Poglavje 5

Reševanje linearnih sistemov

Pogojenostno število matrike, $\text{cond}(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2$ nam pove kako občutljivo je reševanje sistema. Da lahko dobimo poljubno občutljive matrike v praksi, pokaže naslednja naloga.

Naloga 5.1 *Iščemo koeficiente polinoma* $p(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$, *ki na* $[0, 1]$ *aproksimira zvezno funkcijo* f *tako, da je napaka*

$$E = \int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx$$

minimalna. Torej mora veljati $\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$ *za* $i = 1, \ldots, n$, *kjer je*

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 2\int_0^1 (p(x) - f(x))x^{i-1}dx.$$

Definirajmo vektor

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \qquad in; \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$F_i = \int_0^1 f(x)x^{i-1}dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n a_jx^{j-1}x^{i-1}\right) dx = \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 x^{i+j-2}dx = \sum_{j=1}^n a_j \frac{1}{i+j-1}.$$

Dobimo sistem s Hilbertovo matriko H_n, $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. *Kar je sistem* $Ha = F$. *Primer za* $n = 5$ *je*

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Hilbertove matrike so primer zelo občutljivih matrik. Pogojenostno število H_5 *je recimo približno* $4.766 \cdot 10^5$, *kar lahko izračunamo z ukazom* `cond` *v Matlabu. Pogojenostna števila matrik* H_n *hitro rastejo.*

Izkaže se, da smo dobili občutljiv sistem, ker smo vzeli standardno bazo polinomov stopnje n. *Za stabilno računanje moramo vzeti ortogonalno bazo polinomov. Priložena je Matlabova skripta za aproksimacijo integrala funkcije* $f(x) = e^x$ *s parabolo.*

Naloga 5.2 *Oceni relativno neodstranljivo napako, ki nastane pri množenju vektorja x z A, če x spremenimo za δx. Matrika A je obrnljiva.*

Rešitev. Velja $y = Ax$ in $A(x + \delta x) = y + \delta y$. Zanima nas

$$\frac{||\delta y||}{||y||} = \frac{||A(x + \delta x) - Ax||}{||Ax||}.$$

Očitno velja $||\delta y|| \leq ||A||||\delta x||$ in $||x|| \leq ||A^{-1}||||y||$. Izračunamo

$$\frac{||\delta y||}{||y||} = \frac{||A\delta x|| \cdot ||x||}{||y|| \cdot ||x||}||x|| \leq \frac{||A|| \cdot ||\delta x|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||y||}{||y|| \cdot ||x||} = \underbrace{||A||||A^{-1}||}_{\text{cond}(A)} \frac{||\delta x||}{||x||}.$$

■

Naloga 5.3 *Izpelji aposteriorno oceno*

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \text{cond(A)}\frac{||r||}{||b||},$$

ki je uporabna za oceno točnosti rešitve.

Rešitev. Naj bo $\widetilde{x}$ rešitev, ki jo dobimo z numeričnim izračunom. Naj bo $\delta x = \widetilde{x} - x$ in $r = A\widetilde{x} - b$. Ocenimo

$$||\widetilde{x} - x|| = ||A^{-1}(A\widetilde{x} - b)|| = ||A^{-1}r|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||r||$$

in

$$||b|| = ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||.$$

Oceni združimo in dobimo željeno.

■

Izrek 5.1 *Naslednji trditvi sta ekvivalentni*

(i). Obstaja enolični razcep $A = LU$, kjer je L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali, U pa nesingularna zgornje trikotna matrika.

(ii). Vse vodilne podmatrike $A(1 : k, 1 : k)$ so nesingularne.

Algoritem 3: LU razcep brez pivotiranja

```
for j = 1, ..., n − 1 do
    for i = 1, ..., n do
        l_ij = a_ij / a_jj;
        for k = j + 1, ..., n do
            a_ik = a_ik − l_ij a_jk;
        end
    end
end
```

Število operacij je $\frac{2}{3}n^2 + O(n^2)$.

Izrek 5.2 *Če je A nesingularna, potem obstaja taka permutacijska matrika P, da obstaja LU razcep $PA = LU$.*

Algoritem 4: LU razcep z delnim pivotiranja

```
L = 0;
P = I;
for j = 1, ..., n − 1 do
    Poišči |a_qj| = max_{j≤p≤n} |a_pj|;
    Zamenjaj vrstici q in j v L, A in P;
    for i = j, ..., n do
        l_ij = a_ij / a_jj;
        for k = j + 1, ..., n do
            a_ik = a_ik − l_ij a_jk;
        end
    end
end
```

Število operacij je $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Naloga 5.4 *Z LU-razcepom brez pivotiranja reši sistem $Ax = b$, kjer je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} -11 \\ 38 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Zapiši matriki L, U in vektor y, ki ga dobiš pri računanju.

Rešitev.
Lotimo se Gaussove eliminacije:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = L.$$

Izračunamo lahko tudi v bolj kompaktni obliki. Zgornji trikotnik končne matrike vsebuje matriko U, spodnji trikotnik brez diagonale pa matriko L brez diagonale. Upoštevamo, da ima matrika L na diagonali enice.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix},$$

zgornji trikotnik je U, spodnji trikotnik brez diagonale je matrika L brez diagonale.
Rešimo sistem $Ax = b$, $L(Ux) = b$, $y = Ux$.

Algoritem 5: Prema substitucija, $Ly = b$, $n^2 - n$ operacij

```
for i = 1, 2, ..., n do
    y_i = b_i − Σ_{k=1}^{i−1} l_ik y_k;
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 38 \\ -16 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} y_1 &= -11 \\ y_2 &= 38 + 3 \cdot (-11) = 5 \\ y_3 &= -16 - 2 \cdot (-11) - 35 = -9 \end{aligned}$$

Algoritem 6: Obratna substitucija, $Ux = y$, n^2 operacij

for $i = n, n-1, \ldots, 1$ **do**
 $x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \right);$
end

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 &= \tfrac{-1}{2}(5-3) = -1 \\ x_1 &= \tfrac{1}{2}(-11 + 3 + 12) = 2 \end{aligned}.$$

Torej dobimo $x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$. ■

Naloga 5.5
- *Sestavi ekonomičen algoritem za izračun inverzne matrike spodnje trikotne matrike L z enicami po diagonali in preštej število operacij.*
- *Prilagodi algoritem iz prve točke, tako da boš lahko izračunal inverz zgornje trikotne matrike U. Preštej še število operacij.*
- *S pomočjo prejšnjih dveh točk, sestavi učinkovit algoritem za izračun inverza matrike A, če imaš podan njen LU razcep. Kakšno je število operacije?*

Rešitev.

- Iz pravila za izračun inverza vidimo, da je inverzna matrika zopet spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali. Rešujemo sistem $LY = I$, Y je oblike $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$. Dobimo več podproblemov oblike

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ * & \ddots & & & \\ l_{j,1} & l_{j,2} \cdots l_{j,j-1} & 1 & & \\ lj+1,1 & l_{j+1,2} \cdots l_{j+1,j} & & \ddots & \\ * & * & * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ y_{j,j} \\ \vdots \\ y_{n,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = e_j.$$

Vemo, da je $y_{j,j} = 1$. Za $i > j$ dobimo

$$l_{i,j} y_{j,j} + l_{i,j+1} y_{j+1,j} + \cdots l_{i,i-1} y_{i-1,j} + l_{i,i} y_{i,j} = 0,$$

kar nam da $y_{ij} = -\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} y_{kj}$. Vseh operacij je

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j+1}^{n} 2(i-j) = 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{(n-j)(n-j+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k)$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3}{3} + O(n^2).$$

for $j = 1, \ldots, n$ **do**
  $y_{j,j} = 1$;
  for $i = j+1, \ldots, n$ **do**
    $y_{i,j} = -\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} y_{kj}$;
  end
end

for $j = 1, \ldots, n$ *($UY_j = e_j$)* **do**
  $y_{jj} = 1/u_{jj}$;
  for $i = j-1, \ldots, 1$ **do**
    $y_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(- \sum_{k=j-1}^{i} u_{ik} y_{kj} \right)$;
  end
end

- Uporabimo idejo obratne substitucije in resujemo podobno kot pri prvi tocki.

  Algoritem 7: Obratna substitucija, $Ux = y$

  for $i = n, n-1, \ldots, 1$ **do**
    $x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \right)$;
  end

  Število operacij je spet $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, v resnici imamo samo $O(n^2)$ deljenj več.

- Upoštevajmo še, da velja
$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}.$$
  Ugotovimo moramo še kakšna je zahtevnost množenja spodnje in zgornje trikotne matrike.
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j + (n-i)i = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)/2 + ni - i^2 = \frac{2n^3}{3} + O(n^2).$$
  V resnici bi bilo bolje (bolj stabilno), če bi zadnji dve točki naredli hkrati, tako da bi rešili sistem $UX = L^{-1}$ in direktno izračunali $U^{-1}L^{-1}$. Skupno število operacij ostane $2n^3 + O(n^2)$.

∎

Naloga 5.6 *Sestavi učinkovit algoritem za reševanje sistema linearnih enačb*
$$\begin{bmatrix} U & -I \\ B & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$
Matrika $B = LU$ je nesingularna matrika in ima podan LU razcep. Preštej število množenj in deljenj.

Rešitev. Zmnožimo po blokih in dobimo

$$\begin{aligned} Ux - y &= a \\ L(Ux + y) &= b. \end{aligned}$$

Rešimo drugi sistem in dobimo vektor $z = Ux + y$, kar nas stane $n^2 + O(n)$ operacij. Označimo še $w = Ux - y$ in izrazimo $y = \frac{1}{2}(z - w) = \frac{1}{2}(z - a)$. Za izračun y porabimo $O(n)$ operacij. Na koncu rešimo še sistem $Ux = a + y$, za kar porabimo $n^2 + O(n)$ operacij. Skupaj smo porabili $2n^2 + O(n)$ operacij. ∎

Naloga 5.7 *Za matriko*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

naredi:

(i). LU razcep z delnim pivotiranjem,

(ii). LU razcep s kompletnim pivotiranjem.

Rešitev. (i)Algoritem poteka takole. V stolpcu i poiščemo največji element, izmed a_{ji}, $j \geq i$ po absolutni vrednostni. Vrstico največjega elementa in i-to vrstico zamenjamo v L, A in P. Normalno nadaljujemo z Gaussovo eliminacijo. Na koncu velja $PA = LU$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \underline{6} & 1 & 7 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1/2} & -5/2 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightrightarrows \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

(ii)Algoritem poteka takole. V podmatriki $A(i:n, i:n)$ poiščemo največji element po absolutni vrednostni, recimo da je to a_{kl}. Da ta element spravimo na mesto (i, i) zamenjamo i-to vrstico in k-to vrstico ter i-ti stolpec in k-ti stolpec. To naredimo tudi za matriko L. V P menjamo samo vrstice, v Q pa samo stolpce. Normalno nadaljujemo z Gaussovo eliminacijo. Na koncu velja $PAQ = LU$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & \underline{7} \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3, 1\leftrightarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \underline{\frac{15}{7}} \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3, 2\leftrightarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & \frac{15}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & \frac{15}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3, 1\leftrightarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3, 2\leftrightarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & -2/5 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{1\leftrightarrow 3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\leftrightarrow 3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

■

Naloga 5.8 *Sestavi ekonomičen (čim manj operacij) algoritem za računanje tridiagonalnega sistema preko LU razcepa brez pivotiranja.*

Rešitev. Matrika A je oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & b_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix},$$

torej bosta matriki L in U oblike

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \text{ in } U = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}.$$

Zmnožek L in U je oblike

$$LU = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ l_2u_1 & l_2v_1 + u_2 & v_2 & & \\ & l_3u_2 & l_3v_2 + u_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & v_{n-1} \\ & & & l_nu_{n-1} & l_nv_{n-1} \end{bmatrix},$$

iz česar dobimo $v_i = c_i$, $l_{i+1}u_i = b_{i+1}$ in $l_{i+1}v_i + u_{i+1} = a_i$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Poleg tega velja še $u_1 = a_1$.

$u_1 = a_1$;
$v_1 = c_1$;
for $i = 2, \ldots, n$ **do**
  $v_i = c_i$;
  $l_i = \frac{b_i}{u_{i-1}}$;
  $u_i = a_i - v_{i-1}l_i$;
end

Število operacij je $\sum_{i=2}^{n} 3 = 3(n-1) = 3n-3$, kar je veliko bolje kot $2/3n^2 + O(n^2)$. Iz $L(Ux) = d$, $y = Ux$ dobimo $Ly = d$, kar je

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

To da $y_1 = d_1$ in $y_{i-1}l_i + y_i = d_i$. Dobimo algoritem

---

$y_1 = d_1$;
for $i = 2, \ldots, n$ **do**
  $y_i = d_i - y_{i-1}l_i$;
end

Število operacij $\sum_{i=2}^{n} 2 = 2n-2$. Podobno za $Ux = y$ dobimo

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Dobimo $u_i x_i + v_i x_{i+1} = y_i$ ter $u_n x_n = y_n$.
Za to porabimo $1 + \sum_{i=1}^{n-1} = 3(n-1) + 1 = 3n-2$ operacij. Vse skupaj porabimo $3n - 3 + 2n -$

$x_n = \frac{y_n}{u_n}$;
for $i = n-1, \ldots, 1$ **do**
  $x_i = \frac{y_i - v_i x_{i+1}}{u_i}$;
end

$2 + 3n - 2 = 8n - 7$ operacij. Ali lahko kaj podobnega naredimo tudi z delnim pivotiranjem? ■

Naloga 5.9 *Dana je nesingularna matrika A in vektorja x in b_1, da velja $Ax = b_1$ ter njen LU razcep. Zapiši algoritem za reševanje sistema $Bx = b$, kjer je*

$$B = \begin{bmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} in x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

kjer je $u, v \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$. Koliko operacij porabiš za reševanje razširjenega sistema?

Rešitev. Zmnožimo sistem po blokih,

$$\begin{bmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 + ux_2 \\ v^T x_1 + \alpha x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Iz prve enačbe dobimo $Ax_1 + ux_2 = b_1$, oziroma $x_1 + yx_2 = x$, kjer je y rešitev sistema $Ay = u$. Za reševanje sistem porabimo $2n^2 + O(n)$ operacij. Drugo enačba je $v^T x_1 + \alpha x_2 = b_2$. Prvo enačbo pomnožimo z v^T in dobimo $v^T x_1 + v^T y x_2 = v^T x$, le to odštejemo od druge enačbe in dobimo $x_2(\alpha - v^T y) = b_2 - v^T x$. Od tukaj izrazimo $x_2 = (b_2 - v^T x)/(\alpha - v^T y)$. Za izračun $v^T x$ in $v^T y$ porabimo $4n-2$ operacij, dodati moramo še dve odštevanji in eno deljenje, skupaj dobimo $4n-1$ operacij. Nato iz prve enačbe izrazimo še $x_1 = x - y x_2$, za kar porabimo $2n$ operacij. Vse skupaj smo porabili $2n^2 + 6n - 1 = 2n^2 + O(n)$ operacij.

■

Naloga 5.10 *Poišči razcep Choleskega za matriko*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & 14 & -11 \\ 3 & 8 & -11 & 15 \end{bmatrix}.$$

Kaj to pomeni za matriko A?

Rešitev.

Algoritem 8: Razcep Choleskega – $A = V \cdot V^T,\ V = ?$

for $k = 1, \dots, n$ **do**
- $v_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2}$;
- **for** $j = k+1, \dots, n$ **do**
  - $v_{jk} = \frac{1}{v_{kk}} \left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji} \cdot v_{ki} \right)$;
- **end**

end

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & 14 & -11 \\ 3 & 8 & -11 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{1} = 1 \\ 2/1 \\ -2/1 \\ 3/1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{8 - 2^2} = 2 \\ -2 & 1/2(-2 - (-2 \cdot 2)) \\ 3 & 1/2(8 - (3 \cdot 2)) \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & \sqrt{14 - (-2)^2 - 1^2} = 3 \\ 3 & 1 & 1/3(-11 - (3 \cdot -2 + 1 \cdot 1)) \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & \sqrt{15 - (3^2 + 1^2 + (-2)^2)} = 3 \end{bmatrix} = V.$$

Matrika A je simetrična in pozitivno definitna, saj se je razcep Choleskega izvedel. ■