NUMERIČNE METODE 2

1. izpit

13.6.2011

1. Podana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Poiščite lastne vrednosti matrike A. Ali potenčna metoda konvergira za začetni vektor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$? Kaj pa za začetni vektor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T/2$? Če metoda konvergira, ugotovite še h kateri lastni vrednosti.

2. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \sin(\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon) & 1 \end{bmatrix}.$$
Poiščite ocene za lastne vrednosti s pomočjo Gerschgorinovega izreka. Dokaži, da za najmanjšo lastno vrednost velja še močnejša ocena. Uporabi Gerschgorinov izrek za podobno matriko DAD^{-1}, kjer je D primerna diagonalna matrika, ki ima samo en diagonalni element različen od 1.

3. Dane naj bodo ekvidistantne točke $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2$ in gladka funkcija f. Naj bo p tak interpolacijski polinom, ki se z f dvojno ujema v točkah x_0 in x_2 ter enojno v točki x_1. Zapišite interpolacijski polinom za $f(x) = \sin(\pi * x)$, kjer je $x_0 = 0$ in $h = 0.5$. V splošnem izpeljite oceno:
$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{2\sqrt{5}h^5}{1875} \|f^{(5)}\|_\infty, \quad x \in [x_0, x_2].$$

4. Integral
$$\int_0^1 f(x)\,dx$$
želimo čim bolj natančno izračunati samo s pomočjo dveh funkcijskih vrednosti $f(x_1)$ in $f(x_2)$. Določite točki x_1 in x_2 ter koeficienta α_1 in α_2 tako, da bo pravilo
$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$
natančno za polinome čim višjih stopenj. Primerjajte natančnosti dobljenega in trapeznega pravila na primeru $\int_0^1 \sin x\,dx$.