NUMERIČNE METODE 2

3. izpit

9. 9. 2011

1. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0.87659 & 2 \cdot 10^{-5} & -10^{-5} \\ 2 \cdot 10^{-5} & 0.54321 & 3 \cdot 10^{-5} \\ -10^{-5} & 3 \cdot 10^{-5} & 0.54169 \end{bmatrix}.$$
S pomočjo Gerschgorinovih izrekov dobi čim boljšo oceno za napako približka 0.87659 za lastno vrednost. Nasvet: Pomagaj si z matriko DAD^{-1}, kjer je $D = \mathrm{diag}(d, 1, 1)$.

2. Naj bo A taka zgornja bidiagonalna matrika, da ima večkratno singularno vrednost. Pokaži, da mora biti potem vsaj eden izmed elementov na diagonali ali superdiagonali enak 0.

3. Določi konstante A, B in x_1 tako, da bo kvadraturna formula
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A\,[f(-1) + f(1)] + B\,[f(-x_1) + f(x_1)] + R(f)$$
točna za polinome čim večje stopnje. Za izračunane konstante izračunaj napako $R(f)$. Kvadraturno formulo preizkusi na funkciji $f(x) = e^x$ in primerjaj napako.

4. Diferencialno enačbo
$$y' = -ay, \quad y(0) = y_0 \neq 0,$$
rešujemo z modificirano Eulerjevo metodo
$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2. \end{aligned}$$
Določi splošno formulo za y_n in glede na različne vrednosti a določi vrednosti za h, pri katerih y_n konvergira proti pravi rešitvi, ko gre $n \to \infty$.