Izpit iz Numeričnih metod 2 za Finančne matematike

27. 5. 2013

1. Poiščite premico $p_1 \in \mathbb{P}_1$ najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

na intervalu $[0, 1]$. Kolikšna je napaka

$$||p_1 - f||_{\infty,[0,1]}?$$

Rešitev: Premico poiščemo z Remezovim postopkom. Najprej izberemo 3 točke na intervalu $[0, 1]$. Recimo $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ in $x_2 = 1$ in poiščemo premico $p(x) = ax + b$, ki zadošča enačbam

$$\begin{aligned} f(x_i) - p(x_i) &= (-1)^i m \text{ oziroma} \\ p(x_i) + (-1)^i m &= f(x_i) \end{aligned} \tag{1}$$

Dobimo linearen sistem

$$\begin{aligned} b + m &= 1 \\ \frac{1}{2}a + b - m &= \frac{2}{3} \\ a + b + m &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

katerega rešitev je $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{23}{24}$ in $m = \frac{1}{24}$. Poiščemo maksimum absolutne vrednosti razlike

$$r(x) = f(x) - p(x),$$

tako da poiščemo ničlo odvoda

$$\begin{aligned} r'(x) &= f'(x) - a = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} = 0 \\ (x+1)^2 &= 2 \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

in izberemo $x_2 = \sqrt{2} - 1$ v katerem ima funkcija $r(x)$ globalni minimum $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{23}{24} = -\frac{23}{24}$. V naboru točk $\{x_0, x_1, x_2\}$ nadomestimo x_1 z $\sqrt{2} - 1$. Ponovno rešimo sistem (1)

$$\begin{aligned} b + m &= 1 \\ (\sqrt{2} - 1)a + b - m &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a + b + m &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

in dobimo rešitev $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}$ in $m = \frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Preverimo, kako je z ekstremi razlike $r(x) = f(x) - p(x)$ in dobimo isto enačbo za odvod, saj se a ni spremenil

$$r'(x) = f'(x) - a = 0.$$

Ekstremi $r(x)$ so v točkah x_0, x_1, x_2 in zato je $p(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}$ premica najboljše enakomerne aproksimacije funkcije f. Norma

$$||f - p||_{\infty,[0,1]} = m = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Za funkcijo

$$g(x) = \frac{6x}{3+x}$$

poiščite kubični polinom p_3, ki zadošča pogojem $p_3(i) = g(i)$ za $i = -1, 0, 1$ in $p'(0) = g'(0)$. Čim bolj natančno ocenite

$$||p_3 - g||_{\infty,[-1,1]}.$$

Rešitev: Polinom p_3 dobimo najhitreje s tabelo deljenih diferenc

x	$g(x)$			
-1	-3	3	-1	$\frac{1}{4}$
0	0	$g'(0) = 2$	$-\frac{1}{2}$	
0	0	$\frac{3}{2}$		
1	$\frac{3}{2}$			

Koeficiente v razvoju po bazi $\{1, x+1, x(x+1), x^2(x+1)\}$ razberemo iz prve vrstice

$$p_3(x) = -3 + 3(x+1) - x(x+1) + \frac{1}{4}x^2(x+1).$$

deljene diference v Octave

```
g = @(x) 6*x./(3+x);
dg = @(x) 18./(3+x).^2; % odvod
x=[-1;0;0;1];
p = g(x');
p(2:end) = p(2:end) - p(1:end-1);
p(3) = dg(0); % odvod g'(0)
p(3:end) = p(3:end) - p(2:end-1);
p(4) = (p(4) - p(3))/2
```

Napako ocenimo s formulo

$$\begin{aligned} |R(x)| &= |\frac{\omega(x)}{4!} g^{(4)}(\xi)| \leq \frac{1}{24}|\omega|_{\infty,[-1,-1]}|g^{(4)}|_{\infty,[-1,1]} \\ |R(x)| &\leq \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{4}\cdot 6 = \frac{1}{2^5} = 3.125\cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Oceno za $|\omega(x)|$ dobimo tako, da poiščemo maksimum absolutne vrednosti. Odvod izenačimo z 0

$$0 = \omega'(x) = \left(x^2(x^2-1)\right)' = 2x\left(2x^2-1\right)$$

in dobimo, da je ekstremna vrednost dosežena v $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ in je enaka $\frac{1}{4}$. Odvod $g^{(4)}$ je naraščajoča funkcija, zato je ekstrem absolutne vrednosti dosežen v levem krajišču -1. Vrednost odvoda lahko poiščemo npr. z razvojem v Taylorjevo vrsto fukcije g okrog -1

$$g(x) = 6 - \frac{4}{1+\frac{x+1}{2}} = 6 - 4\left(1 - \frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(x+1)^3}{8} + \frac{(x+1)^4}{16} + \ldots\right)$$

Vrednost $g^{(4)}(-1) = -6$ dobimo iz enačbe

$$-\frac{1}{4}(x+1)^4 = \frac{1}{24}g^{(4)}(-1)(x+1)^4.$$

Lahko pa jo tudi izračunamo direktno z odvajanjem $g^{(4)}(x) = -\frac{18\cdot 4!}{(3+x)^5}$.

3. Izpeljite odprto Newton-Cotesovo formulo za računanje integrala

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x = Af(x_1) + Bf(x_2) + Cf(x_3) + R(f).$$

Določite tudi napako $R(f)$.

Rešitev: Uporabimo lahko metodo nedoločenih koeficientov ali pa Lagrangeve interpolacijske polinome. Z metodo nedoločenih koeficientov z vstavljanjem baznih polinomiv $\{1, x-x_0, (x-x_0)^2\}$ dobimo sistem enačb za $A, B,$ in C

$$\begin{aligned} 4h &= A + B + C \\ 8h^2 &= hA + 2hB + 3hC \\ \frac{4^3}{3}h^3 &= h^2A + 4h^2B + 9h^2C, \end{aligned}$$

ki ga lahko predstavimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 4h \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{16}{3} \end{bmatrix}.$$

Rešitev poiščemo z eliminacijo in je $A = \frac{8}{3}h$,$B = -\frac{4}{3}h$ in $C = \frac{8}{3}h$. Napako dobimo tako, da v formulo vstavimo $p_4(x) = (x - x_0)^4$

$$\begin{aligned} \frac{4^5}{5}h^4 &= \frac{8}{3}h^5 - \frac{4}{3}2^4h^5 + \frac{8}{3}3^4h^5 + R(p_4) \\ R(p_4) &= \left(\frac{4^5}{5} - \frac{8}{3}(1 - 8 + 81)\right)h^5 \\ R(p_4) &= \tfrac{16}{15} \quad (3 \cdot 64 - 37 \cdot 5)\, h^5 = \frac{112}{15}h^5. \end{aligned}$$

Za poljuben f je $R(f)$ oblike $\frac{1}{4!}Cf^{(4)}(\xi)h^5$, kjer C izračunamo iz $R(p_4)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4!}C \cdot p_4'(\xi)h^5 &= Ch^5 = \frac{112}{15}h^5 \\ C &= \frac{112}{15}. \end{aligned}$$

4. Za implicitno večkoračno metodo

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{5}{12}f(x_n, y_n) + \frac{2}{3}f(x_{n-1}, y_{n-1}) - \frac{1}{12}f(x_{n-2}, y_{n-2})\right) \tag{2}$$

zapišite oba rodovna polinoma. Poiščite približek za začetni problem

$$y' = x - y; \quad y(0) = 1,$$

v $x = 0.2$ s korakom $h = 0.1$. Mankajoči približek za $y(0.1)$ izračunajte z enim korakom metode Runge-Kutta

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \end{aligned}$$

Rešitev: Rodovne polinome dobimo iz koeficientov v večkoračni formuli $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1$ in $\beta_0 = \frac{5}{12}, \beta_1 = \frac{2}{3}, \beta_2 = -\frac{1}{12}$. Rodovni polinomi so

$$\begin{aligned} \rho &= -x^2 + x^1 \\ \sigma &= \frac{1}{12}\left(5x^2 + 8x - 1\right). \end{aligned}$$

Za izračun $y(0.2)$ potrebujemo še ne približek z RK metodo

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.1(0 - 1) = -0.1 \\ k_2 &= 0.1(0.05 - (1 - 0.05)) = -0.9 \\ k_3 &= 0.1(0.05 - (1 - 0.045)) = -0.0905 \\ k_4 &= 0.1(0.1 - (1 - 0.0905)) = -0.08095 \\ y_1 &= 0.90968 \end{aligned}$$

korak RK4 v octave

```
h=0.1;  y0=1;  x0=0;
k1 = h*(x0-y0)
k2 = h*(x0+h/2-(y0+k1/2))
k3 = h*(x0+h/2-(y0+k2/2))
k4 = h*(x0+h-(y0+k3))
y1 = y0 +(k1+2*(k2+k3)+k4)/6
```

Sedaj lahko uporabimo formulo (2)

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + h\left(\frac{5}{12}f(x_2,y_2) + \frac{2}{3}f(x_1,y_1) - \frac{1}{12}f(x_0,y_0)\right) \\
y_2 &= 0.90968 + 0.1\left(\frac{5}{12}(0.2-y_2) + \frac{2}{3}(0.1-0.90968) - \frac{1}{12}(0-1)\right) \\
y_2 &= -\frac{1}{24}y_2 + 0.85570,
\end{aligned}
$$

iz katere lahko eksplicitno izračunamo $y_2 = \frac{0.85570}{(1+\frac{1}{24})} = 0.821472$.