Poglavje 1

Lastne vrednosti in vektorji

Naloga 1.1 *Gerschgorinov izrek.*
Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *in* $C_i = \{z \in \mathbb{C}_i, \quad |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}$ *krog v kompleksni ravnini, za* $i = 1, \dots, n.$. *Vse lastne vrednosti matrike* A *ležijo v uniji krogov* $\cup_{i=1}^{n} C_i$.

Rešitev. Naj bo x lastni vektor in λ pripadajoča lastna vrednost. Poglejmo si enakost po vrsticah.

$$A(i,:)x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i.$$

Kar je ekvivalentno

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j = (\lambda - a_{ii})x_i.$$

Uporabimo absolutno vrednost in ocenimo:

$$|\lambda - a_{ii}||x_i| = |\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq ||x||_\infty \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Naj bo $|x_k| = ||x||_\infty$. Če postavimo $i = k$ dobimo,

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Kar pomeni $\lambda \in C_k$. Iz tega že sledi, da vsaka lastna vrednost leži v uniji krogov. ■

Naloga 1.2 *Naj bo* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *diagonalno dominantna, tj.*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad za \quad vsak \quad i.$$

Potem je A *obrnljiva.*

Rešitev. Dovolj je pokazati, da so vse lastne vrednosti različne od 0. Fiksirajmo lastno vrednost λ. Po izreku leži v vsaj enem krogu. Torej velja

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Ali je lahko $\lambda = 0$. Če bi bila, bi veljalo $|a_{ii}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$. Kar je protislovje. Matrika je res obrnljiva. ■

Posledica 1.1 *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična, vse lastne vrednosti so realne. Vsak lastna vrednost leži v enem od intervalov*

$$[a_{ii} - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|, a_{ii} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|].$$

Posledica 1.2 *Velja $|\lambda| \leq ||A||_\infty$.*

Dokaza posledic sta preprosta in ju prepuščam bralcu.

Naloga 1.3 *Določi območje v katerem se nahajajo lastne vrednosti matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 1 & 10 & 0.5 \\ 1.5 & -3 & 20 \end{bmatrix}.$$

(i). Uporabi Gerschgorinov izrek.

(ii). Upoštevaj še, da imata matriki A in A^T iste lastne vrednosti.

(iii). Podobna matrika QAQ^{-1} ima iste lastne vrednosti kot matrika A. Ponavadi si za Q izberemo kar diagonalno matriko. Poišči optimalno matriko

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & k \end{bmatrix},$$

pri kateri dobiš najboljše oceno za tretjo lastno vrednost.

Uporabi Gerschgorinov izrek.

Rešitev.

(i). Iz prve vrstice dobimo $|\lambda - 10| \leq 5$. Iz druge vrstice dobimo $|\lambda - 10| \leq 1.5$. Iz tretje vrstice dobimo $|\lambda - 20| \leq 4.5$. Oceno za območje lahko izboljšamo tako, da isto oceno naredimo za A^T in podobno matriko DAD^{-1}, kjer je D diagonalna matrika. Vsako območje je določeno z unijo krogov. Lastne vrednosti se nahajajo v preseku vseh območij.

(ii). Zamenja se vloga vrstic in stolpcev. Tako dobimo ocene $|\lambda - 10| \leq 2.5$, $|\lambda - 10| \leq 7$, $|\lambda - 20| \leq 1.5$. Lastne vredosti ležijo v preseku obeh unij.

(iii). Izračunamo in dobimo

$$QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & \frac{1}{k} \\ 1 & 10 & 0.5\frac{1}{k} \\ 1.5k & -3k & 20 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo Gerschgorinov izrek in dobimo $|\lambda - 10| \leq 4 + \frac{1}{|k|}$, $|\lambda - 10| \leq 1 + 0.5\frac{1}{|k|}$, $|\lambda - 20| \leq 4.5|k|$. Radi bi, da ima krog okoli 20 čimmanjši radij in prazen presek z ostalima dvema. To pomeni $20-4.5|k| \geq 14+\frac{1}{|k|} \geq 11+0.5\frac{1}{|k|}$. Za mejne $|k|$ dobimo kvadratno enačbo $20 - 4.5|k| = 14 + \frac{1}{|k|} \Rightarrow -4.5|k|^2 + 6|k| - 1 = 0$. Dobimo $x_{12} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4*4.5}}{-9} = \frac{2}{3} \mp \frac{\sqrt{2}}{3}$. Torej dobimo $0.195 \lessapprox |k| \lessapprox 1.13$. Vzamemo $|k|$, ki je čim manjši tj. $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$.

■

Naloga 1.4 *Pokaži, da so levi in desni lastni vektorji matrike A pripadajoči različnim lastni vrednosti λ pravokotni.*

Rešitev. Za levi lastni vektor x velja $Ax = \lambda_1 x$, za desni lastni vektor y pa $y^H A = \lambda_2 y^H$. Pokazati moramo, da velja $x^H y = 0$. Velja $y^H(Ax) = y^H(\lambda_1)x = \lambda_1 y^H x = (y^H A)x = (\lambda_2 y^H)x = \lambda_2 y^H x$. Tako dobimo $(\lambda_2 - \lambda_1)y^H x = 0$, iz česar že sledi $y^H x = 0$. ■

Naloga 1.5 *Pokaži, da ima hermitska matrika $A^H = A$ vse lastne vrednosti realne.*

Rešitev. Velja $Ax = \lambda x$, iz tega dobimo

$$x^H A^H = \overline{\lambda} x^H = x^H A = \overline{\lambda} x^H.$$

V primeru, da velja $\lambda \neq \overline{\lambda}$, uporabimo prejšnjo nalogo in dobimo $x^H x = 0$. Prišli smo do protislovja, saj $x \neq 0$. Torej mora veljati $\lambda = \overline{\lambda}$. To pomeni, da so vse lastne vrednosti realne. ■

Naloga 1.6 *Matrika A se da diagonalizirati. Pokaži, da matrika ne more imeti natanko ene zelo občutljive vrednosti.*

Rešitev. Naj bo $AX = X\Lambda$, $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$, kjer je $Ax_i = \lambda_i x_i$ in

$$||x_i|| = 1.$$

Podobno definiramo še matriko levih lastnih vektorjev ($||y_i|| = 1$) deljenih z inverzom občutljivosti lastne vrednosti $Y^H = \begin{bmatrix} y_1/s_1 & y_2/s_2 & \cdots & y_n/s_n \end{bmatrix}$. Tukaj je $s_i = y_i^H x$. Vemo, da velja $y_i^H x_j = \delta_{ij} s_i$. Velja namreč $< Ax_i, y_j >= \lambda_i < x_i, y_j >=< x_i, A^H y_j >= \lambda_j < x_i, y_j >$. Torej velja $YX = I = XY$, ali drugače

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i^H}{s_i} = I.$$

Naj bo k indeks tako da velja $\frac{1}{|s_k|} = \max_i \frac{1}{|s_i|}$. Zapišemo

$$\frac{1}{s_k} x_k y_k^H = I - \sum_{i \neq k} \frac{x_i y_i^H}{s_i}.$$

Na obeh straneh uporabimo drugo normo. Upoštevamo, da velja $||xy^H||_2 = \max \lambda(yx^H xy^H) = \max \lambda(yy^H) = 1$, kjer je $||x||_2 = ||y||_2 = 1$. Matrika yy^H je ranga 1 in velja $(yy^H)y = y(y^H y) = 1 \cdot y$. Lahko uporabimo tudi Frobeniousovo normo, vendar dobimo slabšo oceno, saj velja $||I||_F = \sqrt{n}$. Zlahka preverimo enakost $||xy^H||_F = 1$

Ocenimo

$$\frac{1}{|s_k|} \leq 1 + \sum_{j \neq k} \frac{1}{|s_j|}.$$

Ker je lastna vrednost zelo občutljiva velja $\frac{1}{|s_k|} >> 1$. Torej mora za vsaj en $|s_j|$ veljati

$$\frac{1}{|s_j|} \geq \frac{1 - \frac{1}{|s_k|}}{n - 1}.$$

■

Naloga 1.7 *Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se da diagonalizirati. Naj velja $AX = X\Lambda$ in $Y^T A = \Lambda Y^T$. Pokaži, da za vsak i velja*

$$\frac{1}{|s_i|} \leq ||X||_2||X^{-1}||.$$

Rešitev. Definiramo $x_i = \frac{Xe_i}{||Xe_i||}$ in $y_i = \frac{X^{-H}e_i}{||X^{-H}e_i||}$. Velja namreč $X^{-1}A = \Lambda X^{-1}$. Torej

$$|s_i| = |y_i^H x_i| = \frac{|e_i^H X^{-1}Xe_i|}{||Xe_i||||X^{-H}e_i||} = \frac{1}{||Xe_i||||X^{-H}e_i||}.$$

Dobimo

$$\frac{1}{|s_i|} = ||Xe_i||||X^{-H}e_i|| \leq ||X||||X^{-1}||.$$

■

Naloga 1.8 *Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in T njena Schurova forma. Velja zveza $A = QTQ^H$, kjer je Q ortogonalna matrika in T zgornje trikotna matrika. Naj bo λ enostavna lastna vrednost matrike A. S pomočjo Schurove forme izračunaj pripadajoči lastni vektor.*

Rešitev. Za lastno vrednost in lastni vektor velja:

$$\begin{aligned}
Ax = QTQ^H x &= \lambda x \\
QTQ^H x - \lambda \overbrace{QQ^H}^{I} x &= 0 \\
Q(T-\lambda I)Q^H x &= 0 \qquad /Q^H \cdot \\
(T-\lambda I)\underbrace{Q^H x}_{y} &= 0 \\
Ty &= \lambda y.
\end{aligned}$$

Vektor y je lastni vektor za T. Lastna vrednost $\lambda = t_{ii}$ je eden izmed diagonalnih elementov T. Oglejmo si obliko

$$(T - t_{ii}I)y = \begin{bmatrix} \lambda_1 - t_{ii} & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & 0 & * & * \\ & & & * & * \\ & & & & \lambda_n - t_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ * \\ y_i \\ * \\ y_n \end{bmatrix} = 0.$$

Enakost si oglejmo po blokih.

$$T - \lambda I = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} i-1 & 1 & n-i \end{array} \\ \begin{array}{c} i-1 \\ 1 \\ n-i \end{array} & \begin{bmatrix} T_{11} - \lambda I & T_{12} & T_{13} \\ 0 & 0 & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} - \lambda I \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz tretje bločne vrstice dobimo $(T_{33} - \lambda I)y_3 = 0$, kar nam da $y_3 = 0$, saj je $(T_{33} - \lambda I)$ obrnljiva. Iz druge bločne vrstice pa dobimo $T_{23}y_3 = 0$, kar nam ne da nič novega. Iz prve bločne vrstice dobimo enačbo

$$(T_{11} - \lambda I)y_1 + T_{12}y_2 + T_{13}\overbrace{y_3}^{0} = 0,$$

iz česar dobimo

$$(T_{11} - \lambda I)y_1 = -T_{12}y_2.$$

Ker je y_2 skalar, lahko izberemo $y_2 = 1$. Torej je

$$y = \begin{bmatrix} -(T_{11} - \lambda)^{-1}T_{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q^H x.$$

Seveda sistem rešimo in ne računamo inverza. Na koncu dobimo $x = Qy$. ∎

Algoritem 1: Potenčna metoda

$y = y^{(0)}$ začetni približek ;
$r = 0$;
while *premajhna natančnost* **do**
  $y^{(r+1)} = Ay^{(r)}$;
  $y^{(r+1)} = y^{(r+1)}/||y^{(r+1)}||_\infty$ normirana varianta;
  $r = r + 1$;
end

Naloga 1.9 *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Iščemo dominantne lastne vrednosti s potenčno metodo. Dokaži, da vektorji po smeri konvergirajo k dominantni lastni vrednosti. Ali lahko izluščimo lastne vektorje pripadjoče tem lastnim vrednostim? Obravnavaj naslednje primere.*

- *Dominantna lastna vrednost je ena sama, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.*
- *Dominantni lastni vrednosti sta dve, velja $\lambda_2 = \lambda_1$.*
- *Dominantni lastni vrednost sta dve, velja $\lambda_2 = -\lambda_1$.*

Rešitev. Primer $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.
Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pripadojoči lastni vektorji. Zapišimo $y^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Velja $y^{(r)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^r x_i$. Tako dobimo

$$\frac{y_k^{(r+1)}}{y_k^{(r)}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^{r+1} x_{i(k)}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^r x_{i(k)}} = \frac{\alpha_1 \lambda_1 x_{1(k)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^r \lambda_i x_{i(k)}}{\lambda_1 x_{1(k)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^r x_{i(k)}}.$$

Ker je $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$, velja

$$\lim_{r\to\infty} \frac{y_k^{(r+1)}}{y_k^{(r)}} = \lambda_1$$

in $y^{(r)}$ konvergira k x_1 po smeri.
Primer $\lambda_1 = \lambda_2$.
Podobno kot prej dobimo

$$\frac{y_k^{(r+1)}}{y_k^{(r)}} = \frac{\alpha_1 \lambda_1 x_{1(k)} + \alpha_2 \lambda_1 x_{2(k)} + \sum_{i=3}^n \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^r \lambda_i x_{i(k)}}{\alpha_1 x_{1(k)} + \alpha_2 x_{2(k)} \sum_{i=3}^n + \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^r x_{i(k)}}.$$

Torej velja

$$\lim_{r\to\infty} \frac{y_k^{(r+1)}}{y_k^{(r)}} = \lambda_1$$

in $y^{(r)}$ konvergira po smeri proti $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Iz tega ne moremo dobiti lastnih vektorjev.
Primer $\lambda_2 = -\lambda_1$.
V tem primeru podzaporedje $z^{(r)} = y^{(2r)}$ konvergira po smeri k $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, faktor je λ_1^2. Podzaporedje $w^{(r)} = y^{(2r+1)}$ pa konvergira k $\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2$. Iz $y^{(r)} \doteq \alpha x_1 + \beta x_2$ in $y^{(r+1)} \doteq \alpha\lambda_1 x_1 - \lambda_1 \beta x_2$. Iz česar dobimo

$$\begin{aligned}
\lambda_1 y^{(r)} + y^{(r+1)} &= 2\alpha\lambda_1 x_1 \\
\lambda_1 y^{(r)} - y^{(r+1)} &= 2\beta\lambda_1 x_2.
\end{aligned}$$

■

Izrek 1.1 (Bauer-Fike) *Če je $A = X\Lambda X^{-1}$, kjer je $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n})$, potem vse lastne vrednosti $\lambda(\epsilon)$ matrike $A + \epsilon E$ ležijo v uniji krogov*

$$|z - \lambda_i| \le \epsilon ||X|| \cdot ||X^{-1}|| \cdot ||E|| = \epsilon \cdot \kappa(X) ||E||.$$

Dokaz 1.1 *Naj bo $\lambda(\epsilon)$ lastna vrednost $A + \epsilon E$. Predpostavimo lahko $\lambda(\epsilon) \ne \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, saj sicer izrek trivialno res.*

Matrika $A + \epsilon E - \lambda(\epsilon) I$ je singularna. Dobimo

$$X^{-1}(A + \epsilon E - \lambda(\epsilon)I)X = \Lambda - \lambda(\epsilon)I + \epsilon X^{-1}EX = (\Lambda - \lambda(\epsilon)I)\left(I + \epsilon(\Lambda - \lambda(\epsilon)I)^{-1}X^{-1}EX\right).$$

Ker je $\Lambda - \lambda(\epsilon)I$ nesingularna matrika ($\lambda(\epsilon)$ ni lastna vrednost originalne matrike), mora biti $I + \epsilon(\Lambda - \lambda(\epsilon)I)^{-1}X^{-1}EX$ singularna matrika. To pa pomeni, da je

$$1 \le ||I + \epsilon(\Lambda - \lambda(\epsilon)I)^{-1}X^{-1}EX|| \le \epsilon \cdot ||(\Lambda - \lambda(\epsilon)I)^{-1}|| \cdot ||X^{-1}|| \cdot ||E|| \cdot ||X||.$$

Ugotovimo, da velja

$$||(\Lambda - \lambda(\epsilon)I)^{-1}|| = \frac{1}{\min_i |\lambda_i - \lambda(\epsilon)|}.$$

Tako dobimo končno oceno

$$\min_i |\lambda_i - \lambda(\epsilon)| \le \epsilon \cdot ||X^{-1}|| \cdot ||E|| \cdot ||X||,$$

kar je željeni rezultat.

Naloga 1.10 *Naj bo $T = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ v Schurovi formi. Iščemo matriko S, da bo $S^{-1}TS = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$. Matriko S lahko izberemo v obliki $\begin{bmatrix} I & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Čemu mora zadoščati matrika R? Enačbi, ki jo dobiš pravimo* **Sylvestrova enačba**.

Rešitev. Najprej poiščemo inverz matrike S,

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} I & -R \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Izračunamo

$$S^{-1}TS = \begin{bmatrix} I & -R \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -R \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & AR + C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AR + C - RB \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Matrika R mora torej zadoščati enačbi $AR - RB = -C$. ∎

Naloga 1.11 (Sylvestrova enačba) *To je matrična enačba* $AX - XB = C$, *kjer je* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(i). Preko Schurovih dekompozicij matrik A *in* B *transformiraj enačbo v obliko* $A'Y - YB' = C'$, *kjer sta* A' *in* B' *zgornje trikotni matriki.*

(ii). Zapiši algoritem za reševanje $A'Y - YB' = C'$. *Kakšnemu pogoju morata zadoščati matriki* A *in* B, *da bo enačba rešljiva.*

(iii). Rešitev Y *transformiraj v* X.

Rešitev.

(i). Velja $A = QA'Q^H$, $B = UB'U^H$. Iz tega sledi

$$\begin{aligned} Q^H \setminus QA'Q^H X - XUB'U^H &= C/U \\ A' \underbrace{(Q^H XU)}_{Y} - \underbrace{(Q^H XU)}_{Y} B' &= \underbrace{Q^H CU}_{C'} \\ A'Y - B'Y &= C' \end{aligned}$$

(ii).

for $i = 1 : n$ **do**
  $d = C'_i$;
  for $j = 1 : i - 1$ **do**
    $d = d + b_{ji} \cdot y_j$ $n^2 - n$ operacij ;
  end
  $y_i = (A' - b_{ii} I)/d$ $n^2 + n$ operacij ;
end

Naj bo $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$ zapisan po stolpcih.
1. stolpec

$$A'y_1 - b'_{11} y_1 = c'_1 \Rightarrow (A' - b'_{11} I) y_1 = c'_1$$

i-ti stolpec

$$A'y_i - (b'_{1i} y_1 + b'_{2i} y_2 + \ldots + b'_{ii} y_i) = c'_1$$

$$A'y_i - b'_{ii} y_i = (A' - b'_{ii}) y_i = b'_{1i} y_1 + b'_{2i} y_2 + \ldots + b'_{i-1,i} y_{i-1} + c'_1$$

Tako moramo na vsakem koraku rešiti zgornje trikoten sistem za y_i, ki bo rešljiv, če $b_{ii} \notin \lambda(A')$. Veljati mora $\lambda(A) \cap \lambda(B) = \emptyset$.

(iii). Transformacija je preprosta, $Y = Q^H XU \Rightarrow X = QYU^H$.

∎

Izrek 1.2 *Courant-Fisherjev minimax izrek.*
Za simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja

$$\lambda_k(A) = \min_{R\subseteq\mathbb{R}^n,\dim(R)=n-k+1} \max_{x\in R, x\neq 0} \rho(x,A) = \max_{S\subseteq\mathbb{R}^n,\dim(S)=k} \min_{x\in S, x\neq 0} \rho(x,A).$$

Izrek 1.3 *Cauchyjev izrek o prepletanju.*
Če je A simerična matrika in A_r glavna $r\times r$ podmatrika matrike A, potem velja

$$\lambda_{r+1}(A_{r+1}) \leq \lambda_r(A_r) \leq \lambda_r(A_{r+1})\ldots \leq \lambda_2(A_{r+1}) \leq \lambda_1(A_r) \leq \lambda_1(A_{r+1}.$$

Naloga 1.12 *Naj bosta $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrični, da velja*

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A) \qquad in \qquad \lambda_1(E) \geq \lambda_2(E) \geq \ldots \geq \lambda_n(E).$$

Dokaži, da potem velja

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(E) \leq \lambda_k(A+E) \leq \lambda_k(A) + \lambda_1(E).$$

Uporabi Courant-Fisherjev minimax izrek.

Rešitev. Velja

$$\lambda_k(A) = \min_{R\subseteq\mathbb{R}^n,\dim(R)=n-k+1} \max_{x\in R, x\neq 0} \rho(x,A),$$

kjer je $\rho(x, A+E) = \frac{x^T(A+E)x}{x^Tx} = \rho(x,A) + \rho(X,E)$. Dobimo

$$\lambda_k(A+E) = \min_{R\subseteq\mathbb{R}^n,\dim(R)=n-k+1} \max_{x\in R, x\neq 0} (\rho(x,A) + \rho(x,E)) \leq$$

$$\leq \min_{R\subseteq\mathbb{R}^n,\dim(R)=n-k+1} (\max_{x\in R, x\neq 0} \rho(x,A) + \rho(x,E)).$$

Velja tudi

$$\lambda_n(E) \leq \rho(x,E) \leq \lambda_1(E).$$

Če vzamemo $\max \rho(x,E)$ po celem prostoru, dobimo kvečjemu več. Torej velja $\lambda_k(A+E) \leq \lambda_k(A) + \lambda_1(E)$.

Za drugi del neenakosti lahko uporabimo drugi del minimax izreka. Lahko pa uporabimo pravkar dokazano neenakost za $-A$ in $-E$. To nam da

$$\lambda_k(-A-E) = -\lambda_{n-k+1}(A+E) \leq \lambda_k(-A) + \lambda_1(-E) = -(\lambda_{n-k+1}(A) + \lambda_n(E)).$$

Če neenakost pomnožimo z -1, smo končali. ∎

Naloga 1.13 *Podana je tridiagonalna matrika*

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

kjer velja $b_i \cdot c_i > 0 \quad \forall i$. Pokaži, da ima taka matrika same realne lastne vrednosti. Nasvet: pokaži, da je matrika podobna simetrični matriki. Simetrične matrike imajo same realne lastne vrednosti. Prav tako imajo podobne matrike iste lastne vrednosti. Za podobnostno matriko lahko uporabiš kar diagnoalno matriko D.

Rešitev. Izračunajmo

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & & & \\ & \frac{1}{d_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1\frac{d_1}{d_2} & & & \\ b_1\frac{d_2}{d_1} & a_2 & c_2\frac{d_2}{d_3} & & \\ & b_2\frac{d_3}{d_2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1}\frac{d_{n-1}}{d_n} \\ & & & b_{n-1}\frac{d_n}{d_{n-1}} & a_n \end{bmatrix}.$$

Torej mora veljati $c_i\frac{d_i}{d_{i+1}} = b_i\frac{d_{i+1}}{d_i}$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Dobili smo sistem $n-1$ enačb za n neznank, torej lahko izberemo $d_1 = 1$. Z indukcijo zlahka preverimo, da potem velja $d_i = \prod_{j=1}^{i-1}\sqrt{\frac{c_i}{b_i}}$. ■

Naloga 1.14 *Jacobijeva rotacija je ortogonalna matrika Q, ki uniči izvedigonalne elemente v podmatriki 2×2 simetrične matrike A.*

$$A \mapsto Q_{k\ell}^T A Q_{k\ell} = A' \tag{1.1}$$

$$\begin{bmatrix} * & & \cdots & & * \\ & \ddots & & & \\ & a_{kk} & \cdots & a_{k\ell} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & a_{\ell k} & \cdots & a_{\ell\ell} & \\ & & & \ddots & \\ * & & \cdots & & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * & & \cdots & & * \\ & \ddots & & & \\ & a'_{kk} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \cdots & a'_{\ell\ell} & \\ & & & \ddots & \\ * & & \cdots & & * \end{bmatrix}$$

Rotacija Q_{kl} deluje samo na k-ti in l-ti stolpec in vrstico. Zapišemo jo kot

$$Q_{k\ell} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & c & \cdots & s & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & -s & \cdots & c & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

kjer velja $c^2 + s^2 = 1$. Naredimo transformacijo 1.1 in dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} a'_{hk} &= a'_{\ell h} = ca_{h\ell} + sa_{hk} \\ a'_{k\ell} &= a'_{\ell k} = (c^2 - s^2)a_{k\ell} + sc(a_{kk} - a_{\ell\ell}) = 0 \\ a'_{kk} &= c^2 a_{kk} + s^2 a_{\ell\ell} - 2sca_{k\ell} \\ a'_{\ell\ell} &= c^2 a_{kk} + s^2 a_{\ell\ell} + 2sca_{k\ell} \end{aligned}$$

Iz tretje enačbe dobimo

$$\frac{c^2 - s^2}{sc} = \frac{a_{\ell\ell} - a_{kk}}{a_{k\ell}}.$$

Za lažji izračun uvedemo še

$$\beta = \frac{a_{\ell\ell} - a_{kk}}{2a_{k\ell}}$$

in novo neznanko $t = \frac{s}{c}$. *Tako se naša enačba transformira v* $t^2 + 2\beta t - 1 = 0$. *Njena stabilna rešitev je*

$$t = \frac{\operatorname{sign}(\beta)}{|\beta| + \sqrt{\beta^2 + 1}}.$$

Potem lahko izračunamo še $c = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ *in* $s = ct$.

Naloga 1.15 *Pokaži, da so lastne vrednosti matrike*

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$$

enake $\pm\sigma_i$, *kjer so* σ_i *singularne lastne vrednosti matrike* A.

Rešitev. Naj bo $A = U\Sigma V^T$ singularni razcep matrike A, potem velja $Av_i = \sigma_i u_i$ in $A^T u_i = \sigma_i v_i$. Tako dobimo

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \pm v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm Av_i \\ A^T u_i \end{bmatrix} = \sigma_i \begin{bmatrix} \pm u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \pm\sigma_i \begin{bmatrix} u_i \\ \pm v_i \end{bmatrix}.$$

■

Naloga 1.16 *Rešujemo posplošen problem lastnih vrednosti* $Ax = \lambda Bx$, *kjer je* A *simetrična matrika,* B *pa simetrična pozitivno definitna matrika. Posplošen problem lastnih vrednosti prevedi na navadnega s pomočjo*

(i). razcepa Choleskega $B = VV^T$

(ii). korena matrike B $F = \sqrt{B}$, *kjer velja* $F^2 = B$.

Rešitev.

(i).

$$Ax = \lambda Bx = \lambda VV^T x \to V^{-1}Ax = \lambda V^T x \to V^{-1}AV^{-T}V^T x = \lambda \overbrace{V^T x}^{y}$$

Na koncu dobimo problem $Cy = \lambda y$, kjer je $y = V^T x$ in $C = C^T = V^{-1}AV^{-T}$ simetrična matrika.

(ii).

$$Ax = \lambda Bx = \lambda F^2 x \to F^{-1}AF^{-1}Fx = \lambda \overbrace{Fx}^{y}.$$

Tako spet dobimo problem oblike $Cy = \lambda y$, kjer je $C = F^{-1}AF^{-1}$ in $y = Fx$. Spet ohranimo simetrijo.

■

Naloga 1.17 *Reduciraj matriko A na zgornjo Hessenbergovo s pomočjo Householderjevih zrcaljenj. Householderjevo zrcaljenje je matrika oblike $H = I - \frac{2}{w^T w} w w^T$ in predstavlja zrcaljenje prek ravnine določene z normalo w. Če hočemo preslikati vektor x v $\pm k e_1$, lahko to naredimo s Householderjevim zrcaljenjem določenim z $w = x + sign(x_1)||x||_2 e_1$. Skicirajmo postopek na matriki* 5×5.

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{Q_1 \cdot} \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot Q_1^H} \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{Q_2 \cdot} \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdot Q_2^H} \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{Q_3 \cdot} \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot Q_3^H} \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

```
function H = redh(A)
[m, n] = size(A);

for k = 1 : (m-2)
    x = A((k+1):m, k);
    e = zeros(m-k, 1);
    e(1) = 1;
    w = sign(x(1))*norm(x)*e + x;
    w = w/norm(w);
    B = A((k+1):m, k:m);
    A((k+1):m, k:m)= B - 2*w*(w'*B);
    B = A(k:m, (k+1):m);
    A(k:m, (k+1):m)= B - 2*(B*w)*w';
end;
H = A;
```

Naloga 1.18 *Naj bo A simetrična matrika z lastnimi pari $Ax_i = \lambda_i x_i, i = 1, \ldots, n$. Naj bo enotski vektor x aproksimacija za lastni vektor x_1 in naj bo $\eta = \rho(x, A) = \frac{x^T A x}{x^T x} = x^T A x$ Rayleighov kvocient za x. Pokaži, da potem velja*

$$|\eta - \lambda_1| \leq 2||A||_2 \cdot ||x - x_1||_2^2.$$

Rešitev. Matrika A je simetrična, tako se da diagonilizirati, $A = XDX^T$, lastni vektorji tvorijo ortonormirano bazo. Vektor x razvijemo po tej bazi, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Baza je ortonormirana, torej velja $x_i^T x_j = \delta_{ij}$ in posledično $||x||_2^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ in $x^T A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2$.

$$||x - x_1||_2^2 = ||(\alpha - 1)^2 x_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i||_2^2 = (\alpha_1 - 1)^2 + \overbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2}^{1-\alpha_1^2} = \alpha_1^2 - 2\alpha_1 + 1 + 1 - \alpha_1^2 = 2(1 - \alpha_1).$$

$$\eta - \lambda_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1)\alpha_i^2.$$

Ocenimo še $|\lambda_i - \lambda_1| \leq |\lambda_i| + |\lambda_1| \leq 2||A||_2$. Skupaj dobimo

$$|\eta - \lambda_1| \leq 2||A||_2 \cdot \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 = 2||A||_2(1-\alpha_1^2) \leq 2||A||_2 2(1-\alpha_1) \leq 4||A||_2 \frac{||x-x_1||_2}{2} = 2||A||_2||x-x_1||_2^2.$$

■

Prvi Remesov postopek poišče najboljšo enakomerno aproksimacijo funkcije s polinomom stopnje n na zaprtem intervalue $[a, b]$. S postopkom poiščemo najslabšo množico, kjer residual alternirajoče doseže svojo normo.

Algoritem 2: Prvi Remesov postopek

Začnemo s funkcijo f in množico točk X, ki vsebuje $n+2$ začetnih točk $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ na intervalu $[a, b]$.

(i). Reši linearni sistem enačb

$$b_0 + b_1 x_i ... b_n x_i^n + (-1)^i m = f(x_i)(\text{za} i = 1, 2, ... n+2)$$

za neznanke $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

(ii). Koeficenti polinoma so b_i, $p(x) = b_0 + b_1 x ... b_n x^n$.

(iii). Poišči množico točk L, kjer je dosežena maksimalna napaka $M = \max_{x \in [a,b,]} |f(x) - p(x)|$.

(iv). Če velja $m = M$, končaj. V nasprotnem zamenjaj dodaj eno točko iz L v X in iz nje odstrani eno začetno točko, tako da se ohrani alterniranje predznaka residuala $r(x) = f(x) - p(x)$.

Naloga 1.19 *(i). Poišči premico, ki najboljše enakomerno aproksimira $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $[1, 2]$. Uporabi prvi Remesov postopek za začetno množico točk $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 2$.*

(ii). Poišči parabolo, ki najboljše enakomerno aproksimira $f(x) = |x|$ na intervalu $[-1, 1]$. Uporabi prvi Remesov postopek za začetno množico točk $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, x_3 = 1$.

Rešitev.

(i). Dobimo sistem enačb

$$b_0 + b_1 - m = 0$$
$$b_0 + \frac{3}{2} b_1 + m = \ln(\frac{3}{2})$$
$$b_0 + 2b_1 - m = \ln(2)$$

Rešitve sistema so $b_1 = \ln(2)$, $b_0 = \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{7}{4}\ln(2) = \doteq 0.663701$ in $m = b_0 + b_1 = \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{3}{4}\ln(2) \doteq 0.294458$. Poiščemo še ekstrem, $(f(x) - p(x))' = \frac{1}{x} - b_1$. Ekstrem je dosežen pri $x = \frac{1}{\ln(2)} \doteq 1.442695$, velja še $f(x) - p(x) < 0$. Tako zamenjamo x in x_2. Nove točke so $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{\ln(2)}$, $x_3 = 2$.

Ponovno rešimo sistem in dobimo $b_1 = \ln(2)$, $b_0 = \frac{1}{2}(-1 - \ln(2) - \ln(\ln(2))) \doteq -0.663317$. Pri iskanju maksimuma spet dobimo $x = \frac{1}{\ln(2)}$ in končamo.

(ii). Dobimo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
b_0 - \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{4}b_2 - m &= \frac{1}{2} \\
b_0 + 0b_1 + 0b_2 + m &= 0 \\
b_0 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{4}b_2 - m &= \frac{1}{2} \\
b_0 + b_1 + b_2 + m &= 1,
\end{aligned}
$$

ki ga rešimo, $b_0 = -m = \frac{1}{8}$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Naš polinom je $p(x) = \frac{1}{8} + x^2$. Poiskati moramo še točke kjer residual, $r(x) = |x| - \frac{1}{8} - x^2$, doseže svojo normo. Maksimum residuala lahko gledamo le na intervalu $[0, 1]$, saj je $r(x)$ soda funkcija. Na tem intervalu velja $r(x) = x - \frac{1}{8} - x^2$. Poiščemo ničle odvoda $r'(x) = 1 - 2x$. Kandidati za ekstrem so torej robne točke -1, 1 in ničli odvoda $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. Vrednosti $|r(x)|$ v teh točkah so povsod $\frac{1}{8}$. Torej smo že končali.

■