Poglavje 3

Nelinearne enačbe

Naloga 3.1 *Za funkcijo* $f(x) = x^3 + 1$ *naredi korak bisekcije in tangentne metode. Vzemi* $a = -1.2$ *in* $b = x_0 = -0.9$.

Rešitev. Korak bisekcije je $fb = f(-0.9) = (-0.9)^3+1 = 0.271$, $fa = f(-1.2) = (-1.2)^3+1 = -0.728$, $\text{sign}(fafb) = -1$. Zato lahko izvedemo korak bisekcije. Nadaljujmo: $c = (a+b)/2 = -1.05$, $fc = (-1.05)^3 + 1 = -0.157625$, $\text{sign}(fafc) < 0$, torej vzamemo $a = c$. To ponavljamo.

Za korak tangentne metode potrebujemo odvod $f'(x) = 3x^2$. Izračunajmo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0.9 - \frac{(-0.9)^3 + 1}{3(-0.9)^2} \doteq 1,0115.$$

Bisekcijo in sekantno metoda uporabljam takrat, ko ne poznamo odvoda ali pa je računanje odvoda zahtevno. ∎

Naloga 3.2 *Podani sta dve naložbi z naslednjimi podatki*

	Začetni vložek	*Končna vrednost naložbe*	*Čas dospetja*
Naložba 1	*1000€*	*3000€*	*5 let*
Naložba 2	*1000€*	*4000€*	*7 let*

Kolikšna sta donosnosti do dospetja posameznih naložb? Kolikšen je donosnost do dospetja, če vložimo v vsako naložbo po 1000€*?*

Rešitev. Donosnost do dospetja prve naložbe je $\sqrt[5]{\frac{3000}{1000}} = \sqrt[5]{3}$, druge naložbe pa $\sqrt[7]{\frac{4000}{1000}} = \sqrt[7]{4}$. Neto sedanja vrednost je vrednost, ki bi jo morala imeti naložba danes, da bi dobili končno vrednost naložbe pri obrestovalnem faktorju r. Donosnost do dospetja sestavljene naložbe izračunamo tako, da izenačimo neto sedanjo vrednost naložb in začetni vložek v naložbe.

$$3000/(1+r)^5 + 4000/(1+r)^7 = 1000 + 1000 = 2000.$$

Dobili smo nelinearno enačbo, ki jo rešimo s kakšno numerično metodo. Dobimo rešitev $r \doteq 0.235$. ∎

Naloga 3.3 *Na voljo imamo kuponsko obveznico s ceno* 950€ *in kuponsko obrestno mero* 7 *%. Čas dospetja je* 4*. leta, njena nominalna vrednost* N *je* 1000€*. Kolikšna je njena donosnost do dospetja? Ali je večja od trenutnega donosa?*

Rešitev. Kuponska obrestna mera je 7 %. Vsako leto tako dobimo izplačanih 70 €. Kuponsko obveznico si lahko predstavljamo kot sestavljeno naložbo

	Skupni začetni vložek	Končna vrednost naložbe	Čas dospetja
Naložba	950€		
Naložba 1		70€	1 leto
Naložba 2		70€	2 leti
Naložba 1		70€	3 leta
Naložba 2		1000€ + 70€	4 leta

Tako dobimo nelinearno enačbo

$$\frac{70}{(1+r)} + \frac{70}{(1+r)^2} + \frac{70}{(1+r)^3} + \frac{1070}{(1+r)^4} = 950.$$

Približna rešitev je $r = 0.085$. Trenutna donosnost naložbe je $70/950 = 0.0737 = 7.37\%$. ∎

Izrek 3.1 *Naj bo α koren enačbe $x = g(x)$, naj bo g zvezno odvedljiva na $I = [\alpha - d, \alpha + d]$ in naj velja $|g'(x)| \leq m < 1$ za vsak $x \in I$. Potem za vsak $x_0 \in I$ zaporedje*

$$x_{r+1} = g(x_r),\ r = 0, 1, \cdots$$

konvergira k α in velja ocena za napako

$$|x_r - \alpha| \leq \frac{m}{1-m}|x_r - x_{r-1}|.$$

Dokaz 3.1 *Za $z_0 \in [\alpha - d, \alpha + d]$ velja*

$$|g(z_0) - \alpha| = |g(z_0) - g(\alpha)| = |(z_0 - \alpha)g'(\xi)|,$$

kjer je ξ med z_0 in α. Torej velja $\xi \in I$, posledično je $|g'(\xi)| \leq m < 1$. Dobili smo da velja $|z_1 - \alpha| \leq m|z_0 - \alpha|$. Naša indukcijska predpostavka je $|z_n - \alpha| \leq |z_0 - \alpha|m^n$. Korak indukcije je trivialen,

$$|z_{n+1} - \alpha| = |g(z_n) - \alpha| = |z_n - \alpha|g'(\xi_1) \leq m|z_n - \alpha| \leq^{IP} |z_0 - \alpha|m^{n+1}$$

Torej velja

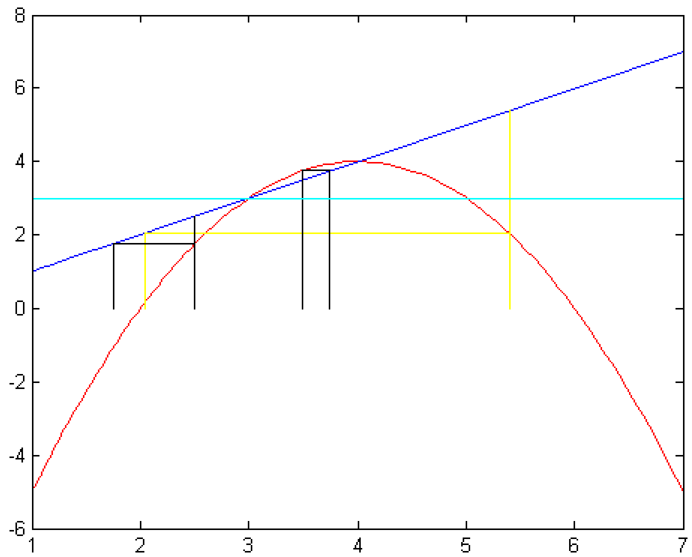
$$\lim_{n\to\infty} |z_{n+1} - \alpha| \leq \lim_{n\to\infty} |z_0 - \alpha|m^{n+1} = 0,$$

saj je m strogo manjši kot ena.

Izrek 3.2 *Imamo začetno točko x_0 in interval $I = [x_0 - d, x_0 + d]$. Če velja $|g(x) - g(y)| \leq m|x - y|$ za $m < 1$ in $|g(x_0) - x_0| \leq (1 - m)d$, potem zaporedje x_r konvergira k α in velja $g(\alpha) = \alpha$.*

Izrek 3.3 *(Banachovo skrčitveno načelo) Naj bo M poln metričen prostor in $g : M \to M$. Tedaj obstaja natanko ena negibna (fiksna) točka preslikava g, t.j. taka točka $a \in M$, da je $g(a) = a$. Če je $x_0 \in M$ poljubna točka, tedaj zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$ konvergira k a. Primer polnega metričnega prostora v $\mathbb{R}$ je zaprti interval.*

Naloga 3.4 *Za katere začetne približke je navadna iteracija za reševanje $x = g(x)$, kjer je $g(x) = -12 + 8x - x^2$, konvergentna? Kam konvergira zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$? Kakšen je red konvergence? Kje nam konvergenco zagotavlja izrek (Banachovo skrčitveno načelo) ? Namig: začetne približke išči na intervalu.*



Slika 3.1: Koraki iteracije

Rešitev. Iz slike preberemo, da je kandidat za območje konvergence interval $[3,5]$. V naslednjih točkah bomo pokazali, da je ta interval res dobra izbira.

(i). Pokažimo, da velja: $x_r < 3 \Rightarrow x_{r+1} < x_r$. Za take začetne približke bomo imeli divergenco. Oglejmo si $x_r - x_{r+1}$ in pokažimo, da je izraz pozitiven. Izračunajmo

$$x_r - x_{r+1} = x_r - g(x_r) = x_r - (-12 + 8x_r - x_r^2) = 12 - 7x_r + x_r^2 = (x_r - 4)(x_r - 3).$$

Zadnji izraz v enakosti je v primeru $x_r < 3$ strogo pozitiven.

(ii). Velja tudi: $x_0 > 5 \Rightarrow x_1 < 3$. Spet dobimo divergenco. Oglejmo si izraz $3 - x_1$, to nam da

$$3 - x_1 = 15 - 8x_0 + x_0^2 = (x_0 - 5)(x_0 - 3) > 0.$$

(iii). Poleg tega velja $|x_{r+1} - 4| \leq |x_r - 4|^2$ za $x_r \in (3,5)$. Izračunajmo

$$|x_{r+1} - 4| = | - 12 + 8x_r - x_r^2 - 4| = | - 16 + 8x_r - x_r^2| = (x_r - 4)^2, \tag{3.1}$$

ker je x_r na $(3,5)$, sledi $|x_r - 4| < 1$ in potem $|x_r - 4|^2 < |x_r - 4|$.Vidimo, da velja tudi $|x_r - 4| = |x_0 - 4|^{2^r}$, kar že zagotavlja konvergenco. Zvezo dobimo z zaporedno uporabo enačbe (3.1).

(iv). Za robne točke velja $g(3) = g(5) = 3$.

Naši možni rešitvi sta $x_1 = 4$ in $x_2 = 3$, x_2 dobimo samo v primeru robnih točk, kar je praktično nemogoče. Zato si oglejmo red konvergence v okolici ničle $x_1 = 4$. Spomnimo se, da velja: metoda je reda p, natanko takrat ko $g'(x_1) = \cdots = g^{(p-1)}(x_1) = 0$ in $g^{(p)}(x_1) \neq 0$. Odvod je $g'(x) = 8 - 2x$, torej je $g'(4) = 0$. Red je vsaj kvadratičen. Drugi odvod je enak $g''(x) = -2$. Torej je red kvadratičen.

Izrek nam konvergenco zagotavlja na intervalu, kjer velja $|g'(x)| < 1$. Torej mora veljati |8-2x|< 1, to pa je $3.5 < x < 4.5$. Izrek nam da torej le potreben pogoj, iterativna metoda pa lahko konvergira še na večjem intervalu.

∎

Naloga 3.5 *Iščemo rešitve enačbe* $f(x) = x^5 - 10x + 1 = 0$*. Za iteracijsko funkcijo izberemo* $g(x) = \frac{x^5+1}{10}$*. Ali nam izrek izrek* 3.2 *zagotavlja konvergenco za* $x_0 = 0$*? Oceni napako drugega približka.*

Rešitev. Za odvod mora veljati $|g'(x)| \leq m < 1$. Kar je $|\frac{x^4}{2}| < 1$, $|x| < \sqrt[4]{2} \doteq 1.1892$. Torej imamo za x_0 konvergenco. Napako drugega približka bomo ocenili s pomočjo formule $|x_r - \alpha| \leq \frac{m}{1-m}|x_r - x_{r-1}|$. Oceniti moramo še m in si izbrati primeren interval. Če hočemo uporabiti izrek 3.2, izberemo recimo interval $[-0.2, 0.2]$, kjer je $d = 0.2$. Na tem intervalu ocenimo $m \leq \frac{0.2^4}{2} \leq 0.0008$. Poleg tega velja tudi $|g(0)-0| = 0.1 \leq (1-0.0008)0.2$. Vsi pogoji so izpolnjeni. ∎

Tangentno metodo dobimo, če za naslednjo točko v iteraciji vzamemo presečišče tangente na funkcijo f z osjo x. Tako dobimo $x_{r+1} = g(x_r) = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$.

Izrek 3.4 *Za tangentno metodo velja naslednji izrek. Naj velja* $f(\alpha) = 0$ *in naj bo* α m*-kratna ničla. Če je* $m = 1$*, je konvergenca vsaj kvadratična. Če velja še* $f''(\alpha) = 0$*, je konvergenca kubična. Če imamo večkratno ničlo* $m \geq 2$*, velja* $\lim_{x\to\alpha} g'(x) = 1 - 1/m$*.*

Rešitev. Dokazali bomo samo drugi del izrek, saj je prvi enostaven. Če je α m-kratna ničla funkcije f, potem po definiciji obstaja $l \neq 0$, da velja $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{(x-\alpha)^m} = l$. Po L'Hopitalu dobimo $\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}} = l$, saj gresta imenovalec in števec proti 0. Najprej pokažimo, da velja $\lim_{x\to\alpha} x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \alpha$. Zadosti bo, da dokažemo $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$. Imenovalec in števec delimo z $(x-\alpha)^m$, dobimo

$$\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)\frac{\frac{f(x)}{(x-\alpha)^m}}{m\frac{f'(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}}} = \lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)\frac{l}{ml} = 0.$$

Izračunajmo še limito odvoda:

$$g'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)} - g(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha}{x-\alpha} = 1 - \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{f'(x)(x-\alpha)}.$$

Nadaljujmo

$$1 - \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{f'(x)(x-\alpha)} = 1 - \lim_{x\to\alpha} \frac{\frac{f(x)}{(x-\alpha)^m}}{m\frac{f'(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}}} = 1 - \frac{l}{ml} = 1 - \frac{1}{m}.$$

∎

Laguerrova metoda je metoda za iskanje ničel polinoma

$$f(z) = a_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n).$$

Iteracije je oblike

$$z_{r+1} = z_r - \frac{nf(z_r)}{f'(z_r) \pm \sqrt{(n-1)\left[(n-1)f'^2(z_r) - nf(z_r)f''(z_r)\right]}}.$$

Velja $\epsilon_r = x_r - \alpha$, $\epsilon_{r+1} = C\epsilon_r^3 + O(\epsilon_r^4)$, kjer je $C = \frac{(n-2)f''^2(\alpha)}{8(n-1)f'^2(\alpha)} - \frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}$. Predznak izberemo tako, da je izraz v imenovalcu po absolutni vrednosti največji. Konvergenca je pri enostavnih ničlah vsaj kubična.

Naloga 3.6 *Izpelji metodo kubičnega korena, tako da v Laguerrovi metodi pošlješ* $n \to \infty$*. Z izpeljano metodo izračunaj* $\sqrt[3]{a}$*. Naredi tri korake za* $a = 3$ *in* $x_0 = 1$*.*

Rešitev. Izračunajmo

$$\begin{aligned} z_{r+1} &= z_r - \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_r)}{\frac{f'(z_r)}{n} \pm \sqrt{(1-\frac{1}{n})\left[(1-\frac{1}{n})f'^2(z_r) - f(z_r)f''(z_r)\right]}} \\ &= z_r - \frac{f(z_r)}{\sqrt{f'^2(z_r) - f(z_r)f''(z_r)}}. \end{aligned}$$

Velja $\epsilon_{r+1} = C\epsilon_r^3 + O(\epsilon_r^4)$, kjer je $C = \frac{f''^2(\alpha)}{8f'^2(\alpha)} - \frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}$.
Funkcijo f si izberemo tako, da velja $f(\sqrt[3]{a}) = 0$. Izberemo si $f(x) = x^3 - a$, torej je $f'(x) = 3x^2$ in $f''(x) = 6x$. Dobimo metodo

$$\begin{aligned} x_{r+1} &= x_r - \frac{x_r^3 - a}{\sqrt{9x_r^4 - (x_r^3 - a)6x_r}} \\ &= x_r - \frac{x_r^3 - a}{\sqrt{3x_r^4 + 6ax_r}}. \end{aligned}$$

Za $a = 3$, $x_0 = 1$ dobimo: $x_1 = 1 - \frac{1-3}{\sqrt{3+6\cdot 3}} \doteq 1.4364358$, $x_2 \doteq 1.4422496$, $x_3 \doteq 1.4422496$. ■

Naloga 3.7 *V iteracijski formuli* $x_{r+1} = \frac{A^2}{x_r^5}\left(\alpha + \frac{\beta x_r^3}{A} + \frac{\gamma x_r^6}{A^2}\right)$ *za* $\sqrt[3]{A}$ *določi* α, β, γ, *da bo metoda vsaj kubična.*

Rešitev. Veljati mora $g(\sqrt[3]{A}) = \sqrt[3]{A}$, $g'(\sqrt[3]{A}) = 0$, $g''(\sqrt[3]{A}) = 0$. Imamo

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha A^2 x^{-5} + \beta A x^{-2} + \gamma x, \\ g'(x) &= -5\alpha A^2 x^{-6} - 2\beta A x^{-3} + \gamma, \\ g''(x) &= 30\alpha A^2 x^{-7} + 6\beta A x^{-4}. \end{aligned}$$

Dobimo sistem:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ -5\alpha - 2\beta + \gamma &= 0, \\ 30\alpha + 6\beta &= 0. \end{aligned}$$

Iz tretje enačbe dobimo $\beta = -5\alpha$. Vstavimo v drugo in dobimo $\gamma = -5\alpha$. Nazadnje iz prve enačbe dobimo $-9\alpha = 1$. Torej je $\alpha = -\frac{1}{9}$, $\beta = \gamma = \frac{5}{9}$. Za $A = 5$ in $x_0 = 2$ dobimo $g(x_r) = \frac{25}{9x_r^5}\left(-1 + x_r^3 + \frac{x_r^6}{5}\right)$. Navedimo nekaj začetnih približkov: $x_1 \doteq 1.71875$, $x_2 \doteq 1.709976326$, $x_3 \doteq 1.709975947$. ■

Naloga 3.8 *Določi vse polinome četrte stopnje z vodilnim koeficientom* 1, *pri katerih se tangentna metoda veda takole:*

- *v bližini* α *ima linearno konvergenco,*
- *v bližini* $-\alpha$ *ima kubično konvergenco.*

Določi še preostale ničle polinoma in red konvergence v njihovi bližini.

Rešitev. Spomnimo se, da je v bližini enostavnega korena konvergenca vsaj kvadratična. Če je prvi odvod enak 0, je konvergenca kubična. V primeru večkratne ničle je konvergenca linearna. Iz tega ugotovimo, da je α vsaj dvakratna ničla in $-\alpha$ enostavna ničla. Polinom je oblike $p(x) = (x+\alpha)(x-\alpha)^2(x-d)$, kjer je d neznana ničla. Uporabimo formulo

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x)g^{(n-i)}(x).$$

Dobimo

$$p''(x) = 2(x-\alpha)^2 + 4(x-\alpha)(x-d) + 4(x+\alpha)(x-d) + (x-\alpha)(x+\alpha).$$

Če hočemo, da bo konvergenca kubična, mora veljati $p''(-\alpha) = 0$. Vstavimo $-\alpha$:

$$p''(-\alpha) = 2(-\alpha-\alpha)^2 + 4(-\alpha-\alpha)(-\alpha-d) + 0 + 0 = 8\alpha(\alpha+\alpha+d) = 0,$$

iz česar dobimo $d = -2\alpha$. Ničla -2α je enostavna, konvergenca je vsaj kvadratična. Izračunajmo še vrednost drugega odvoda v -2α:

$$p''(-2\alpha) = 2(-2\alpha-\alpha)^2 + 0 + 0 + (-2\alpha+\alpha)(-2\alpha-\alpha) = 30\alpha^2 \neq 0.$$

Konvergenca v -2α je kvadratična. ■

Newtonova metoda se uporablja za iskanje rešitev sistema $F(z) = 0$. Metoda je posplošitev tangentne metode. Označimo $\Delta z_r = z_{r+1} - z_r$. Recimo, da je z_{r+1} ničla. Velja

$$0 \doteq F(z_r) + J(z_r)(z_{r+1} - z_r),$$

kjer je J Jacobijeva matrika parcialnih odvodov reda 1. Dobimo

$$J(z_r)\Delta z_r = -F(z_r).$$

Pri vsakem koraku rešimo sistem in dobimo Δz_r,

Naloga 3.9 *Nastavi Newtonovo metodo za reševanje sistema:*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, \\ x^2 - y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Naredi en korak z začetnim približkom $x_0 = 1.5$, $y_0 = 1$.

Rešitev. Velja $F(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+y^2-4 \\ x^2-y^2-1 \end{bmatrix}$. Izračunajmo

$$JF = \begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}.$$

Na vsakem koraku rešimo:

$$\begin{bmatrix} 2x_r & 2y_r \\ 2x_r & -2y_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_r \\ \Delta y_r \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_r^2 + y_r^2 - 1 \\ x_r^2 - y_r^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo $x_{r+1} = x_r + \Delta x_r$ in $y_{r+1} = y_r + \Delta y_r$. To ponavljamo za $r = 0, 1, \ldots$

$$JF(1.5, 1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_r \\ \Delta y_r \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

in dobimo $\Delta x_0 = \frac{1}{12}$ ter $\Delta y_0 = 0.25$. Kar pomeni $x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 1.5 + \frac{1}{12} = \frac{19}{12}$ in $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. ■

Naloga 3.10 *Poišči ničle funkcije* $f(x) = x + 4 - e^{-x^2}$ *z Matlabom in Mathematico.*

Rešitev. Oglejte si priložene datoteke. ∎