Izpit iz Numeričnih metod 2 za Finančne matematike

28. 6. 2013

1. V prostoru 2×2 matrik lahko definiramo skalarni produkt s formulo

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{sled}(A^T B),$$

kjer je $\mathrm{sled}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$. Poišči element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov za matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

v podprostoru $\mathcal{S}$ simetričnih matrik s sledjo enako 0

$$\mathcal{S} = \{A; \quad A^T = A \text{ in } \mathrm{sled}(A) = 0\}.$$

Rešitev: Matrike iz množice $\mathcal{S}$ lahko zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

kar pomeni, da matriki

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sestavljata bazo podprostora $\mathcal{S}$. Element najboljše aproksimacije dobimo kot linearno kombinacijo baznih elementov (1). Koeficienta a in b sta rešitev linearnega sistema z Gramovo matriko

$$G = \begin{bmatrix} \langle s_1, s_1\rangle & \langle s_1, s_2\rangle \\ \langle s_2, s_1\rangle & \langle s_2, s_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

in desnimi stranmi

$$\begin{bmatrix} \langle x, s_1\rangle \\ \langle x, s_1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

in sta enaka $a = -\frac{1}{2}$ in $b = \frac{5}{2}$. Element najboljše aproksimacije je enak

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Integralski sinus $\mathrm{si}(x)$ je dan s formulo

$$\mathrm{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

Nekatere vrednosti $\mathrm{si}(x)$ so zbrane v tabeli

x	1	1.1	1.2	1.3
$\mathrm{si}(x)$	0.94608	1.02869	1.10805	1.18396

(a) Vrednosti v tabeli interpoliraj z linearnim zlepkom in poišči x_0, za katerega je $\mathrm{si}(x_0) = 1$.

(b) Izračunaj $\mathrm{si}(x_0)$ za približek iz prejšnje točke s Simpsonovim pravilom z $m = 1$ in $m = 2$ koraki. Oceni, za koliko se lahko $\mathrm{si}(x_0)$ največ razlikuje od 1.

(c) *(Dodatek 3 točke)* Približek iz točke (a) izboljšaj z enim korakom Newtonove metode in zopet preveri, za koliko se vrednost si razlikuje od 1.

Rešitev:

(a) Iskani x_0 leži na intervalu $(1, 1.1)$, kjer je linearni zlepek preprosto premica skozi točki $(1, \mathrm{si}(1))$ in $(1.1, \mathrm{si}(1.1))$

$$y = 0.82610x + 0.11998.$$

Iskani x_0 je rešitev enačbe

$$1 = 0.82610x_0 + 0.11998$$

in je enak $x_0 = 1.0653$.

(b) Vrednost $\mathrm{si}(x_0)$ po definiciji, pri čemer si pomagamo z vrednostjo $\mathrm{si}(1)$

$$\begin{aligned}\mathrm{si}(1.0653) = \mathrm{si}(1) + &\int_1^{1.0653} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \\ &\approxeq 0.94608 + \frac{0.0653}{6}\left(\sin(1) + 4\frac{\sin(1.0326)}{1.0326} + \frac{\sin(1.0653)}{1.0653}\right) \\ &= 1.0004\end{aligned}$$

Podobno izračunamo še za $m = 2$

$$\int_1^{1.0653} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \approxeq$$
$$\frac{0.0653}{12}\left(\sin(1) + 4\frac{\sin(1.0163)}{1.0163} + 2\frac{\sin(1.0362)}{1.0362} + 4\frac{\sin(1.0490)}{1.0490} + \frac{\sin(1.0653)}{1.0653}\right) = 0.054295$$

Napako pri računanju integrala ocenimo s pomočjo Richardsonove ekstrapolacije

$$R = \frac{I_2 - I_1}{15} \approxeq -3 \cdot 10^{-12},$$

kar pomeni, da se $\mathrm{si}(x_0)$ razlikuje od 1 za največ 0.0004.

koda v octave za Simpsonovo pravilo

```
f = @(t) sin(t)./t;
a = 1; b = 1.0653;
t = linspace(a,b,3);
I1 = (b-a)/6*[1 4 1]*f(t')
t = linspace(a,b,5);
I2 = (b-a)/12*[1 4 2 4 1]*f(t')
R =(I2-I1)/15
```

(c) Izboljšan približek dobimo s formulo

$$x_1 = x_0 - \frac{\mathrm{si}(x_0) - 1}{\mathrm{si}'(x_0)} = 1.0653 - \frac{3.7499 \cdot 10^{-04}}{\sin(1.0653)} 1.0653 = 1.0648$$

Vrednost $\mathrm{si}(x_1)$ zopet poiščemo z Simpsonovim pravilom za $m = 1$

$$\mathrm{si}(x_1) \approxeq 1 - 3 \cdot 10^{-8}.$$

3. Iščemo rešitev začetnega problema za NDE

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{2}$$

z začetnimi pogoji $y(1) = 0$ in $y'(1) = 1$.

(a) Enačbo (2) zapiši v obliki sistema dveh enačb 1. reda.

(b) Poišči $y(1.1)$ z metodo Runge-Kutta s tabelo

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

in korakom $h = 0.1$.

(c) Izračunaj absolutno in relativno napako (točno rešitev dobiš z nastavkom $y = x^m$).

Rešitev:

(a) Enačbo zapišemo v obliki sistema, tako da vpeljemo novo spremenljivko $z = y'$. Enačba (2) se tako glasi

$$x^2 z' - 2xz + 2y = 0.$$

Če ji dodamo še enačbo za y' in izrazimo odvode, dobimo sistem 2 enačb z 2 neznankama

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= 2\frac{z}{x} - 2\frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

(b) Formule za RK s dano tabelo se glasijo

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, Y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h, Y_n + k_1) \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \end{aligned}$$

kjer je $Y = [y, z]^T$ vektor, katerega komponente sta neznani funkciji, desna stran DE, pa je dana z

$$f(x, Y) = \begin{bmatrix} z \\ 2\frac{z}{x} - 2\frac{y}{x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x} \end{bmatrix} Y.$$

Če vstavimo začetne pogoje $y(1) = 0, z(1) = 1$ oziroma $Y(1) = [0, 1]^T$ in korak $h = 0.1$, dobimo

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \\ k_2 &= 0.1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{1.1^2} & \frac{2}{1.1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.20165 \end{bmatrix} \\ Y_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.20165 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.11 \\ 1.2008 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Približek za $y(1.1) = 0.11$.

(c) Če nastavek $y = x^m$ vstavimo v enačbo (2), dobimo

$$\begin{aligned} x^2 m(m-1)x^{m-2} - 2xmx^{m-1} + 2x^m &= 0 \\ m(m-1) - 2m + 2 &= 0 \\ m^2 - 3m + 2 &= 0 \end{aligned}$$

kar pomeni, da mora biti m rešitev kvadratne enačbe, torej enak $m_1 = 1$ ali $m_2 = 2$. Splošno rešitev dobimo kot linearno kombinacijo

$$y = A \cdot x + B \cdot x^2,$$

rešitev začetnega problema pa iz sistema enačb

$$\begin{aligned} y(1) = 0 &= A + B \\ y'(1) = 1 &= A + 2B, \end{aligned}$$

torej $A = -1$ in $B = 1$, kar pomeni, da je

$$y = x^2 - x.$$

Tako absolutna kot tudi relativna napaka v $y(1.1)$ sta enaki 0.

4. Naj bosta

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

faktorja v realni Schurovi formi matrike $A = QRQ^T$.

(a) Poišči vse lastne vrednosti matrike in realne lastne vektorje za vsako od realnih lastnih vrednosti matrike A.

(b) Kam potenčna metoda konvergira, če konvergira?

Rešitev:

(a) Matriki A in R imata iste lastne vrednosti, zato poiščemo lastne vrednosti R. Realne lastne vrednosti so kar enake diagonalnim elementom 2 in -3, kompleknse lastne vrednosti, pa so lastne vrednosti 2×2 bloka na diagonali

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

ki jih dobimo kot rešitve karakteristične enačbe

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

Lastne vektorje matrike A za $\lambda = 2, -3$ izračunamo iz lastnih vektorjev za matriko R. Če je v lastni vektor R, je Qv lastni vektor A

$$\begin{aligned} Rv &= \lambda v \\ RQ^T Qv &= \lambda v \\ QRQ^T Qv &= \lambda Qv \\ AQv &= \lambda Qv. \end{aligned}$$

Lastne vektorje poiščemo v jedru matrike $R - \lambda I$. Za $\lambda = 2$ je

$$R - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

in jedro je razpeto na vektor $e_1 = [1, 0, 0, 0]^T$. Lastni vektor za A je torej enak

$$Qe_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

prvemu stolpcu matrike Q. Lastni vektor R za $\lambda = -3$ leži v jedru

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

ki je razpeto na $e_2 = [0, 1, 0, 0]^T$. Tako je lastni vektor za A enak drugemu stolpcu matrike Q

$$Qe_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Ker so kompleksne lastne vrednosti po absolutni vrednosti manjše od 3, potenčna metoda konvergira k enotskemu lastnemu vektorju za $\lambda = -3$.