Poglavje 2

Polinomska interpolacija

Polinom $\mathcal{L}_{n,i}(x) = \Pi_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ je Lagrangeev bazni polinom. Za ta polinom velja $\mathcal{L}_{n,i}(x_k) = \delta_{ik}$. Naj bo $I_n(x)$ polinom, ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0, \ldots, x_n$. Potem je to ravno polinom

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_{n,i}(x).$$

Če definiramo $\omega(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$, lahko zapišemo

$$\mathcal{L}_{n,i}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

Za ostanek $n + 1$-krat odvedljive funkcije na $[a, b]$, velja

$$f(x) - I_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n + 1)!}\omega(x),$$

za nek $\zeta \in [a, b]$. Veljati mora, da je $x_i \in [a, b]$.

Naloga 2.1 *Dokaži, da velja* $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_{n,i}(x) = 1$.

Rešitev. Če za f vzamemo kar konstanto 1, iz enačbe za ostanek dobimo željeno enakost. Odvod konstante je enak 0. Druga možnost je, da ugotovimo, da enakost velja za $n + 1$ točk. Naš polinom je samo stopnje n, torej je identično enak 0. ■

Naloga 2.2 *Poišči interpolacijski polinom za* $f(x) = \cos(\pi/6x)$ *na točkah* $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2$.

Rešitev. Interpolacijski polinom bom zapisali v Lagrangeovi bazi. Potrebujemo funkcijske vrednosti $f(0) = \cos(0) = 1$, $f(1) = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(2) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$.

$$p(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(x - 0)(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)} + \frac{1}{2}\frac{(x - 0)(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)}.$$

Matlabova koda za iskanje interpolacijskega polinom:

```
x = [0, 1, 2];
y = cos(pi/6*x);
n = 2;
%dobimo koeficiente polinoma od najvisje do najnizje stopnje
p = polyfit(x,y,n)
%izracun vrednosti polinoma podanega s koeficenti
polyval(p, 2)
polyval(p, 0)
polyval(p, 1)
```

■

Naloga 2.3 *Dana je množica paroma različnih točk* $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *in njena podmnožica* $B = \{w_1, w_2, w_3\}$. *Za dano funkcijo* f *naj bo* p_i $i = 1, 2, 3$ *interpolacijski polinom funkcije na točkah iz množice* $(A - B) \cup \{w_i\}$. *Iz teh treh polinomov sestavi interpolacijski polinom na celotni množici* A. *Namig:* $p(x) = \alpha_1(x)p_1(x) + \alpha_2(x)p_2(x) + \alpha_3(x)p_3(x)$.

Naloga 2.4 *Za točko* $x_i \neq w_1, w_2, w_3$ *mora veljati.*

$$p(x_i) = f(x_i) = \alpha_1(x_i)p_1(x_i) + \alpha_2(x_i)p_2(x_i) + \alpha_3(x_i)p_3(x_i) = f(x_i)\left(\alpha_1(x_i) + \alpha_2(x_i) + \alpha_3(x_i)\right).$$

Iz česar sledi $\alpha_1(x_i) + \alpha_2(x_i) + \alpha_3(x_i) = 1$ *za vsak* i, *kjer* $x_i \neq w_1, w_2, w_3$. *Upoštevali smo, da velja* $p_1(x_i) = p_2(x_i) = p_3(x_i) = f(x_i)$. *Ta enakost spominja na Lagrangeove bazne polinome. Poglejmo, kaj mora veljati še za* w_1, w_2, w_3.

$$\begin{aligned} f(w_1) &= \alpha_1(w_1)f(w_1) + \alpha_2(w_1)p_2(w_1) + \alpha_3(w_1)p_3(w_1) \\ f(w_2) &= \alpha_1(w_2)p_1(w_2) + \alpha_2(w_2)f(w_2) + \alpha_3(w_2)p_3(w_2) \\ f(w_3) &= \alpha_1(w_3)p_1(w_3) + \alpha_2(w_3)p_2(w_3) + \alpha_3(w_3)f(w_3) \end{aligned}$$

Če izberemo Lagrangeove bazne polinome na množici $B = \{w_1, w_2, w_3\}$, *bo veljalo* $\alpha_i(x_j) = \delta_{ij}$, *kar bo izpolnilo zgornje tri enačbe. Definiramo kar*

$$\alpha_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad \alpha_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad \alpha_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Lagrangeva oblika interpolacijskega polinoma ni najprimernejša za konstrukcijo in računanje vrednosti interpolacijskega polinoma. Porabimo namreč veliko število operacij, poleg tega mora biti stopnja polinoma vnaprej določena. Boljše so zaporedne linearne interpolacije in tudi deljene in končne diference.

Nevilleova shema

Naj bo $I_{i,\ldots,i+k}$ interpolacijski polinom, ki se ujema z f v točkah $x_i, \ldots, x_{i+k}$. Potem velja

$$I_{i,\ldots,i+k}(x) = \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & I_{i,\ldots,i+k-1}(x) \\ x - x_{i+k} & I_{i+1,\ldots,i+k}(x) \end{vmatrix}.$$

Primer Nevillove sheme za 4 točke:

$$\begin{array}{c|c|c|ccc} x_i & x - x_i & y_i & & & \\ \hline x_0 & x - x_0 & y_0 & & & \\ & & & I_{0,1} & & \\ x_1 & x - x_1 & y_1 & & I_{012} & \\ & & & I_{1,2} & & I_{0123} \\ x_2 & x - x_2 & y_2 & & I_{123} & \\ & & & I_{2,3} & & \\ x_3 & x - x_3 & y_3 & & & \end{array}.$$

Naloga 2.5 *Poišči vrednosti interpolacijskega polinoma v točki* $x = 1$ *za podatke* $x_0 = 3, x_1 = 2, x_2 = 5$ *in* $f(x_0) = 2, f(x_1) = 4, f(x_2) = 0$.

Rešitev.

$$
\begin{array}{c|c|c|cc}
x_i & x - x_i & y_i & & \\
\hline
x_0 = 3 & x - x_0 = -2 & y_0 = 2 & & \\
 & & & I_{0,1} = 6 & \\
x_1 = 2 & x - x_1 = -1 & y_1 = 4 & & I_{012} = \frac{20}{3} \\
 & & & I_{1,2} = \frac{16}{3} & \\
x_2 = 5 & x - x_2 = -4 & y_2 = 0 & &
\end{array}.
$$

Do vrednosti smo prišči z naslednjim postopkom

$$I_{01}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & I_0(x) \\ x - x_1 & I_1(x) \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6,$$

$$I_{12}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{vmatrix} x - x_1 & I_1(x) \\ x - x_2 & I_2(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{16}{3},$$

$$I_{012}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & I_{01}(x) \\ x - x_2 & I_{12}(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -4 & \frac{16}{3} \end{vmatrix} = \frac{20}{3}.$$

■

Deljene diference
Deljena diferenca $[\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_k}]\mathbf{f}$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se ujema z f v paroma različnih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Velja še

$$I_n(x) = [x_0]f + \sum_{i=1}^{n} (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})[x_0, x_1, \ldots, x_i].$$

Za k-krat zvezno odvedljivo funkcijo velja

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]f = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\zeta).$$

Za $n+1$-krat odvedljivo funkcijo f velja

$$f(x) - I_n(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f.$$

Vrednosti deljenih diferenc najlažje izračunamo s pomočjo rekurzivne formule:

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & \text{za } x_i = \ldots = x_{i+k} \\ \frac{[x_i, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{i+k}]f - [x_i, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_{i+k}]f}{x_s - x_r} & \text{za } x_s \neq x_r. \end{cases}$$

Naloga 2.6 *Dana je funkcija* $f(x) = \frac{4}{1+x}$.

(i). Preko deljenih diferenc poišči interpolacijski polinom stopnje 5, *za katerega velja:*

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad p''(0) = f''(0), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1)$$

in $p''(1) = f''(1)$. *Izračunaj njegovo vrednost v* $x = \frac{1}{2}$.

(ii). Čimbolj oceni napako $\max |f(x) - p(x)|$ *za* $x \in [0, 1]$.

Rešitev. (i)
Izračunajmo

$$f(x) = \frac{4}{1+x}, \quad f'(x) = \frac{-4}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{8}{(1+x)^3}.$$

Tako dobimo

$$f(0) = 4,\ f'(0) = -4\ , f''(0) = 8,\ f(1) = 2,\ f'(1) = -1,\ f''(1) = 1.$$

Uporabimo Newtonovo obliko interpolacijskega polinima

$$p(x) = [x_0]f + \sum_{i=1}^{n} (x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})[x_0, x_1, \ldots, x_i]f.$$

Upoštevamo, da velja $[x_0, x_0]f = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}$, $[x_0, x_0, x_0]f = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}$. Izračunajmo deljene diference:

$$\begin{array}{c|cccccc}
\hline
\underline{0} & 4 & & & & & \\
 & & -4 & & & & \\
0 & 4 & & \underline{4} & & & \\
 & & -4 & & \underline{-2} & & \\
0 & 4 & & \underline{2} & & 1 & \\
 & & -2 & & -1 & & -\frac{1}{2} \\
\underline{1} & 2 & & 1 & & \frac{1}{2} & \\
 & & -1 & & -\frac{1}{2} & & \\
1 & 2 & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & -1 & & & & \\
1 & 2 & & & & &
\end{array}.$$

Tako dobimo interpolacijski polinom

$$p(x) = 4 + (-4x) + 4x^2 + (-2)x^3 + x^3(x-1) + (-\frac{1}{2}x^3(x-1)^2).$$

Vrednost polinoma izračunamo po Hornerju:

$$p(x) = 4 + x\left(-4 + x\left(4 + x\left(-2 + (x-1)\left(1 + (x-1) - \frac{1}{2}\right)\right)\right)\right).$$

Tako dobimo

$$p(\frac{1}{2}) = 4 + \frac{1}{2}(-4 + \frac{1}{2}(4 + \frac{1}{2}(-2 - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}))))) = \frac{171}{64}.$$

(ii)
Ocenimo še napako. Vemo, da velja

$$|f(x) - p(x)| = |x^3(x-1)^3[0,0,0,1,1,1,x]f| = |x^3(x-1)^3| \cdot |\frac{f^{(6)}(\zeta)}{6!}|.$$

Šesti odvod funkcije je enak

$$f^{(6)}(x) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (-1)^6}{(1+x)^7}.$$

Torej velja $f^{(6)}(\zeta) \leq 4 \cdot 6!$. Ocenimo še

$$|x^3(x-1)^3| = |x(x-1)|^3 \leq (\frac{1}{2}\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{4^3}.$$

Dobili smo oceno

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4^3}\frac{4 \cdot 6!}{6!} = \frac{1}{16}.$$

■

Naloga 2.7 *Izračunaj deljeno diferenco*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]\left(\frac{x}{1+x}\right),$$

kjer so točke različne, tj. $x_j \neq x_i$ *za* $i \neq j$.

Rešitev. Označimo $f(x) = \frac{x}{1+x}$, Nalogo rešimo z indukcijo. Najprej poglejmo, kaj dobimo za bazo indukcije in še en primer.

$$[x_0, x_1]f = \frac{[x_1]\frac{x}{1+x} - [x_0]\frac{x}{1+x}}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{x_1}{1+x_1} - \frac{x_0}{1+x_0}}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 + x_0x_1 - x_0 - x_0x_1}{(x_1 - x_0)(1 + x_1)(1 + x_0)}$$

$$= \frac{1}{(1 + x_0)(1 + x_1)}.$$

$$[x_0, x_1, x_2]f = \frac{[x_0, x_1]\frac{x}{1+x} - [x_1, x_2]\frac{x}{1+x}}{x_1 - x_3} = \frac{\frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)} - \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)}}{x_0 - x_2} =$$

$$\frac{1 + x_2 - 1 - x_0}{(1 + x_0)(1 + x_1)(1 + x_2))(x_0 - x_0)} = \frac{-1}{(1 + x_0)(1 + x_1)(1 + x_2)}.$$

Naša indukcijska predpostavka bo torej

$$[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]\frac{x}{1+x} = \frac{(-1)^n}{(1 + x_0)(1 + x_1)\ldots(1 + x_{n-1})}.$$

Tako dobimo

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]f = \frac{[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]f - [x_1, \ldots, x_n]f}{x_0 - x_n} =$$

$$\frac{(-1)^n\frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)\ldots(1+x_n)} - (-1)^n\frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)\ldots(1+x_n)}}{x_0 - x_n} =$$

$$\frac{(-1)^n(1 + x_n - 1 - x_0)}{(1 + x_0)(1 + x_1)\ldots(1 + x_n)(x_0 - x_n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(1 + x_0)(1 + x_1)\ldots(1 + x_n)}.$$

■

Naloga 2.8 *Izračunaj interpolacijski polinom s pomočjo deljenih diferenc za podatke* $p(0) = -2$, $p(1) = 2$, $p(3) = 4$, $p(4) = -10$.

Naloga 2.9 *Aproksimiraj funkcijo* $f(x) = \sin(x)$ *na* $[0, \frac{\pi}{4}]$ *z:*

(i). odsekoma linearnim zlepkom,

(ii). odsekoma Hermiteovim zlepkom.

Za obe točki uporabi ekvidistantno delitev. Na koliko delov moramo razdeliti interval, da je napaka manjša od $5 \cdot 10^-6$.

Naloga 2.10 *Izračunaj napako interpolacije za* $f(x) = \sin(x)$ *na* $[0, \frac{\pi}{6}]$ *s točkami* $0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}$ *splošno in pri Hermitovi interpolaciji, kjer zahtevamo še ujemanje odvodov.*

Rešitev. Vemo, da velja

$$|f(x) - p_3(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f| =$$

$$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{f^{(3)}(\zeta)}{3!}|.$$

Pišimo še $h = \frac{\pi}{12}$. Tako velja $x_i = x_0 + i \cdot h$. Izračunati moramo $||x(x-h)(x-2h)||_\infty$ na $[0, \frac{\pi}{6}]$. Izračunajmo odvod

$$(x(x-h)(x-2h))' = x(x-h) + (x-h)(x-2h) + x(x-2h) =$$

$$3x^2 - 6hx + 2h^2 = 3(x-h)^2 - h^2.$$

Ničli sta torej $x_{1,2} = h(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3})$. Samo ena leži na našem intervalu. Makismum je torej

$$|(h + \frac{\sqrt{3}}{3}h)(\frac{\sqrt{3}}{3}h)(\frac{\sqrt{3}}{3} - h)| = |h^3\frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \frac{1}{3})| = \frac{2}{9}\sqrt{3}h^3.$$

Torej je

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{2}{9}\sqrt{3}h^3\frac{f^{(3)}(\zeta)}{3!} = \frac{\sqrt{3}}{27}(\frac{\pi}{12})^3 \doteq 1.1510^{-3}.$$

V primeru Hermitove interpolacije dobimo

$$|f(x) - p_6(x)| = |(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x]f| =$$

$$|x^2(x-h)^2(x-2h)^2\frac{f^{(6)}(\zeta)}{3!}|.$$

Naredimo iste ocene kot prej in dobimo

$$|f(x) - p_6(x)| \leq (\frac{2}{9}\sqrt{3}h^3)^2\frac{f^{(6)}(\zeta)}{5!} = (\frac{\pi}{12})^8\frac{1}{9720} \doteq 3.3 \cdot 10^{-8}.$$

Upoštevamo še, da velja

$$||\sin^{(6)}||_{\infty,[0,\pi/6]} = \frac{1}{2}.$$

∎

2.1 Numerično odvajanje

Naj bo $f \in C^1(I)$. Za približek odvoda funkcije vzamemo kar odvod interpolacijskega polinoma. Velja namreč

$$f(x) = I_n(x) + (x-x_0)\dots(x-x_n)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f.$$

Z odvajanjem enakosti dobimo

$$f'(x) = I_n'(x) + \underbrace{\omega'(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f + \omega(x)([x_0, x_1, \dots, x_n, x]f))'}_{\text{napaka}}.$$

Za približek vzamemo kar odvod interpolacijskega polinoma $I_n'(x)$.

Naloga 2.11 (Ni bila narejena na vajah) *Preko deljenih diferenc izrazi formulo za odvod $f'(x_0)$ s točkami $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$. Točke so ekvidistantne.*

Rešitev. Velja

$$f(x)=\overbrace{f(x_0)+(x-x_0)[x_0,x_1]f+(x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2]f}^{p_2(x)}+\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}_{\omega(x)}[x_0,x_1,x_2,x]f.$$

Izračunajmo odvod v $x=x_0$.

$$f'(x_0)=([x_0,x_1]f+(2x-x_0-x_1)[x_0,x_1,x_2]f)|_{x=x_0}+\omega'(x)[x_0,x_1,x_2,x]f|_{x=x_0}.$$

$$f'(x_0)=[x_0,x_1]f+(-h)[x_0,x_1,x_2]f+(-h)(-2h)\frac{f^{(3)}(\zeta}{6}$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}-h\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}}{x_2-x_0}+2h^2\frac{f^{(3)}(\zeta)}{6}.$$

$$f'(x_0)=\frac{2f(x_1)-2f(x_0)-f(x_2)+f(x_1)-f(x_0)}{2h}+h^2\frac{f^{(3)}(\zeta)}{3}$$

$$f'(x_0)=\frac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h}+\frac{h^3}{3}f^{(3)}(\zeta).$$

■

Naloga 2.12 *Izpelji formulo za numerično odvajanje*

$$f'(x_2)=Af(x_0)+Bf(x_1)+Cf(x_2)+Df(x_3)+Ef(x_4)+Ff^{(m)}(\zeta).$$

Točke x_i so ekvidistantne. Kakšna je ocena za celotno napako (zanemari zaokrožitveno), če računamo na šest decimalk. Za funkcijo $f(x)=\frac{1}{1+x}$ določi optimalen h.

Rešitev. Uporabimo metodo nedoločenih koeficientov. Koeficiente A,B,C,D,E določimo tako, da bo formula točna za polinome čim višjih stopenj.

Izberemo primerno bazo $1,x-x_2,(x-x_2)^2,(x-x_2)^3,\ldots$. Vstavljamo dokler enačbe niso linearno odvisne.

$$
\begin{aligned}
1 &: 0=A+B+C+D+E & (2.1)\\
x-x_2 &: 1=(-2h)A+(-h)B+hD+2hE & (2.2)\\
(x-x_2)^2 &: 0=4h^2A+h^2B+h^2D+4h^2E & (2.3)\\
(x-x_2)^3 &: 0=-8h^3A-h^3B+h^3D+8h^3E & (2.4)\\
(x-x_2)^4 &: 0=16h^4A+h^4B+h^4D+16h^4E & (2.5)
\end{aligned}
$$

Dobimo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
0 &= A+B+C+D+E & (2.6)\\
\frac{1}{h} &= -2A-B+D+2E & (2.7)\\
0 &= 4A+B+D+4E & (2.8)\\
0 &= -8A-B+D+8E & (2.9)\\
0 &= 16A+B+D+16E. & (2.10)
\end{aligned}
$$

Iz tretje in pete enačbe dobimo $0=12A+12E$, kar je $A=-E$. It druge in četrte enačbe dobimo $\frac{1}{h}=6A-6E=12A$, kar nam da $A=\frac{1}{12h}$. Iz prve in tretje enačbe dobimo $C=0$. Potem iz prve enačbe sledi $B=-D$. Iz četrte enačbe pa potem $D=-8E=\frac{2}{3h}$. Iz tega dobimo

$$f'(x_2)=\frac{1}{12h}(f(x_0)-8f(x_1)+8f(x_3)-f(x_1))+Ff^{(m)}(\zeta).$$

Za ostanek dobimo

$$(x-x_2)^5 \quad : \quad 0 = \frac{1}{12h}(-32h^5 + 8h^5 + -32h^5) + F5!, \tag{2.11}$$

saj nastavek ni več točen za polinome stopnje 5. Tako dobimo $4h^4 = 5!F$, kar je $F = \frac{h^4}{30}$. ∎

2.2 Numerično integriranje

Naloga 2.13 *Naj bodo točke ekvidistantne. Z metodo nedoločenih koeficientov izpelji sredinsko pravilo*

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + Rf.$$

Zapiši tudi sestavljeno pravilo in določi ostanek.

Naloga 2.14 *Naj bodo točke ekvidistantne. Z metodo nedoločenih koeficientov izpelji Simpsonovo pravilo*

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + Rf.$$

Zapiši tudi sestavljeno pravilo in določi ostanek.

Rešitev. Uporabimo metodo nedoločenih koeficentov. Določimo A, B, C tako, da bo formula

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df^{(m)}(\zeta)$$

točna za polinome čim višjih stopenj. Za bazo polinomov vzamemo $1, (x-x_0), (x-x_0)^2, \ldots$. Ko te polinome po vrsti vstavimo v nastavek, dobimo enačbe:

$$\begin{aligned} 2h &= A + B + C \\ \frac{(2h)^2}{2} &= Bh + 2Ch \\ \frac{(2h)^3}{3} &= Bh^2 + 4Ch^2 \\ . \end{aligned}$$

Tako dobimo sistem enačb:

$$2h = A + B + C \tag{2.12}$$
$$2h = B + 2C \tag{2.13}$$
$$\frac{8h}{3} = B + 4C \tag{2.14}$$

Upoštevali smo

$$\int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)^n = \frac{(x_2-x_0)^{n+1}}{n} = \frac{(2h)^{n+1}}{n}.$$

Če odštejemo drugo od tretje dobimo $C = \frac{h}{3}$. Odštejemo še tretjo do prve in dobimo $A = C = \frac{h}{3}$. Nazadnje dobimo še $B = \frac{4h}{3}$. Tako smo dobili

$$\int_{x_0}^{x_2} = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + Df^{(m)}(\zeta).$$

Določiti moramo še ostanek. Vstavimo še naslednje bazne polinome in poglejmo, če je formula zanje točna. Za $(x-x_0)^3$ dobimo, da je formula točna, za $(x-x_0)^4$ pa ne več. Torej je $m=4$.

$$\begin{aligned} \frac{(2h)^4}{4} &= \frac{h}{3}(4h^3+8h^3)=4h^4 \\ \frac{(2h)^5}{5} &= \frac{h}{3}(4h^4+16h^4)+24D \end{aligned}$$

Tako dobimo $24D=\frac{32h^5}{5}-\frac{20h^5}{3}$, torej je $D=-\frac{1}{90}h^5$. Ostanek je $Rf=-\frac{1}{90}h^5f^{(4)}(\zeta)$.

Izpeljimo še sestavljeno pravilo. Število delilnih točk mora biti $2n+1$. Tako je $a=x_0$, $b=x_{2n}$ in $h=\frac{b-a}{2n}$. Tako dobimo

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{3}\left(f(x_{2_i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})\right).$$

Ostanek je enak

$$Rf=\sum_{i=0}^{n-1}-\frac{1}{90}h^5f^{(4)}(\zeta_i)=-\frac{1}{90}h^5nf^{(4)}(\eta)=-\frac{1}{90}h^4\frac{b-a}{2}f^{(4)}(\eta).$$

■

Naloga 2.15 *Integral* $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ *računamo s sestavljenim trapeznim pravilom. Kolikšen naj bo* h*, da bo napaka metode manjša od* $10^{(-6)}$.

Rešitev. Trapezno pravilo je $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))-\frac{h^3}{12}f^{(2)}(\zeta)$. Za $h=\frac{b-a}{n}$ in $x_i=a+ih$ dobimo

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)+R_if\right),$$

kjer je

$$Rf=\sum_{i=0}^{n-1}R_if=\sum_{i=0}^{n-1}-\frac{h^3}{12}f^2(\zeta_i)=-\frac{h^3}{12}nf^2(\eta)=-\frac{h^2}{12}(b-a)f^2(\eta).$$

Naše sestavljeno pravilo je

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_n))+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right)-\frac{h^2}{12}(b-a)f^{(2)}(\eta).$$

Drugi odvod funkcije je enak

$$f''(x)=(-2xe^{-x^2})'=4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}=2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

Maksimum e^{-x^2} je dosežen v $x=0$. Funkcija $2x^2-1$ na intervalu $[0,1]$ zavzame vrednosti $[-1,1]$. Torej je maksimum $|f''(x)|$ dosežen v $x=0$ in je enak 2. Torej mora veljati

$$|Rf|\le\frac{h^2}{12}(1-0)2<10^{-6}.$$

Tako dobimo $h^2<6\cdot10^{-6}$ in $h<\sqrt{6}\cdot10^{-3}$. Velja še $nh=1$. Torej mora veljati $n>408.24$, kar je $n\ge 409$. ■

Naj bo funkcija neskončnokrat zvezno odvedljiva. Oznaka

$$T_h(f) = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

predstavlja sestavljeno trapezno pravilo za ekvidistantne točke na intervalu $[a, b]$. Velja

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = T_h(f) + a_{1,0}h^2 + a_{2,0}h^4 + a_{3,0}h^6 + \ldots = T_h(f) + \sum_{j=1}^{m} a_{j,0}h^{2j} + Rf.$$

Zapišimo enakosti še za $\frac{h}{2}$ in $\frac{h}{4}$.

$$\begin{aligned} I(f) &= T_h(f) + a_{1,0}h^2 + a_{2,0}h^4 + a_{3,0}h^6 + \ldots \\ I(f) &= T_{\frac{h}{2}}(f) + a_{1,0}(\frac{h}{2})^2 + a_{2,0}(\frac{h}{2})^4 + a_{3,0}(\frac{h}{2})^6 + \ldots \end{aligned}$$

Če drugo enačbo pomnožimo s 4 in odštejemo prvo, dobimo

$$4I(f) - I(f) = 4T_{\frac{h}{2}} - T_h(f) + \tilde{a}_{2,1}h^4 + \tilde{a}_{3,1}h^6 + \ldots,$$

kar nam da

$$I(f) = \frac{4T_{\frac{h}{2}}(f) - T_h(f)}{3} + a_{2,1}h^4 + a_{3,1}h^6 + \ldots.$$

Tako smo dobili nov približek za integral

$$T^{(1)}_{\frac{h}{2}}(f) = \frac{4T_{\frac{h}{2}}(f) - T_h(f)}{3}.$$

Tako dobimo shemo oblike

$$T^{(j)}_{\frac{h}{2^k}}(f) = \frac{4^j T^{(j-1)}_{\frac{h}{2^k}} - T^{(j-1)}_{\frac{h}{2^{k-1}}}}{4^j - 1}.$$

Kjer računamo $T_{\frac{h}{2}}$ na sledeči način

$$T_{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}T_h(f) + \frac{h}{2}(f(\frac{x_0 + x_1}{2}) + \ldots + f(\frac{x_{n-1} + x_n}{2})).$$

Naloga 2.16 *Z Rombergovo ekstrapolacijo (sestavljene) trapezne metode izračunaj integral* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$. *Za začetni* h *vzemi* $h = \frac{\pi}{4}$. *Naredi dva koraka Rombergove ekstrapolacije.*

h'			
$\frac{\pi}{4}$	$T_h(f)$		
$\frac{\pi}{8}$	$T_{\frac{h}{2}}(f)$	$T^{(1)}_{\frac{h}{2}}(f)$	
$\frac{\pi}{16}$	$T_{\frac{h}{4}}(f)$	$T^{(1)}_{\frac{h}{4}}(f)$	$T^{(2)}_{\frac{h}{4}}(f)$

Rešitev. Nalogo rešimo z direktno uporabo sestavljene trapezne metode in formule za Rombergovo ekstrapolacijo.

$$T_h(f) = \frac{\pi}{8}\left(\sin(0) + \sin(\frac{\pi}{2})\right) + \frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4}) \doteq 0.948059$$

$$T_{h/2}(f) = \frac{1}{2}T_h(f) + \frac{\pi}{16}\left(\sin(\frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{3\pi}{8})\right) \doteq 0.987116$$

$$T_{h/4}(f) = \frac{1}{2}T_{h/2}(f) + \frac{\pi}{16}\left(\sin(\frac{\pi}{16}) + \sin(\frac{3\pi}{16}) + \sin(\frac{5\pi}{16}) + \sin(\frac{3\pi}{8})\right) \doteq 0.996785$$

$$T^{(1)}_{\frac{h}{2}}(f) = \frac{4T_{h/2} - T_h(f)}{4-1} \doteq 1.000135$$

$$T^{(1)}_{\frac{h}{4}}(f) = \frac{4T_{h/4} - T_{h/2}(f)}{4-1} \doteq 1.000008$$

$$T^{(2)}_{\frac{h}{4}}(f) = \frac{16T^{(1)}_{\frac{h}{4}}(f) - T^{(1)}_{\frac{h}{2}}(f)}{16-1} \doteq 0.9999995$$

■

Naloga 2.17 *Izpelji Gaussovo integracijsko pravilo na dveh točkah.*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = Af(x_0) + Bf(x_1) + Rf.$$

V splošnem je Gaussovo integracijsko pravilo

$$\int_a^b = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + Rf$$

na vozlih x_0, x_1, …, x_n točno za polinome stopnje $2n+1$. Pri ostanku je torej $m \geq 2n+2$. Vozle določimo tako, da je $\omega(x)$ pravokoten na polinome stopnje manjše ali enake n. Veljati mora $\int \omega(x)\rho(x)x^i = 0$, za $i = 1, \ldots, n$. Tukaj je $\omega(x) = (x-x_0)\ldots(x-x_n)$, $\rho(x)$ pa pozitivna integrabilna funkcija. Koeficiente potem določimo z metodo nedoločenih koeficientov.

Rešitev. Določiti moramo vozla x_0 in x_1, tako da bo veljalo $\int_{-1}^{1}\omega(x)dx = 0$ in $\int_{-1}^{1}\omega(x)xdx = 0$. Tako bo formula točna za polinom stopnje ≤ 3. Najprej določimo uteži, potem pa recimo z metodo nedoločenih koeficientov določimo še A in B. Izračunajmo integrale.

$$\int_{-1}^{1}\omega(x) = \int_{-1}^{1}(x-x_0)(x-x_1)dx = \int_{-1}^{1} x^2 - (x_0+x_1)x + x_0x_1 dx$$

$$\left.\frac{x^3}{3} - (x_0+x_1)\frac{x^2}{2} + x_0x_1x\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + 2x_0x_1$$

$$\int_{-1}^{1} x\omega(x)f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 - (x_0+x_1)x^2 + x_0x_1xdx =$$

$$\left.\frac{x^4}{4} - (x_0+x_1)\frac{x^3}{3} + x_0x_1\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = -2(x_0+x_1)$$

Dobimo enačbi

$$2 + \frac{2}{3}x_0x_1 = 0 \quad \text{in} - 2(x_0+x_1) = 0.$$

Tako dobimo $x_0x_1 = -\frac{1}{3}$ in $x_1 = -x_0$. To nam da $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ in $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, če naj velja $x_1 \geq x_0$. Z metodo nedoločenih koeficentov določimo še A in B in ostanek.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 1dx &= 2 = A + B \\ \int_{-1}^{1} xdx &= 0 = -A\frac{1}{\sqrt{3}} + B\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Iz enačb $A + B = 2$ in $A - B = 0$ dobimo $A = B = 1$. Določimo še ostanek. Vemo, da je formula točna za vsaj polinome stopnje 3. Torej je $m = 4$ in $(x^4)^{(4)} = 4! = 24$. Izračunajmo

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + C24,$$

torej je $C = \frac{1}{135}$. Naša formula je

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{135} f^{(4)}(\zeta).$$

■

Naloga 2.18 (Ni bila narejena na vajah) *Izračunaj izlimitirani integral* $\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$ *na dva načina:*

(i). S substitucijo odstrani singularnost in uporabi Simpsonovo pravilo.

(ii). Izpelji formulo

$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h) + Df^{(m)}(\zeta)$$

z metodo nedoločenih koeficientov, tako da bo formula točna za polinome čim večjih stopenj.

Preizkusi oba načina na $\int_0^{0.2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$.

Rešitev.

(i). Uvedemo substitucijo $t = \sqrt{x}$, $dx = 2tdt$ in na integralu uporabimo Simpsonovo pravilo.

$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{\sqrt{2h}} \frac{f(t^2)}{t} 2tdt = 2\int_0^{\sqrt{2h}} f(t^2)dt$$

Simpsonovo pravilo je

$$\int_{x_0}^{x_2} g(x)dx = \frac{h}{3}\left(g(x_0) + 4g(x_1) + g(x_2)\right) - \frac{1}{90}h^5 g^{(4)}(\zeta).$$

To pravilo uporabimo za $g(t) = f(t^2)$, $x_0 = 0$, $x_1 = \sqrt{2h}/2$, $x_2 = \sqrt{2h}$ in zamenjamo h z $\sqrt{2h}/2$. Naš integral je enak

$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = \frac{\sqrt{2h}}{6}\Big(f(0) + 4f(\frac{h}{2}) + f(2h)\Big) - \frac{1}{90}(\sqrt{2h}/2)^5 g^{(4)}(\zeta).$$

(ii). Za bazo vzamemo 1, x, x^2, ... Izračunamo integrale

$$\begin{aligned}
\int_0^{2h} x^{\frac{-1}{2}} &= 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{2h} = 2\sqrt{2h} \\
\int_0^{2h} x^{\frac{1}{2}} &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2h} = \frac{2}{3}\sqrt{2h}2h \\
\int_0^{2h} x^{\frac{3}{2}} &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{2h} = \frac{2}{5}\sqrt{2h}(2h)^2
\end{aligned}$$

Tako dobimo enačbe

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2h} &= A + B + C \\
\frac{2}{3}\sqrt{2h}2h &= Bh + 2Ch \\
\frac{2}{5}\sqrt{2h}4h^2 &= Bh^2 + 4Ch^2.
\end{aligned}$$

Ko rešimo sistem enačb dobimo $A = \frac{12}{15}\sqrt{2h}$, $B = \frac{16}{15}\sqrt{2h}$, $C = \frac{2}{15}\sqrt{2h}$. Določimo še napako, $f(x) = x^3$,

$$\int_0^{2h} x^{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}8h^3\sqrt{2h} = \frac{2}{15}\sqrt{2h}(6f(0) + 8f(h) + f(2h)) + D6.$$

Kar je

$$\frac{2}{7}8h^3\sqrt{2h} = \frac{2}{15}\sqrt{2h}16h^3 + 6D.$$

Tako dobimo $D = \frac{8}{315}h^3\sqrt{2h}$.

Preizkus obeh metod na konkretnem primeru je prepuščen bralcu.

■