

1. PISNI IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD 2

Finančna matematika

11. junij 2010

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 15 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 20 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 40 \end{bmatrix}.$$

- (a) Čim bolj natančno določite območja, v katerih se nahajajo lastne vrednosti matrike A . Upoštevajte, da imata matriki A in A^T enake lastne vrednosti. Območja tudi narišite.
- (b) Ocene lahko izboljšamo, če gledamo podobno matriko QAQ^{-1} . Poiščite optimalno matriko oblike $Q = \text{diag}(1, 1, 1, k)$, pri kateri dobite najboljše ocene za največjo lastno vrednost.

2. Naj bo $f(x) = \frac{1}{1+x}$ in naj bo $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$ delitev intervala $[0, 1]$. Iščemo interpolacijski kubični zlepek P , za katerega velja $P|_{[x_i, x_{i+1}]} = P_i \in \mathbb{P}_3$ in

$$P_i(x_i) = f(x_i), \quad P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad P'_i(x_i) = s_i, \quad P'_i(x_{i+1}) = s_{i+1}, \quad i = 0, 1.$$

Naj bo $s_0 = f'(x_0)$ in $s_2 = f'(x_2)$. Določite vrednost s_1 tako, da bo zlepek dvakrat zvezno odvedljiv. Zlepek tudi izračunajte.

3. Določite vozla x_0 in x_1 ter uteži α_0 in α_1 v Gaussovi integracijski formuli

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-|x|} dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + R(f),$$

tako da bo red pravila čim večji. Določite tudi napako $R(f)$.

Pomoč: $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Diferencialno enačbo

$$y' = x^2 + 2y, \quad y(0) = 1,$$

rešujemo z Runge-Kutta metodo

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2.$$

Za korak vzemite $h = \frac{1}{10}$ in izračunajte približka y_1 in y_2 za $y(h), y(2h)$.

Veliko uspeha pri reševanju!