Poglavje 3

Numerično reševanje diferencialnih enačb

Naloga 3.1 ***Naloga ni bila narejena na vajah***
Diferencialno enačbo $y' = -50y + 100$, $y(0) = y_0$, *ki ima točno rešitev* $y(x) = (y_0 - 2)e^{-50x} + 2$ *rešujemo z*

- *eksplicitno Eulerjevo metodo* $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$,
- *implicitno Eulerjevo metodo* $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$.

V obeh primerih izpelji splošno formulo za y_n *in določi vrednosti za* h, *pri katerih* y_n *konvergira proti točni rešitvi, ko gre* x *proti* ∞.

Rešitev.

- Imamo enačbo $y' = f(x, y) = -50y + 100$, $y(0) = y_0$. Tako dobimo zvezo
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(-50y_n + 100) = y_n(1 - 50h) + 100h.$$
Kar je diferenčna enačba z začetnim pogojem y_0. Najprej rešimo homogeni del $y_{n+1} = y_n(1 - 50h)$. Splošni nastavek je $y_n = A\alpha^n$. Tako dobimo $\alpha = (1 - 50h)$. Rabimo še partikularno rešitev, ki jo kar uganemo. Zlahka se prepričamo, da je to $y_n = 2$. Tako dobimo skupno rešitev $y_n = A(1 - 50h)^n + 2$. Iz začetnega pogoja dobimo $A = y_0 - 2$. Rešitev je $y_n = (y_0 - 2)(1 - 50h)^n + 2$. Točna rešitev $y(x) = (y_0 - 2)e^{-50x} + 2$ ima limito 2, ko gre $x \to \infty$. To mora veljati tudi za numerično rešitev, zato mora biti $|1 - 50h| < 1$. Ker je $h > 0$, mora veljati $0 < h < \frac{1}{50}$.
- Imamo enačbo $y' = f(x, y) = -50y + 100$, $y(0) = y_0$. Tako dobimo zvezo
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h(-50y_{n+1} + 100).$$
Kar je diferenčna enačba z začetnim pogojem y_0,
$$y_{n+1} = \frac{y_n + 100h}{1 + 50h} = \frac{y_n}{1 + 50h} + \frac{100h}{1 + 50h}.$$
Najprej rešimo homogeni del. Splošni nastavek je $y_n = A\alpha^n$. Tako dobimo $\alpha = \frac{1}{1+50h}$. Rabimo še partikularno rešitev, ki jo kar uganemo. Zlahka se prepričamo, da je to $y_n = 2$. Tako dobimo skupno rešitev $y_n = A\frac{1}{(1+50h)^n} + 2$. Iz začetnega pogoja dobimo $A = y_0 - 2$. Rešitev je $y_n = (y_0 - 2)\frac{1}{(1+50h)^n} + 2$. Točna rešitev $y(x) = (y_0 - 2)e^{-50x} + 2$ ima limito 2, ko gre $x \to \infty$. To mora veljati tudi za numerično rešitev, zato mora biti $|\frac{1}{1+50h}| < 1$. Ker je $h > 0$, je neenakost zmeraj izpolnjena.

Enačba $y' = \lambda y$, kjer je $Re(\lambda) < 0$ spada med toge probleme. Zanje je značilno, da rešitev hitro pada, ko gre $x \to \infty$. ■

Naloga 3.2 *Dana je diferencialna enačba $y' = x^2 - y^2$, $y(x_0) = y_0$.*

(i). Izpelji trapezno formulo $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$.

(ii). S trapezno formulo izračunaj približek y_1.

Rešitev.

(i). Rešujemo diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$. To enačbo integriramo in za izračun integrala uporabimo trapezno pravilo.

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx = \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right).$$

Tako dobimo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right).$$

(ii). V zvezo vstavimo $f(x, y) = x^2 - y^2$. Tako dobimo

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(x_0^2 - y_0^2 + x_1^2 - y_1^2\right).$$

Iz česar dobimo kvadratno enačba za y_1

$$\frac{h}{2}y_1^2 + y_1 - \left(y_0 + \frac{h}{2}(x_0^2 - y_0^2 + x_1^2)\right).$$

Kvadratno enačbo rešimo in dobimo

$$y_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2hy_0 + h^2(x_0^2 - y_0^2 + x_1^2)}}{h}.$$

Izbrati moramo še pravo rešitev. To bo tista, ki ima limito, ko gre $h \to 0$ enako y_0. Ker je $\sqrt{1 + 2hy_0 + h^2(x_0^2 - y_0^2 + x_1^2)} = 1 + hy_0 + O(h^2)$, je to rešitev s plusom.

■

Naloga 3.3 *Podana je Runge-Kutta metoda*

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\
k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n - k_1 + 2k_2) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)
\end{aligned}$$

Rešujemo problem $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$. Zapiši eksplicitno formulo za y_n. Kako velik je lahko h, da se bo pri $\lambda = -4$ rešitev y_n obnašala kot prava rešitev, ko gre $n \to \infty$.

Rešitev. V našem primeru je $f(x, y) = \lambda y$. Izračunamo

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\lambda y_n \\
k_2 &= h\lambda(y_n + k_1/2) = h\lambda(y_n + 1/2h\lambda y_n) = y_n(h\lambda + 1/2h^2\lambda^2) \\
k_3 &= h\lambda(y_n - k_1 + 2k_2) = y_n(h\lambda + h^2\lambda^2 + h^3\lambda^3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = y_n \underbrace{(1 + h\lambda + 1/2h^2\lambda^2 + 1/6h^3\lambda^3)}_{\phi(h\lambda)}
\end{aligned}$$

Točna rešitev je enaka $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$. Da se bo numerična rešitev obnašala kot točna rešitev mora veljati $|\phi(h\lambda)| < 1$. Za primer $\lambda = -4$ dobimo

$$\phi(h \cdot -4) = 1 - 4h + 1/216h^2 + 1/6h^3(-64) = 1 - 4h + 8h^2 - \frac{32}{3}h^3.$$

Zanima nas torej, kdaj je

$$|1 - 4h + 8h^2 - \frac{32}{3}h^3| \leq 1.$$

Z nekaj truda ugotovimo, da mora veljati $0 < h < 0.6281$.

Metoda je A-stabilna, če je za vsak λ, kjer $Re(\lambda) < 0$, in vsak $h > 0$ stabilna pri reševanju enačbe $y' = \lambda y$. Kar pomeni, da pada proti 0, ko gre $n \to \infty$. ■

Naloga 3.4 ***Naloga ni bila narejena na vajah***

Dane je diferencialna enačba drugega reda

$$y'' - y'y^2 + y = 0,$$

z začetnima pogojema $y(0) = 1$ *in* $y'(0) = 0$. *Preuredi diferencialno enačbo na sistem diferencialnih enačb prvega reda, uporabi Runge-Kutta metodo 4. reda ter določi numerično rešitev v točki* y_1 *za* $h = 0.2$.

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\
k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\
k_3 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

Rešitev. Uvedemo novo spremenljivko $y' = z$. Kar nam da $y'' = z' = y'y^2 - y = zy^2 - y$. Tako dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ zy^2 - y \end{bmatrix}.$$

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ z(x) \end{bmatrix}, \quad Y' = F(x, Y) = \begin{bmatrix} z \\ zy^2 - y \end{bmatrix}$$

Naj bo $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \end{bmatrix} = hF(x_0, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}) = h \begin{bmatrix} z_0 \\ z_0 y_0^2 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 \\ l_2 \end{bmatrix} = hF(x_0 + h/2, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}) + 1/2 \begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \end{bmatrix}) =$$

$$h \begin{bmatrix} z_0 + 1/2l_1 \\ (z_0 + 1/2l_1)(y_0 + 1/2k_1)^2 - (y_0 + 1/2k_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ l_3 \end{bmatrix} = hF(x_0 + h/2, \begin{bmatrix} y_0 + 1/2k_2 \\ z_0 + 1/2l_2 \end{bmatrix}) =$$

$$h \begin{bmatrix} z_0 + l_3 \\ (z_0 + l_3)(y_0 + k_3)^2 - (y_0 + k_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.022 \\ -0.219562 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_4 \\ l_4 \end{bmatrix} = hF(x_0 + h/2, \begin{bmatrix} y_0 + k_3 \\ z_0 + l_3 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} z_3 + l_3 \\ (z_0 + l_3)(y_0 + k_3)^2 - (y_0 + k_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_4 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0439124 \\ -0.237602 \end{bmatrix}$$

Na koncu dobimo

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.978681$$

in

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) = -0.216453.$$

■

Naloga 3.5 *Poišči red formule*

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{12}(5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1}) + O(h^{p+1}).$$

Ali je metoda ničelno stabilna?

Rešitev. Preverimo za katere polinome $y = x^i$ je formula točna. Za $y = 1$ je formula očitno točna. Za $y = x$ dobimo

$$x_n + h - x_n = \frac{h}{12}12 = h.$$

Formula je točna. Za $y = x^2$ dobimo

$$(x_n + h)^2 - x_n^2 = 2x_nh + h^2 = \frac{h}{12}(10(x_n + h)16x_n - 2(x_n - h) = 2x_n + h^2.$$

Za $y = x^3$ dobimo

$$(x_n + h)^3 - x_n^3 = \frac{h}{12}(15(x_n + h)^2 + 24x_n^2 - 3(x_n - h)^2),$$

torej je formula spet točna. Ker mora biti formula točna za vsak x_n in vsak h, lahko izberemo $x_n = 0$ Tako za $y = x^4$ dobimo

$$h^4 = \frac{h}{12}(20h^3 - 4h^3) + O(h^4) = \frac{4}{3}h^4 + O(h^4).$$

Formula je torej reda 3.

Formula je tudi ničelno stabilna. Vstavimo $f(x, y) = 0$. Tako dobimo $y_{n+1} - y_n = 0$. Polinom $\sigma(\zeta) = \zeta - 1$ ima enostavno ničlo 1, torej je ničelna stabilnost zagotovljena.

Formula je ničelno stabilna, če za enostavno ničlo σ velja $|\sigma| \leq 1$. Za večkratno ničlo pa mora veljati $|\zeta| < 1$.

■

Naloga 3.6 ***Naloga ni bila narejena na vajah***
Robni problem $y''(x) + 2y'(x) - 2y(x) = 3$, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$ *numerično rešujemo z diferenčno metodo. Pri tem prve in druge odvode nadomestimo s simetričnimi diferencami skozi tri sosednje točke. Zapiši dobljeni sistem linearnih enačb in ga reši v primeru* $h = 1/3$.

Rešitev. V točki x_i se enačba spremeni v

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 2\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 2y_i = 3.$$

Tako dobimo enačbo

$$y_{i+1}(1 + h) + y_i(2 + 2h^2) + y_{i-1}(1 - h) = 3h^2.$$

Če je $h = \frac{1}{3}$ dobimo sistem

$$y_2(1 + \frac{1}{3}) - y_1(2 + 2\frac{1}{9}) + y_0\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y_3(1 + \frac{1}{3}) - y_2(2 + 2\frac{1}{9}) + y_1\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

■

Naloga 3.7 ***Naloga ni bila narejena na vajah***
Robni problem $y''(x) + 2y'(x) - 2y(x) = 3$, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$ *numerično rešujemo z diferenčno metodo. Pri tem prve in druge odvode nadomestimo s simetričnimi diferencami skozi tri sosednje točke. Zapiši dobljeni sistem linearnih enačb in ga reši v primeru* $h = 1/3$.

Rešitev. V točki x_i se enačba spremeni v

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 2\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 2y_i = 3.$$

Tako dobimo enačbo

$$y_{i+1}(1 + h) + y_i(2 + 2h^2) + y_{i-1}(1 - h) = 3h^2.$$

Če je $h = \frac{1}{3}$ dobimo sistem

$$y_2(1 + \frac{1}{3}) - y_1(2 + 2\frac{1}{9}) + y_0\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y_3(1 + \frac{1}{3}) - y_2(2 + 2\frac{1}{9}) + y_1\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Sistem rešimo in dobimo $y_1 = \frac{24}{41}$, $y_2 = \frac{201}{164}$. ■