Očitno je $||A||_2 \leq ||A||_F$, saj je $||A||_2$ enaka $\sigma_1(A)$, kar je največja singularna vrednost matrike A. Poglejmo si $||A||_F^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \leq n\sigma_1^2 = n||A||_2$, kar pomeni $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_F \leq ||A||_2$. Neenačaj dobimo, ker je $\sigma_1(A)$ največja singularna vrednost.
b)
Za vektorske norme velja

$$||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots |x_n|^2} = ||x||_2 \leq \sqrt{n \max_i |x_i|^2} = \sqrt{n}||x||_\infty,$$

to je $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$. Razmisli zakaj neeneakosti držijo, vsi sklepi so enostavni. Iz tega dobimo

$$||A||_2 = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\sqrt{n}||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = \sqrt{n}||A||_\infty$$

in

$$||A||_2 = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} \geq \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_\infty}{\sqrt{n}||x||_\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty.$$

c)
Velja $||A||_1 = ||A^H||_\infty$ in $||A||_2 = ||A^H||_2$. Iz tega že sledi neenakost.
d)
Iz a) vemo

$$||A||_2 \leq ||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \leq \sqrt{n^2 \max_{i,j} |a_{ij}|^2} = n \max_{i,j} |a_{ij}| = nN_\infty(A).$$

Za drugi del neenakosti upoštevamo $a_{ij} = e_i^T Ae_j$. Računajmo

$$|a_{ij}| = |e_i^T Ae_j| \leq ||e_i||_2||Ae_j||_2 = \frac{||Ae_j||_2}{||e_j||_2} \leq ||A||_2.$$

Prvi neenačaj dobimo po Cauchy-Schwartzovi neenakosti, zadnjega pa po definiciji norme $||A||_2$.
■

Naloga 4.4 *Pokaži, da velja*

a) $|\lambda| \leq ||A||$

b) $||A||_2^2 \leq ||A||_\infty ||A||_1$

c) $||a_i||_2 \leq ||A||_2$

Rešitev.

a) Točka a) je očitna. Naj bo x enotski lastni vektor za lastno vrednost λ, potem velja $||Ax|| = ||\lambda x|| = |\lambda|||x|| = \lambda$. Norma je supremum po vseh enotskih x, torej večja ali enaka.

b) Vemo, da je $||A||_2^2$ največja lastna vrednost matrike $A^H A$. Iz a) dobimo

$$||A||_2^2 \leq ||A^H A||_\infty \leq ||A^H||_\infty ||A||_\infty = ||A||_1 ||A||_\infty.$$

c) Trditev sledi za i-ti enotski vektor e_i. Kjer velja $Ae_i = a_i$.

■

Naloga 4.5 *Izračunaj* $||\ ||_1$, $||\ ||_\infty$, $||\ ||_F||$ *za* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *in oceni* $||\ ||_2$.

Rešitev. Izračunajmo

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \max\{|2|+|5|+|-2|,\ |-1|+|4|+|-1|,\ |3|+|1|+|2|\} = 9, \\ ||A||_\infty &= \max\{|2|+|-1|+|3|,\ |5|+|4|+|1|,\ |-2|+|-1|+|2|\} = 10, \\ ||A||_F &= \sqrt{4+1+9+25+16+1+4+4} = \sqrt{65} \doteq 8.06226. \end{aligned}$$

Ocenimo $||A||_2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}}||A||_F \leq ||A||_2 \leq ||A||_F \quad &\Rightarrow \quad 4.65475 \leq ||A||_2 \leq 8.06226 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{3}||A||_\infty \quad &\Rightarrow \quad 5.7735 \leq ||A||_2 \leq 17.3205 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{3}||A||_1 \quad &\Rightarrow \quad 5.19615 \leq ||A||_2 \leq 15.58846 \\ N_\infty(A) \leq ||A||_2 \leq 3N_\infty(A) \quad &\Rightarrow \quad 5 \leq ||A||_2 \leq 15. \end{aligned}$$

Skupaj dobimo oceno $5.7735 \leq ||A||_2 \leq 8.06226$. Boljšo oceno dobimo, če poskusimo oceniti spektralni radij matrike

$$B = A^H A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 20 & 7 \\ 20 & 8 & -1 \\ 7 & -1 & 14 \end{bmatrix}.$$

Za vsako lastno vrednost in vsako normo velja $\lambda_i(B) \leq ||B|_F = 50.0899$. Vemo, da velja

$$||A||_2 \leq \sqrt{||B||_F} = 7.0774.$$

Oceno navzdol dobimo, če upoštevamo $||A||_2 = ||A^T||_2$ in $||Ae_i||_2 \leq ||A||_2||e_i||_2 = ||A||_2$, zadnja enakost sledi iz definicije matrične norme. Vektorji Ae_i so ravno i-ti stolpci, $A^T e_i$ so i-te vrstice. Norme stolpcev so $5.7446,\ 4.2426, 3.7417$. Norme vrstic so $3.7417,\ 6.4807,\ 3$. Torej dobimo $||A||_2 \geq 6.4807$. Končna ocena je $6.4807 \leq ||A||_2 \leq 7.0774$. Ukaz iz Matlaba vrne $\texttt{norm}(A) = 6.9044$. ■

Naloga 4.6 *Izračunaj* $||A||_1$, $||A||_\infty$, $||A||_F$ *in čim natančneje oceni* $||A||_2$ *na obe strani, če je*

$$\begin{aligned} a_{ii} &= -2i,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n \\ a_{i+1,i} &= a_{i,i+1} = n - i,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n, \end{aligned}$$

drugi elementi so enaki 0.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & n-1 & & & \\ n-1 & -4 & n-2 & & \\ & n-2 & -6 & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2n \end{bmatrix}.$$

Upoštevaj, da velja

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Rešitev. Pri $i = 1$ dobimo za vsoto absolutnih vrednosti v stolpcu $n + 1$, kar očitno ni maksimum. Izračunajmo

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \max_{i \neq 1}\{|-2i| + |n-i| + |n-i+1|\} = \max_{i \neq 1}\{2i + n - i + n - i + 1\} \\ &= \max_{i \neq 1}\{2n+1\} = 2n + 1. \end{aligned}$$

Ker je matrika simetrična velja $||A||_1 = ||A^H||_\infty = ||A||_\infty = 2n + 1$. Frobeniusova norma je

$$\begin{aligned} ||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i^2 = 6\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + 4n^2 = 6\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 4n^2 = \\ n(n-1)(2n-1) + 4n^2 = n(2n^2 - 3n + 1) + 4n^2 = 2n^3 + n^2 + n. \end{aligned}$$

Poglejmo si ocene za drugo normo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}}||A||_F \leq ||A||_2 \leq ||A||_F \Rightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2n^3 + n^2 + n} \leq ||A||_2 \leq \sqrt{2n^3 + n^2 + n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_\infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}(2n+1) \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}(2n+1) \\ N_\infty(A) \leq ||A||_2 \leq nN_\infty(A) \Rightarrow 2n \leq ||A||_2 \leq 2n^2. \end{aligned}$$

Upoštevamo še, da velja $||A||_2^2 \leq ||A||_1||A||_\infty$. Iz tega dobimo

$$||A||_2^2 \leq (2n+1)^2,$$

kar pomeni $||A||_2 \leq 2n + 1$. Za drugo normo smo dobili oceno

$$2n \leq ||A||_2 \leq 2n + 1.$$

■