

## 2. PISNI IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD 2

### Finančna matematika

1. julij 2010

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Dan je Schurov razcep matrike  $A = QRQ^T$ :

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Iz Schurove forme izračunajte lastna vektorja, ki pripadata največji in najmanjši lastni vrednosti. Kam konvergira potenčna metoda?

2. Dana je funkcija  $f(x) = e^{-2x}$ .

(a) Preko deljenih diferenc poiščite interpolacijski polinom, za katerega velja

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad p''(0) = f''(0), \quad p(1) = f(1).$$

Izračunajte vrednost polinoma v  $x = \frac{1}{2}$ .

(b) Čim bolj natančno ocenite napako  $\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)|$ .

3. Določite neznane koeficiente  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  in  $\alpha_2$  v integracijskem pravilu

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R(f),$$

kjer so  $x_i$  ekvidistantne točke, tako da bo red pravila čim višji. Določite tudi napako  $R(f)$  za dovolj gladko funkcijo  $f$ .

4. Z Runge-Kutta metodo

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

numerično rešujemo diferencialno enačbo  $y' = \lambda y$ ,  $y(0) = y_0$ . Zapišite splošno formulo za  $y_n$  (izrazite  $y_n$  z  $y_0$ ,  $h$  in  $n$ ). Kateri neenačbi mora zadoščati korak  $h$ , da bo pri  $\lambda = -2$  numerična rešitev  $y_n$  konvergirala proti pravi rešitvi, ko gre  $x \rightarrow \infty$ . Utemeljite!

Veliko uspeha pri reševanju!