NUMERIČNE METODE 2

2. izpit

30.6.2011

1. Rešite Sylvestrovo enačbo $AX - XB = C$, kjer je $A = QRQ^T$ in Q ortogonalna matrika,
$$A = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25 & -25 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 49 & 41 \end{bmatrix}.$$

2. Naj bo A poševno Hermitska matrika, $A^H = -A$, pokaži da so vse njene lastne vrednosti strogo imaginarne ($i\lambda$). Potem pokaži še, da velja:
   (a) Matrika $I - A$ je nesingularna.
   (b) Matrika $B = (I - A)^{-1}(I + A)$ je unitarna.

   Namig: Kakšna je matrika iA?

3. Naj bo $g(t)$ zvezna funkcija definirana na intervalu $[-1, 1]$. Najprej poišči interpolacijski polinom $p_2(t)$ za $g(t)$ na točkah $-1, 0, 1$. Izpelji Simpsonovo pravilo za integral $\int_{-1}^{1} g(t)dt$, tako da integriraš interpolacijski polinom $p_2(t)$. Pokaži še, da je napaka $r_2(t) = g(t) - p_2(t)$ enaka $-\frac{1}{90}g^{(4)}\eta$, kjer je $\eta \in [-1, 1]$.

4. Podana je Runge-Kutta metoda
$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

   Rešujemo problem $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$. Zapiši eksplicitno formulo za y_n. Zapiši omejitev za h, da se bo pri $\lambda = -4$ rešitev y_n obnašala kot prava rešitev, ko gre $n \to \infty$.