UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

Marjeta Krajnc, dopolnil Andrej Muhič

NUMERIČNE METODE 2

finančna matematika

ZBIRKA NALOG Z REŠITVAMI

delovna verzija, 24. april 2014

Kazalo

Poglavje 1

Teorija aproksimacije

1.1. Naloge iz vaj

Naloga 1.1. *Naj bo* $f(x) = x^3 - 2x + 4$ *in interval* $I = [-1, 1]$. *Izračunaj* $\|f\|_\infty$ *in* $\|f\|_2$, *če je skalarni produkt podan kot*

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Izračunajmo $\|f\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$. Maksimum funkcije na intervalu je dosežen v lokalnem ekstremu funkcije f ali je ena izmed robnih vrednosti. Poiščimo ekstrem.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 1 = 0\\
x^2 &= \frac{2}{3}, \quad x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\\
f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) &= (-\sqrt{\frac{2}{3}})^3 - 2(-\sqrt{\frac{2}{3}}) + 4 = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \doteq 5.08866\\
f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) &= (\sqrt{\frac{2}{3}})^3 - 2(\sqrt{\frac{2}{3}}) + 4 = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \doteq 2.91134\\
f(-1) &= 5\\
f(1) &= 3
\end{aligned}$$

Tako dobimo $\|f\|_\infty = \max\{4 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, 4 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, 5, 3\} = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \doteq 5.08866$. V splošnem je določitev maksimuma funkcije numerično težak problem, ki je lahko zelo občutljiv, če ima funkcija veliko lokalnih ekstremov na intervalu.

Izračunajmo še drugo normo $\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} f(x)^2\,\mathrm{d}x$:

$$\int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x + 4\right)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^6 - 4x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 16x + 16\,\mathrm{d}x = \frac{3502}{105}$$

Tako dobimo $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{3502}{105}} \doteq 5.77515$.

Naloga 1.2. *Naj bo* $X = \mathbb{R}^2$. *Podan je še vektor* $f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. *Poišči vektorja* $\tilde{f}_1$ *in* $\tilde{f}_2$ *v naslednjih prostorih* S_1 *in* S_1, *ki sta najbližje* f *v* $\|\cdot\|_\infty$:

a)

$$S_1 = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b)

$$S_2 = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Rešitev:

a)

$$\left\| f - \tilde{f}_1 \right\|_\infty = \min_{s \in S_1} \|f - s\|_\infty = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \min \max\{ \left| \frac{1}{2} - \alpha \right|, 1\} = 1.$$

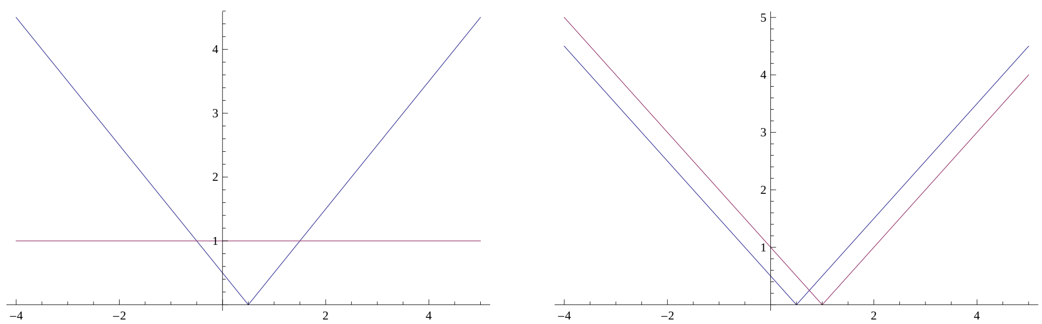
Oglejmo si za kakšne α dobimo to normo.

$$\left| \frac{1}{2} - \alpha \right| \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}.$$

b)

$$\left\| f - \tilde{f}_2 \right\|_\infty = \min_{s \in S_2} \|f - s\|_\infty = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \min \max\{ \left| \frac{1}{2} - \alpha \right|, |1 - \alpha|\} = \frac{1}{4}.$$

Iz slike je jasno, da je naša optimalna točka presečišče krivulj $\alpha - \frac{1}{2}$ in $1 - \alpha$, $\alpha - \frac{1}{2} = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$.



1.2. Bernsteinova aproksimacija

Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n so definirani kot

$$b_{n,i}(x) := \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Linearno kombinacijo Bernsteinovih baznih polinomov

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i b_{n,i}$$

imenujemo Bernsteinov polinom stopnje n.

Bernsteinova aproksimacija za funkcijo $f \in \mathcal{C}([0,1])$ je oblike

$$B_n f(x) := \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n,i}(x).$$

Naloga 1.3. *Zapišite in narišite vse Bernsteinove bazne polinome stopnje* $n = 0, 1, 2$. *Kakšne so njihove vrednosti pri* $x = 0, 1$*?*

Rešitev:
Konstanten Bernsteinov polinom je en sam in je enak $b_{0,0}(x) = 1$. Linearna Bernsteinova bazna polinoma sta podana z

$$b_{1,0}(x) = (1-x), \quad b_{1,1}(x) = x,$$

pri $n = 2, 3, 4$ pa imamo

$$\begin{aligned}
n = 2: &\quad b_{2,0}(x) = (1-x)^2, \quad b_{2,1}(x) = 2x(1-x), \quad b_{2,2}(x) = x^2, \\
n = 3: &\quad b_{3,0}(x) = (1-x)^3, \quad b_{3,1}(x) = 3x(1-x)^2, \\
&\quad b_{3,2}(x) = 3x^2(1-x), \quad b_{3,3}(x) = x^3, \\
n = 4: &\quad b_{4,0}(x) = (1-x)^4, \quad b_{4,1}(x) = 4x(1-x)^3, \quad b_{4,2}(x) = 6x^2(1-x)^2, \\
&\quad b_{4,3}(x) = 4x^3(1-x), \quad b_{4,4}(x) = x^4.
\end{aligned}$$

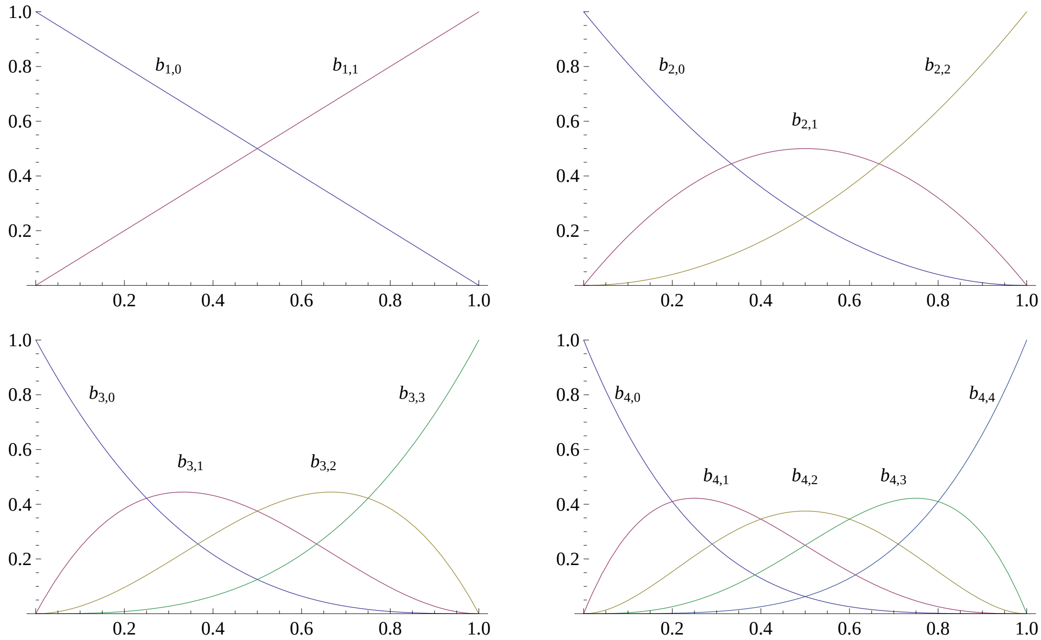
Za nekonstantne Bernsteinove bazne polinome velja

$$b_{n,i}(0) = b_{n,i}(1) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

ter

$$b_{n,0}(0) = 1, \quad b_{n,n}(0) = 0, \quad b_{n,0}(1) = 0, \quad b_{n,n}(1) = 1.$$

Grafi Bernsteinovih baznih polinomov stopenj ≤ 4 so prikazani na sliki 1.1.



Slika 1.1: Grafi Bernsteinovih baznih polinomov stopenj ≤ 4.

Naloga 1.4. *Določite, kje na intervalu* $[0, 1]$ *je dosežen maksimum izraza*

$$\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad n \geq 1,$$

kolikšen je in kam gre, ko gre $n \to \infty$.

Rešitev:
Ta izraz predstavlja Bernsteinov bazni polinom. Če je $i = 0$ ali $i = n$, je maksimalna vrednost dosežena v enem od krajišč in je enaka 1. Za $i \neq 0$ in $i \neq n$ sta vrednosti v obeh krajiščih enaki nič. Ekstrem polinoma je tako dosežen pri ničli odvoda

$$b'_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^{i-1} (1-x)^{n-i-1} (i - nx),$$

to je v točki $x = \frac{i}{n}$. Vrednost polinoma je v tej točki enaka

$$b_{n,i}\left(\frac{i}{n}\right) = \binom{n}{i} \frac{i^i}{n^n} (n-i)^{n-i}.$$

Z uporabo Stirlingove formule $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ dobimo, da je za velike n

$$b_{n,i}\left(\frac{i}{n}\right) \sim \sqrt{\frac{n}{n-i}} \frac{i^i}{i! e^i}$$

in v limiti velja

$$\lim_{n \to \infty} b_{n,i}\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^i}{i! e^i} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi i}}.$$

Naloga 1.5. *Dokažite, da Bernsteinovi bazni polinomi zadoščajo rekurzivni zvezi*

$$b_{n,i}(x) = (1-x)b_{n-1,i} + xb_{n-1,i-1}.$$

Dokažite tudi, da tvorijo particijo enote.

Rešitev:
Prva trditev sledi direktno iz definicije Bernsteinovih baznih polinomov in lastnosti binomskega simbola:

$$\begin{aligned}(1-x)b_{n-1,i} + xb_{n-1,i-1} &= (1-x)\binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-1-i} + x\binom{n-1}{i-1}x^{i-1}(1-x)^{n-i} = \\ &= \left(\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\right)x^i(1-x)^{n-i} = \\ &= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = b_{n,i}(x).\end{aligned}$$

Da tvorijo polinomi particijo enote dobimo iz

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = (x+(1-x))^n = 1.$$

Naloga 1.6. *Izpeljite formulo za k-ti odvod Bernsteinovega polinoma*

$$B_nf(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n,i}(x).$$

Rešitev:
Odvod Bernsteinovega baznega polinoma lahko zapišemo rekurzivno kot

$$b'_{n,i}(x) = n\left(b_{n-1,i-1}(x) - b_{n-1,i}(x)\right).$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}B'_nf(x) &= \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b'_{n,i}(x) = n\left(\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n-1,i-1}(x) - \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n-1,i}(x)\right) = \\ &= n\left(\sum_{i=-1}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right) b_{n-1,i}(x) - \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n-1,i}(x)\right) = \\ &= n\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right) b_{n-1,i}(x),\end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{n} = 0$. Če definiramo operator Δ, imenovan prema diferenca, ki deluje na zaporedju $(g_i)_i$ kot

$$\Delta g_i := g_{i+1} - g_i, \quad \Delta^k g_i = \Delta\left(\Delta^{k-1}g_i\right) = \Delta^{k-1}g_{i+1} - \Delta^{k-1}g_i,$$

n	$\|f_1 - B_n f_1\|_\infty$	α
1	0.2500000000	0
2	0.1844862627	0.438414701
3	0.1530507046	0.460719630
4	0.1336583404	0.470944966
5	0.1201654999	0.476898777
6	0.1100800173	0.48081219
7	0.1021724915	0.48358562
8	0.09575685320	0.48565568
9	0.09041599314	0.48726060
10	0.08587975866	0.48854169

Tabela 1.1: Tabela napak aproksimacije funkcije f_1 ter ocena reda aproksimacije.

potem je

$$B_n' f(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n-1,i}(x).$$

Z istim sklepanjem vidimo, da velja

$$B_n^{(k)} f(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n-k,i}(x),$$

kar se preprosto dokaže z indukcijo.

Naloga 1.7. *Numerično preverite obnašanje norme razlike $\|f - B_n f\|_\infty$ za funkcije*

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = x\sqrt{x}, \quad f_3(x) = x^2\sqrt{x}.$$

Kaj lahko sklepate iz rezultatov?

Rešitev:
Iz dokaza Weierstrassovega izreka (glej [4], str. 18) vemo, da za poljubno zvezno funkcijo f zaporedje Bernsteinovih polinomov $B_n f$ konvergira proti f v neskončni normi. Vprašanje pa je, kako hitro konvregira. Predpostavimo, da se vodilni člen napake $\|f - B_n f\|$ obnaša kot $C\,n^{-\alpha}$, kjer je C konstanta, eksponent α pa lahko numerično ocenimo iz napak

$$e_n = \|f - B_n f\|_\infty \sim C\,n^{-\alpha}, \quad e_m = \|f - B_m f\|_\infty \sim C\,m^{-\alpha}$$

pri dveh različnih stopnjah n in m. In sicer je

$$\alpha \sim \frac{\ln\left(\frac{e_n}{e_m}\right)}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)}.$$

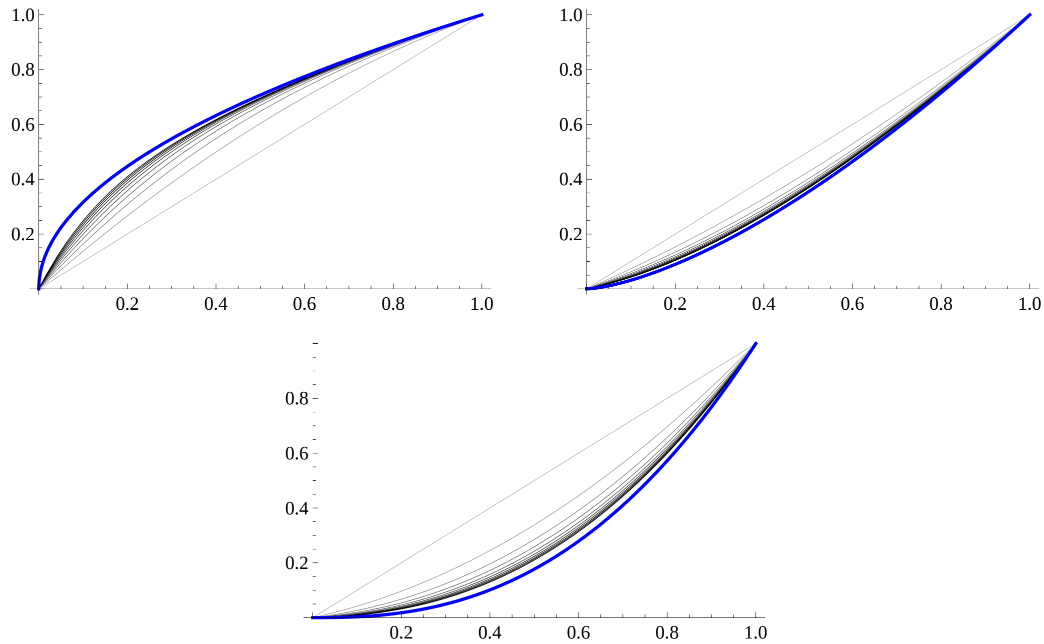
Iz tabel 1.1, 1.2 ter 1.3 sklepamo, da velja

n	$\|f_2 - B_n f_2\|_\infty$	α
1	0.1481481481	0
2	0.07676692312	0.948483863
3	0.05123675526	0.997167697
4	0.03820402729	1.020279824
5	0.03034769802	1.031713748
6	0.02512143254	1.03662618
7	0.02140795477	1.03767818
8	0.01864089304	1.03649674
9	0.01650317863	1.03414478
10	0.01480394535	1.03130934

Tabela 1.2: Tabela napak aproksimacije funkcije f_2 ter ocena reda aproksimacije.

n	$\|f_3 - B_n f_3\|_\infty$	α
1	0.3257301140	0
2	0.1663312329	0.969618007
3	0.1124615677	0.965236289
4	0.08502176846	0.972268510
5	0.06835390061	0.977884829
6	0.05715043611	0.98184555
7	0.04910197335	0.98467160
8	0.04304027580	0.98675598
9	0.03831057179	0.98834641
10	0.03451732820	0.98959671

Tabela 1.3: Tabela napak aproksimacije funkcije f_3 ter ocena reda aproksimacije.



Slika 1.2: Grafi Bernsteinovih polinomov stopenj ≤ 10 za funkcije f_1 (levo zgoraj), f_2 (desno zgoraj) ter f_3 (spodaj).

$$\|f_1 - B_n f_1\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \|f_2 - B_n f_2\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \|f_3 - B_n f_3\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Grafi Bernsteinovih polinomov stopenj $n = 1, 2, \ldots, 10$ skupaj s funkcijo, ki jo aproksimirajo, so prikazani na sliki 1.2.

Naloga 1.8. *Izračunajte Bernsteinov polinom $B_4 f(x)$ za funkcijo $f(x) = \sin(\pi x)$ na intervalu $[0, 1]$. Primerjajte to aproksimacijo s Taylorjevim razvojem $T_4 f(x)$ okrog točke $x = \frac{1}{2}$ do členov stopnje 4.*

Rešitev:
Bernsteinov polinom stopnje 4 za dano funkcijo f je enak

$$\begin{aligned} B_4 f(x) &= \sum_{i=0}^{4} \sin\left(\frac{i}{4}\pi\right)\binom{4}{i} x^i (1-x)^{4-i} = \\ &= 2x(1-x)\left(\sqrt{2}(1-x)^2 + 3x(1-x) + \sqrt{2}x^2\right). \end{aligned}$$

Taylorjev aproksimacijski polinom stopnje n se izračuna kot

$$T_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i,$$

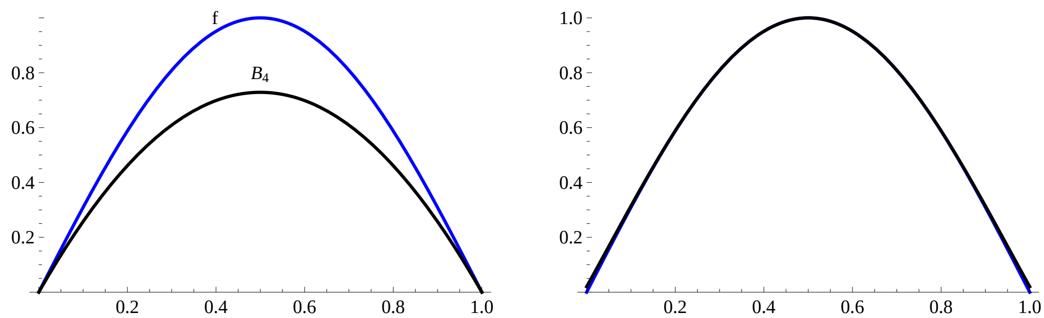
kjer je a točka okrog katere razvijamo. V našem primeru dobimo

$$T_4 f(x) = 1 - \frac{1}{2}\pi^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\pi^4\left(x - \frac{1}{2}\right)^4.$$

x	$\lvert B_4f(x) - f(x)\rvert$	$\lvert B_4f(x) - f(x)\rvert$
0	0	0.019969
$\frac{1}{10}$	0.051679	0.005318
$\frac{2}{10}$	0.126452	$0.958118 \cdot 10^{-3}$
$\frac{3}{10}$	0.199915	$0.84857 \cdot 10^{-4}$
$\frac{4}{10}$	0.252469	$0.133291 \cdot 10^{-5}$
$\frac{1}{2}$	0.271447	0

Tabela 1.4: Primerjava med Bernsteinovim in Taylorjevim aproksimacijskim polinomom stopnje 4 ter funkcijo $f(x) = \sin(\pi x)$.

V tabeli 1.4 je prikazana razlika med obema polinomoma v točkah $\left(\frac{i}{10}\right)_{i=0}^{5}$. Vidimo, da Taylorjev polinom zelo dobro aproksimira funkcijo v okolici točke $x = \frac{1}{2}$. Največja napaka je v krajiščih. Nasprotno B_4 v krajiščih funkcijo interpolira, napaka pa je največja pri $x = \frac{1}{2}$. Iz slike 1.3, kjer sta obe aproksimacijski funkciji prikazani, vidimo, da se graf Taylorjevega polinoma skoraj prekriva s funkcijo f



Slika 1.3: Bernsteinov aproksimacijski polinom B_4 (levo) ter Taylorjev aproksimacijski polinom T_4 (desno) za funkcijo $f(x) = \sin(\pi x)$.

1.3. Enakomerna aproksimacija

Naj bo vektorski prostor $X = \mathcal{C}([a,b])$ prostor zveznih funkcij na intervalu $[a,b]$ opremljen z neskončno normo

$$\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \, .$$

Za podprostor izberemo $S = \mathbb{P}_n$ prostor polinomov stopnje $\leq n$. Ker je S končno dimenzionalen, obstaja za vsako zvezno funkcijo f element najboljše aproksimacije p^* iz podprostora S, ki ga imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije**. Izkaže se, da je tudi enoličen. Skonstruiramo ga s prvim ali drugim **Remesovim postopkom**. Oba postopka sta iterativna in ju ponavljamo, dokler ne dosežemo predpisane natančnosti.
Naj bo množica $E \subset [a,b]$ in $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Minimaks za funkcijo f na množici E in podprostoru $\mathbb{P}_n$ definiramo kot

$$M_n(E;f) := \min_{p\in\mathbb{P}_n} \|f-p\|_{\infty,E} = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \max_{x\in E} |f(x)-p(x)| \, .$$

Razliki $r := f - p$, kjer je p aproksimacijski polinom, pravimo residual.

IZREK 1.1. *Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Polinom $p \in \mathbb{P}_n$ je polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f iz prostora $\mathbb{P}_n$ natanko tedaj, ko residual $r = f - p$ alternirajoče doseže svojo normo v vsaj $n+2$ točkah $x_i \in [a,b]$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$. za f.*

Prvi Remesov postopek.
Izberemo začetno množico $n+2$ točk

$$E_0 = \{x_i : a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b\} \, .$$

Na k-tem koraku naredimo sledeče. Najprej poiščemo polinom $p_k^* \in \mathbb{P}_n$ najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo f na množici E_k. To je polinom, ki zadošča pogojem

$$f(x_i) - p_k^*(x_i) = (-1)^i m, \quad x_i \in E_k, \quad i = 0,1,\ldots,n+1.$$

Nato poiščemo točko $y \in [a,b]$, pri kateri je dosežen ekstrem residuala

$$|f(y) - p_k^*(y)| = \|f - p_k^*\|_{\infty,[a,b]} \, .$$

Če je

$$|f(y) - p_k^*(y)| - m < \epsilon,$$

potem postopek končamo, saj smo izračunali polinom na zahtevano natančnost ϵ. V nasprotnem primeru naredimo zamenjavo točk v množici E_k. In sicer zamenjamo eno točko iz E_k z izračunanim y, tako da ohranimo alternacijo residuala. Novo množico proglasimo za E_{k+1} in nadaljujemo postopek.

Naloga 1.9. *Poiščite premico $p(x) = kx + n$ najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, 1]$. Uporabite prvi Remesov postopek.*

Rešitev:
Najprej izberimo začetno množico E_0, ki vsebuje tri točke iz intervala $[0, 1]$. Te točke lahko izberemo kar ekvidistantno:

$$E_0 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Začnimo s prvim korakom. Iščemo polinom $p_0^*(x) = k_0x + n_0 \in \mathbb{P}_1$ najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo f na množici E_0. Določen je z rešitvijo sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} 1 - n_0 &= m_0 \\ \sqrt{e} - \frac{1}{2}k_0 - n_0 &= -m_0 \\ e - k_0 - n_0 &= m_0, \end{aligned}$$

ki je enaka

$$k_0 = e - 1 = 1.71828, \quad n_0 = -\frac{e}{4} + \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{3}{4} = 0.89479, \quad m_0 = \frac{e}{4} - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{1}{4} = 0.10521.$$

Točko y, kjer je dosežen ekstrem residuala $r_0 = f - p_0^*$, dobimo z odvajanjem. In sicer sledi iz enačbe

$$(e^x - p_0^*(x))' = e^x - (e - 1) = 0,$$

da je $y = \ln(e - 1)$, saj je $|p_0^*(0)| = |p_0^*(1)| = m_0 < \ln(e - 1)$. Iz E_0 nato določimo novo množico

$$E_1 = \{0, \ln(e - 1), 1\},$$

pri čemer smo x_1 zamenjali z y, saj smo tako ohranili alternacijo residuala.
Nadaljujemo z drugim korakom. Rešimo linearen sistem

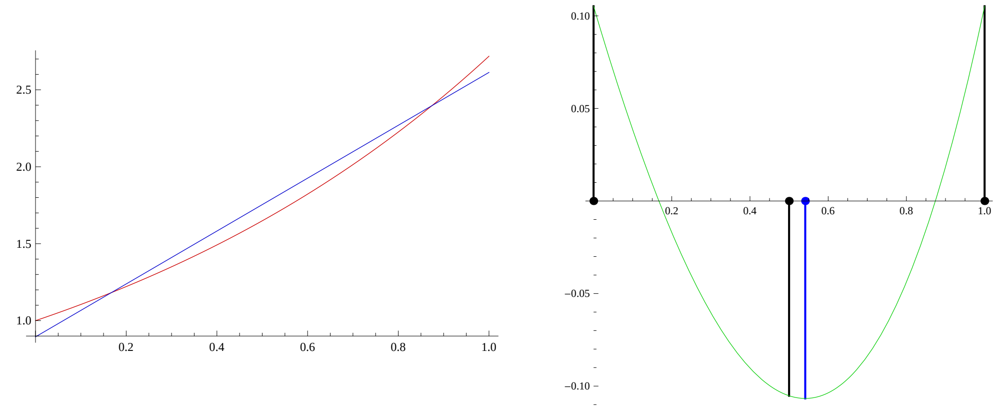
$$\begin{aligned} 1 - n_1 &= m_1 \\ e - 1 - k_1 \ln(e - 1) - n_1 &= -m_1 \\ e - k_1 - n_1 &= m_1, \end{aligned}$$

in dobimo $p_1^*(x) = k_1x + n_1$, kjer sta

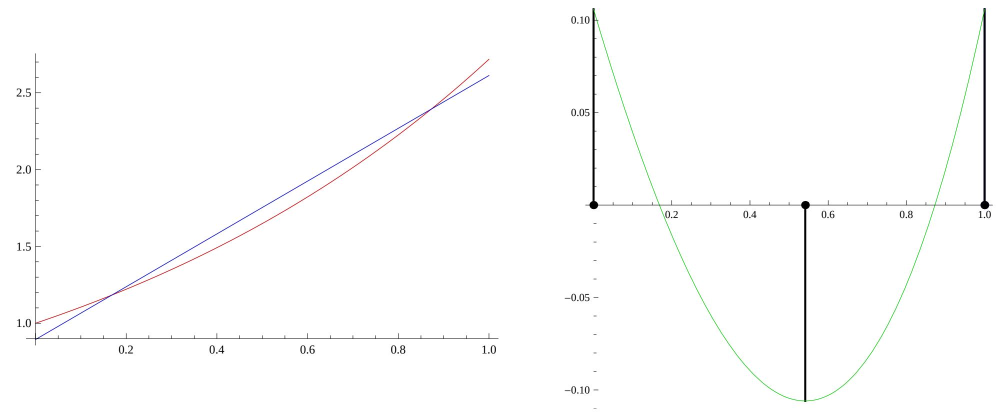
$$k_1 = e - 1 = 1.71828, \quad n_1 = \frac{1}{2}(e + \ln(e - 1) - e\ln(e - 1)) = 0.894067.$$

V tem primeru vidimo, da je ekstrem residuala $r_1 = f - p_1^*$ dosežen kar v vseh treh točkah iz množice E_1. Ker residual r_1 alternirajoče doseže svojo normo v treh točkah je $p_1^* = p^*$ kar polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f iz prostora linearnih funkcij. Na sliki 1.4 sta prikazana oba koraka Remesovega postopka. Na levi strani so grafi funkcije in polinomov, na desni pa so prikazani grafi residualov, točke množice E_k ter na novo izračunana točka.

1. korak:



2. korak:



Slika 1.4: Prikaz korakov Remesovega postopka.

Naloga 1.10. *Iščemo polinom* $p \in \mathbb{P}_2$ *najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo* $f(x) = \sin x$ *na intervalu* $[0, \pi]$*. Naredite nekaj korakov prvega Remesovega postopka.*

Rešitev:
Najprej izberemo začetno množico E_0, ki vsebuje štiri točke iz intervala $[0, \pi]$. Naj bodo kar ekvidistantne:

$$E_0 = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}.$$

Dobimo sledeče rezultate.
1. korak:

$$p_0^*(x) = -0.39486x^2 + 1.24049x,$$
$$E_1 = \{0., 1.0472, 2.73266, 3.14159\}, \quad m = 0$$

2. korak:

$$p_1^*(x) = -0.383899x^2 + 1.19458x + 0.0180304,$$
$$E_2 = \{0., 1.62032, 2.73266, 3.14159\}, \quad m = 0.0180304$$

3. korak:

$$p_2^*(x) = -0.395243x^2 + 1.22558x + 0.0253175,$$
$$E_3 = \{0.371796, 1.62032, 2.73266, 3.14159\}, \quad m = 0.0253175$$

4. korak:

$$p_3^*(x) = -0.404888x^2 + 1.2715x - 0.0259707,$$
$$E_4 = \{0.468154, 1.62032, 2.73266, 3.14159\}, \quad m = 0.0275111$$

5. korak:

$$p_4^*(x) = -0.405397x^2 + 1.27393x - 0.0286771,$$
$$E_5 = \{0., 0.468154, 1.62032, 2.73266\}, \quad m = 0.0276268$$

6. korak:

$$p_5^*(x) = -0.404987x^2 + 1.27261x - 0.0278896,$$
$$E_6 = \{0., 0.468154, 1.62032, 2.67233\}, \quad m = 0.0278896$$

7. korak:

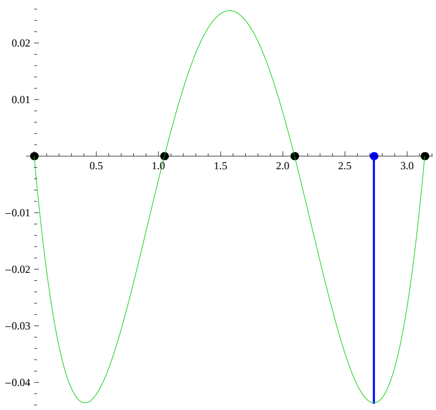
$$p_6^*(x) = -0.405191x^2 + 1.27294x - 0.0279447,$$
$$E_7 = \{0., 0.468154, 1.5708, 2.67233\}, \quad m = 0.0279447$$

8. korak:

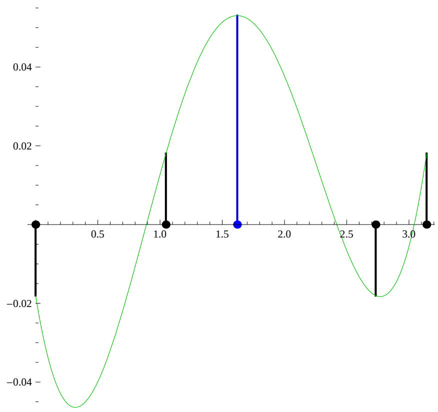
$$p_7^*(x) = -0.405285x^2 + 1.27324x - 0.0280036,$$
$$E_8 = \{0., 0.471973, 1.5708, 2.67233\}, \quad m = 0.0280036$$

Po osmem koraku je razlika med ekstremom residuala ter minimaksom m enaka $2.6 \cdot 10^{-6}$. Na sliki 1.5 so prikazani grafi residualov, na sliki 1.6 pa polinom po osmem koraku iteracij skupaj s funkcijo f.

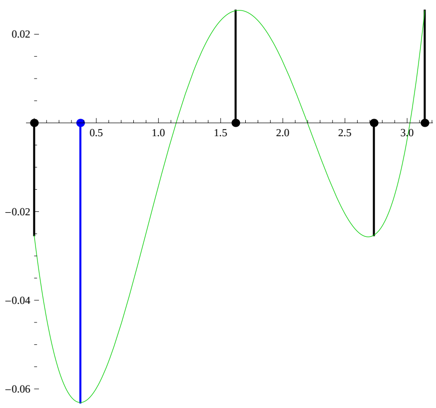
1. korak:



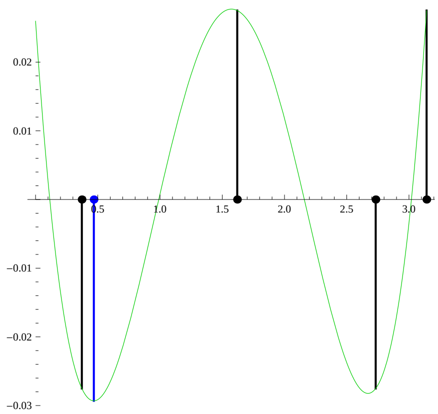
2. korak:



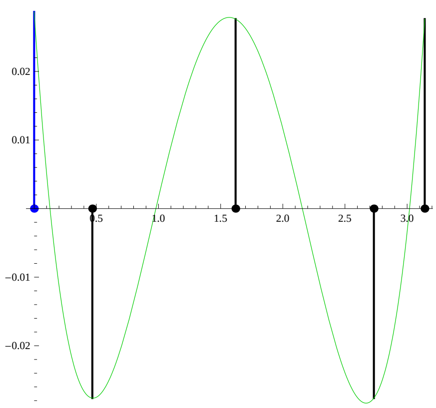
3. korak:



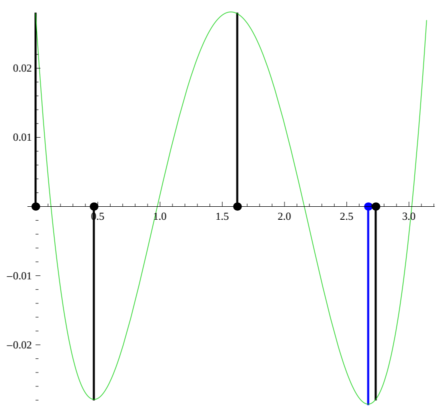
4. korak:



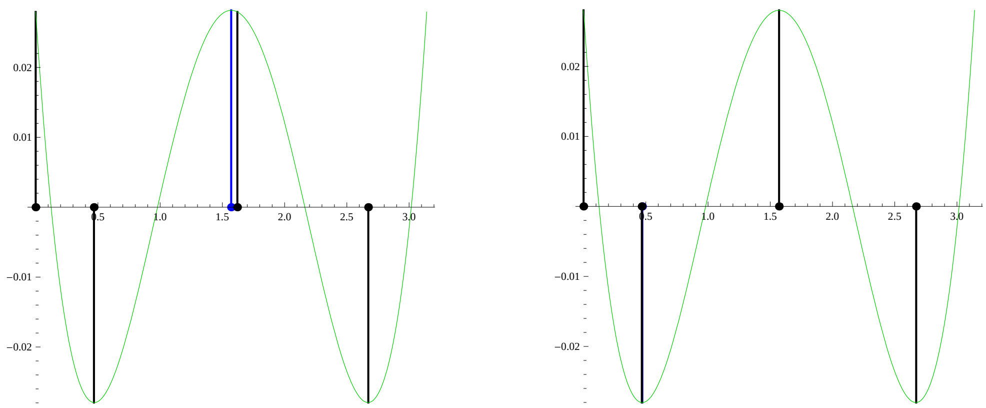
5. korak:



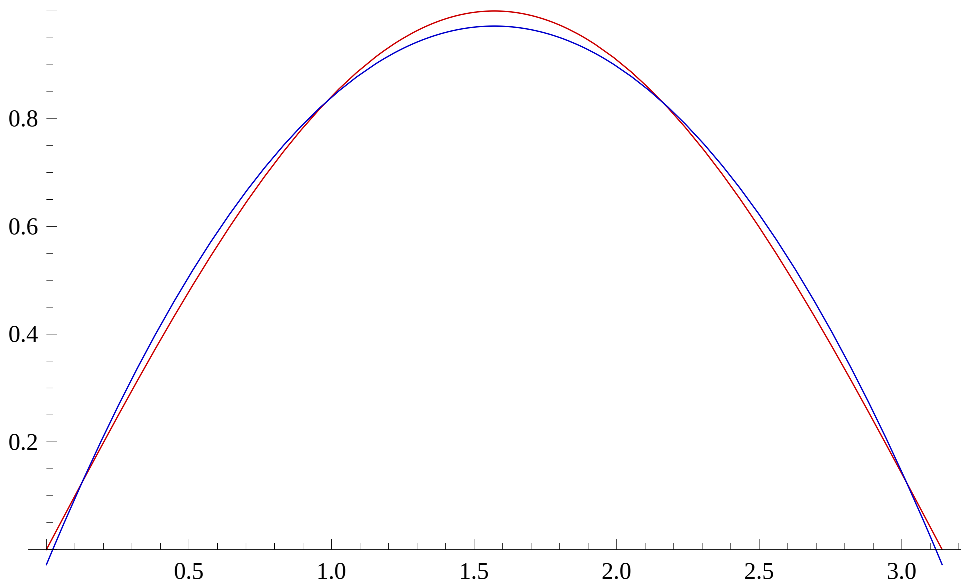
6. korak:



7. korak: 8. korak:



Slika 1.5: Grafi residualov.



Slika 1.6: Primerjava funkcije (rdeč graf) ter polinoma (moder graf) dobljenega po osmih korakih Remesovega postopka.

Naloga 1.11. *Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ konveksna funkcija. Aproksimiramo jo s premico po metodi najboljše enakomerne aproksimacije. Uporabimo prvi Remesov postopek, ki ga začnemo v točkah $a, \frac{a+b}{2}, b$. Dokažite, da se algoritem ustavi po dveh korakih.*

Rešitev:
Začetna množica točk je enaka

$$E_0 = \left\{a, \frac{a+b}{2}, b\right\}.$$

Začnimo s prvim korakom. Iščemo polinom $p_0^*(x) = k_0 x + n_0 \in \mathbb{P}_1$ najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo f na množici E_0. Določen je z rešitvijo sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} f(a) - ak_0 - n_0 &= m \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2}k_0 - n_0 &= -m \\ f(b) - bk_0 - n_0 &= m, \end{aligned}$$

ki je enaka

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{f(a)-f(b)}{a-b}, \quad n_0 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)\right) - \frac{(3a+b)(f(a)-f(b))}{4(a-b)}, \\ m &= \frac{1}{4}\left(-2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) + f(b)\right). \end{aligned}$$

Poiščimo točko, kjer je dosežen ekstrem residuala $r_0 = f - p_0^*$. Odvajamo in dobimo enačbo

$$(f(x) - p_0^*(x))' = f'(x) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 0.$$

Označimo rešitev te enačbe s c. Če je slučajno $c = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, potem residual alternirajoče doseže svojo normo v treh točkah in smo končali. Sicer pa iz konveksnosti funkcije sledi, da je

$$\operatorname{sign}(r_0(c)) = \operatorname{sign}\left(r_0\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

in nova množica točk je enaka

$$E_1 = \{a, c, b\}.$$

Nadaljujemo z drugim korakom. Rešimo linearen sistem

$$\begin{aligned} f(a) - ak_0 - n_0 &= m \\ f(c) - ck_0 - n_0 &= -m \\ f(b) - bk_0 - n_0 &= m, \end{aligned}$$

in dobimo $p_1^*(x) = k_1 x + n_1$, kjer sta

$$k_1 = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}, \quad n_1 = \frac{f(a)(-(b+c)) + (a+c)f(b) + (a-b)f(c)}{2(a-b)}.$$

Z odvajanjem residuala $r_1 = f - p_1^*$ spet dobimo isto enačbo

$$(f(x) - p_1^*(x))' = f'(x) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0,$$

ki ima rešitev v točki c. To pomeni, da residual r_1 alternirajoče doseže svojo normo v vseh treh točkah iz množice E_1 in je zato $p_1^* = p^*$ kar polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f iz prostora linearnih funkcij.

Naloga 1.12. *Naj bo $f(x) = \sin(3x)$. Na intervalu $[0, 2\pi]$ poiščite polinom najboljše enakomerne aproksimacije iz prostora $\mathbb{P}_4$.*

Rešitev:
Polinom najboljše enakomerne aproksimacije iz prostora $\mathbb{P}_4$ ima to lastnost, da alternirajoče doseže svojo normo v šestih točkah. Ker funkcija $\sin(3x)$ alternirajoče doseže ekstremne vrednosti ± 1 v točkah $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$, je polinom najboljše enakomerne aproksimacije iz prostora $\mathbb{P}_4$ kar ničelna funkcija $p^* \equiv 0$.

1.4. Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktov, norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ pa naj bo inducirana iz skalarnega produkta. Dalje naj bo $S \subset X$ končnodimenzionalen podprostor. Za poljuben $f \in X$ iščemo tak $f^* \in S$, za katerega velja

$$\|f - f^*\| = \min_{s \in S} \|f - s\|.$$

Element f^* imenujemo element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov.

Velja, da je $f^* \in S$ element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov za $f \in X$ natanko tedaj, ko je $f - f^* \perp S$. Iz tega pogoja pa sledi tudi konstrukcija.

Naj bo $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ baza podprostora S. Ker je razlika $f - f^*$ pravokotna na S, mora biti pravokotna na vsak bazni element:

$$f - f^* \perp \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Element f^* iščemo z nastavkom

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j.$$

Pogoje pravokotnosti zapišemo kot

$$\left\langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j, \varphi_i \right\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kar nam da linearen sistem za neznane koeficiente $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j)_{j=1}^{n}$. In sicer

$$G\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{d}, \quad G = \left(\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle\right)_{i,j=1}^{n}, \quad \boldsymbol{d} = \left(\langle f, \varphi_i \rangle\right)_{i=1}^{n}.$$

Ta sistem imenujemo normalni sistem, matriko G pa Gramova matrika.

Naloga 1.13. *Naj bodo $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ dane točke v ravnini.*

1. *Poiščite premico $y = kx + n$, ki po metodi najmanjših kvadratov najboljše aproksimira te točke.*
2. *Uporabite rezultate na primeru točk $(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 8)$.*

Rešitev:

1. Iščemo premico $p(x) = kx + n$, pri kateri je dosežen minimum izraza

$$\min_{k,n} \sum_{i=1}^{m} (kx_i + n - y_i)^2.$$

Nalogo lahko rešimo na dva načina.

1. **način:** Definiramo funkcijo $g(k,n) := \sum_{i=1}^{m}(kx_i + n - y_i)^2$ in poiščemo njen minimum. Parcialno odvajamo in dobimo sistem dveh linearnih enačb

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial k}(k,n) &= 2\sum_{i=1}^{m}(kx_i + n - y_i)x_i = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial n}(k,n) &= 2\sum_{i=1}^{m}(kx_i + n - y_i) = 0, \end{aligned}$$

ki se v matrični obliki glasi

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Po Cramerjevem pravilu preprosto izračunamo rešitev

$$\begin{aligned} k &= \frac{m\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}, \\ m &= \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} x_i y_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}, \end{aligned}$$

ki določa premico p.

2. **način:** Preko Gramove matrike.
Podprostor $\mathbb{P}_1$ napenjata funkciji $\varphi_0(x) = 1$ in $\varphi_1(x) = x$. Aproksimirajmo funkcijo f, za katero velja

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

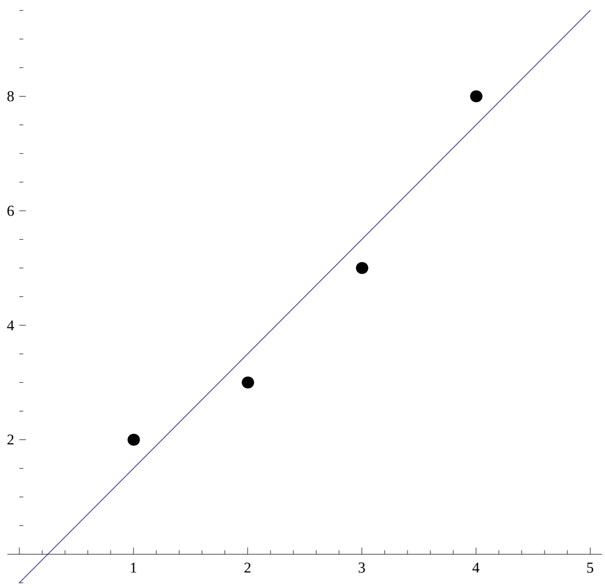
po metodi najmanjših kvadratov v podprostoru $\mathbb{P}_1$ glede na diskretni skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^{m} f(x_i) g(x_i).$$

Premica $p(x) = kx + n$ najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov je določena z rešitvijo Gramovega sistema

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_0 \rangle \\ \langle f, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix},$$

ki pa je enak sistemu (1.1).

2. 

Slika 1.7: Premica, ki aproksimira točke po metodi najmanjših kvadratov.

Pri danih podatkih dobimo linearen sistem

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 18 \end{pmatrix},$$

ki določa premico

$$p(x) = 2x - \frac{1}{2}.$$

Rešitev je prikazana na sliki 1.7.

Naloga 1.14. *Dan je interval $I = [-1, 1]$ in funkcija $f(x) = e^x$. Poiščite polinom $p^* \in \mathbb{P}_1$ najboljše aproksimacije po zvezni metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Podprostor $\mathbb{P}_1$ napenjata funkciji $\varphi_0(x) = 1$ in $\varphi_1(x) = x$. Premica

$$p(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x),$$

ki aproksimira funkcijo f po metodi najmanjših kvadratov v podprostoru $\mathbb{P}_1$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

je določena z rešitvijo Gramovega sistema

$$\begin{pmatrix} \langle\varphi_0, \varphi_0\rangle & \langle\varphi_0, \varphi_1\rangle \\ \langle\varphi_0, \varphi_1\rangle & \langle\varphi_1, \varphi_1\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_0\rangle \\ \langle f, \varphi_1\rangle \end{pmatrix}.$$

Skalarni produkti, ki nastopajo v matričnem sistemu, so enaki

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle &= \int_{-1}^{1} dx = 2,\\
\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle &= \int_{-1}^{1} xdx = 0,\\
\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle &= \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3},\\
\langle e^x,\varphi_0\rangle &= \int_{-1}^{1} e^xdx = e-e^{-1},\\
\langle e^x,\varphi_1\rangle &= \int_{-1}^{1} e^xxdx = 2e^{-1},
\end{aligned}$$

in rešitev se glasi

$$p(x) = \frac{1}{2}(e-e^{-1}) + 3e^{-1}x.$$

Naloga 1.15. *Za funkcijo* $f(x) = \sin^4 x$ *na intervalu* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *poiščite element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov iz podprostora*

$$S = \mathrm{Lin}\{1,\sin x,\cos x\}.$$

Rešitev:
Element

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sin x + \alpha_2\cos x,$$

ki aproksimira funkcijo f po metodi najmanjših kvadratov v podprostoru S glede na skalarni produkt

$$\langle f,g\rangle := \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx,$$

je določen z rešitvijo normalnega sistema

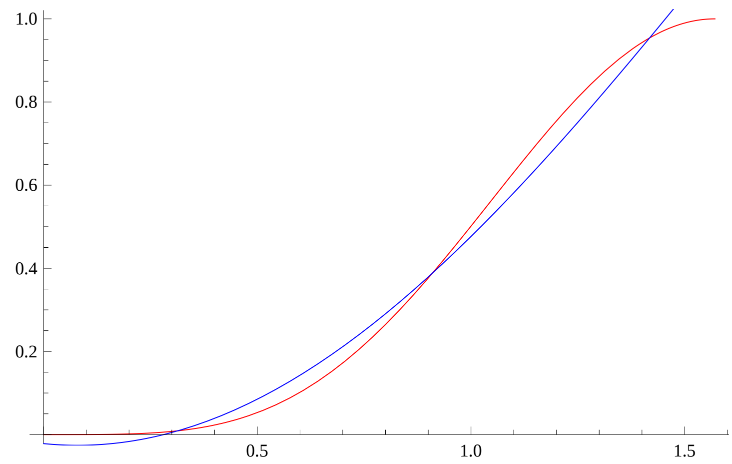
$$\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,\sin x\rangle & \langle 1,\cos x\rangle \\ \langle \sin x,1\rangle & \langle \sin x,\sin x\rangle & \langle \sin x,\cos x\rangle \\ \langle \cos x,1\rangle & \langle \cos x,\sin x\rangle & \langle \cos x,\cos x\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle 1,f\rangle\\ \langle \sin x,f\rangle\\ \langle \cos x,f\rangle\end{pmatrix}.$$

Integrale, ki nastopajo v skalarnih produktih, enostavno izračunamo z uporabo Beta funkcije

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}x\cos^{2q-1}xdx = \frac{1}{2}B(p,q) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Normalni sistem je tako enak

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3\pi}{16}\\ \frac{8}{15}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$



Slika 1.8: Funkcija (rdeč graf) in aproksimant po metodi najmanjših kvadratov (moder graf).

in ima rešitev

$$\alpha_0 = \frac{-704+90\pi+45\pi^2}{120\,(-16+2\pi+\pi^2)}, \quad \alpha_1 = \frac{-320+42\pi+19\pi^2}{30\,(32-20\pi+\pi^3)}, \quad \alpha_2 = \frac{320-38\pi-21\pi^2}{30\,(32-20\pi+\pi^3)}.$$

Funkcija in aproksimant sta prikazana na sliki 1.8.

Naloga 1.16. *Točke*

$$(1,0),(2,2),(1,2),(3,2),(1,1),(2,1),(2,0),(3,0),(3,1)$$

aproksimirajte z elementi iz podprostora $\mathrm{Lin}\{1, e^x\}$ *po metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Iščemo

$$p(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_0\varphi_1(x), \quad \varphi_0(x) := 1, \quad \varphi_1(x) := e^x,$$

ki aproksimira podatke po metodi najmanjših kvadratov glede na diskretni skalarni produkt. Definirajmo vektorja

$$\boldsymbol{x} := (1,2,1,3,1,2,2,3,3)^T, \quad \boldsymbol{y} := (0,2,2,2,1,1,0,0,1)^T$$

ter vektorja

$$\boldsymbol{\varphi}_0 := \varphi_0(\boldsymbol{x}) = (1,1,1,1,1,1,1,1,1)^T,$$
$$\boldsymbol{\varphi}_1 := \varphi_1(\boldsymbol{x}) = \left(e, e^2, e, e^3, e, e^2, e^2, e^3, e^3\right)^T,$$

ki določata vrednosti baznih funkcij v $\boldsymbol{x}$. Tedaj velja

$$\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle = \boldsymbol{\varphi}_0^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_0 = 9,$$
$$\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle = \boldsymbol{\varphi}_0^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 = 3(e+e^2+e^3),$$
$$\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle = \boldsymbol{\varphi}_1^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 = 3(e^2+e^4+e^6),$$
$$\langle f,\varphi_0\rangle = \boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_0 = 3,$$
$$\langle f,\varphi_1\rangle = \boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 = 0,$$

kjer smo z f označili funkcijo, za katero velja $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. Gramov sistem je tako enak

$$\begin{pmatrix} 9 & 3(e+e^2+e^3) \\ 3(e+e^2+e^3) & 3(e^2+e^4+e^6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0,$$

od koder sledi, da je iskana funkcija enaka $p(x) = 1$.

Naloga 1.17. *Točke* $(-1,0),(-1,1),(0,1),(1,2),(1,3)$ *aproksimirajte s polinomi iz prostora* $\mathbb{P}_2$ *po metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Definirajmo vektorja

$$\boldsymbol{x} := (-1,-1,0,1,1)^T, \quad \boldsymbol{y} := (0,1,1,2,3)^T$$

in naj bo diskretni skalarni produkt enak

$$\langle f, g\rangle := f(\boldsymbol{x})^T \cdot g(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)g(x_i).$$

Dalje naj vektorji

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_0 &:= (1,1,1,1,1)^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_1 &:= (-1,-1,0,1,1)^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_2 &:= (1,1,0,1,1)^T \end{aligned}$$

označujejo vrednosti baznih funkcij $1, x, x^2$ komponentah vektorja $\boldsymbol{x}$. Označimo s f funkcijo, za katero velja $f(x_i) = y_i$, $i = 1,2,\ldots,5$. Iščemo parabolo $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, ki aproksimira f po metodi najmanjših kvadratov glede na definiran skalarni produkt. Gramov sistem je enak

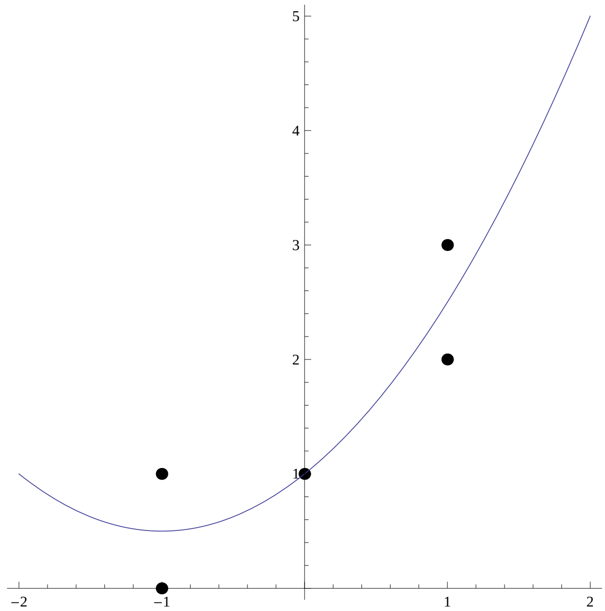
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

od koder sledi, da je iskana parabola (glej sliko 1.9) enaka $p(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

Naloga 1.18. *Točke* $(-1,0),(-1,1),(0,1),(1,2),(1,3)$ *aproksimirajte s polinomi iz prostora* $\mathbb{P}_3$ *po metodi najmanjših kvadratov.*



Slika 1.9: Parabola, ki aproksimira točke po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev:
Definirajmo vektorja

$$\boldsymbol{x} := (-1,-1,0,1,1)^T, \quad \boldsymbol{y} := (0,1,1,2,3)^T$$

in naj bo diskretni skalarni produkt enak

$$\langle f, g\rangle := f(\boldsymbol{x})^T \cdot g(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)g(x_i).$$

Vektorji

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_0 &:= (1,1,1,1,1)^T\,,\\
\boldsymbol{\varphi}_1 &:= (-1,-1,0,1,1)^T\,,\\
\boldsymbol{\varphi}_2 &:= (1,1,0,1,1)^T\,,\\
\boldsymbol{\varphi}_3 &:= (-1,-1,0,1,1)^T
\end{aligned}$$

naj označujejo vrednosti baznih funkcij $1, x, x^2, x^3$ v komponentah vektorja $\boldsymbol{x}$, f pa naj bo funkcija, za katero velja $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Iščemo torej polinom $p(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i x^i$, ki aproksimira f po metodi najmanjših kvadratov glede na definiran skalarni produkt. Normalni sistem je enak

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 4\\ 4 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 4. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\\ 4\\ 6\\ 4 \end{pmatrix}.$$

Očitno je matrika singularna in nimamo enolične rešitve. V tem primeru so rešitev vsi polinomi oblike

$$p(x) = 1 + (1-\zeta)x + \frac{1}{2}x^2 + \zeta x^3, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Problem ni v nasprotju s teorijo. Enolične rešitve ne dobimo, saj so vektorji $\boldsymbol{\varphi}_i$, $i = 0,1,2,3$, linearno odvisni.

Naloga 1.19. *Skalarni produkt naj bo definiran kot*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Po Gram-Schmidtovem postopku ortogonalizirajte potence x^i na intervalu $[-1,1]$.

Rešitev:
Naj bo $\{v_1, v_2, v_3\} = \{1, x, x^2\}$. Modificiran Gram-Schmidtov postopek je sledeč.
1. korak:

$$\begin{aligned}
\|v_1\|^2 &= \int_{-1}^{1} dx = 2,\\
f_1(x) &= \frac{v_1(x)}{\|v_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{2},\\
v_2^{(1)}(x) &= v_2(x) - \langle f_1, v_2\rangle f_1(x) = x - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x dx = x,\\
v_3^{(1)}(x) &= v_3(x) - \langle f_1, v_3\rangle f_1(x) = x^2 - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 dx = x^2 - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2. korak:

$$\begin{aligned}
\left\|v_2^{(1)}\right\|^2 &= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},\\
f_2(x) &= \frac{v_2^{(1)}(x)}{\left\|v_2^{(1)}\right\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}x,\\
v_3^{(2)}(x) &= v_3^{(1)}(x) - \left\langle f_2, v_3^{(1)}\right\rangle f_2(x) =\\
&= x^2 - \frac{1}{3} - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{6}}{2} x \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = x^2 - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3. korak:

$$\begin{aligned}
\left\|v_3^{(3)}\right\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{8}{45},\\
f_3(x) &= \frac{v_3^{(2)}(x)}{\left\|v_3^{(2)}\right\|} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3x^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

Prvi trije ortonormirani polinomi so tako enaki

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}x, \quad f_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3x^2 - 1\right).$$

Ortogonalni polinomi glede na dan skalarni produkt so t.i. Legendrovi polinomi. Izračunali smo prve tri, splošna formula pa se glasi

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(1 - x^2\right)^n.$$

1.5. Polinomska interpolacija

Izberemo točke $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ in prostor $\mathbb{P}_n$. Naj bodo vrednosti r_i enake vrednostim neke funkcije $f \in \mathcal{C}([a,b])$ v točkah x_i. Iščemo interpolacijski polinom p, za katerega velja

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Lahko ga zapišemo v Lagrangeevi ali Newtonovi obliki.

Lagrangeeva oblika interpolacijskega polinoma:
Če so točke x_i med sabo paroma različne, govorimo o Lagrangeevi polinomski interpolaciji. Lagrangeev interpolacijski problem je korekten, saj je kolokacijska matrika kar Vandermondova matrika in njena determinanta

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \det\,(x_i^j)_{i,j=0}^n = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

je različna od nič za paroma različne točke x_i. Interpolacijski polinom lahko zapišemo v zaključeni obliki

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\ell_{i,n}(x),$$

kjer so

$$\ell_{i,n}(x) := \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

Lagrangeevi bazni polinomi, ki sestavljajo bazo za prostor $\mathbb{P}_n$.

Deljene diference in Newtonova oblika interpolacijskega polinoma:
Naj bodo $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ dane točke, ki so vse med seboj različne. Tedaj je k-ta deljena diferenca $[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]\,f$ enaka vodilnemu koeficientu interpolacijskega polinoma, ki se s funkcijo f ujema v naštetih točkah.
Če velja $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+k}$, potem je k-ta deljena diferenca enaka $\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_i)$, kar je vodilni koeficient Taylorjevega polinoma razvitega okrog točke x_i.
Pravimo, da se dve funkciji x_i ujemata v dani točki m-kratno, če se ujemata v vrednosti in v prvih $(m-1)$-odvodih.
Deljene diference računamo s pomočjo rekurzivne formule:

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]\,f =$$
$$\begin{cases} \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_i), & x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+k} \\ \frac{[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_{i+k}]f - [x_i,x_{i+1},\ldots,x_{r-1},x_{r+1},\ldots,x_{i+k}]f}{x_r - x_s}, & x_r \neq x_s \end{cases}$$

Z uporabo deljenih diferenc lahko zapišemo interpolacijski polinom v Newtonovi obliki:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})\,[x_0, x_1, \ldots, x_i]\,f.$$

Napaka interpolacije se za $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ izračuna po formuli

$$f(x) - p(x) = \omega(x)\,[x_0 x_1, \ldots, x_n, x]\, f, \quad \omega(x) := \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Naloga 1.20. *Naj bodo x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, paroma različne točke. Dokažite, da velja*

$$\sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(x) = 1,$$

kjer so $\ell_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ *Lagrangeevi bazni polinomi.*

Rešitev:
Trditev lahko dokažemo na dva načina.

1. Za Lagrangeeve bazne polinome očitno velja

$$\ell_{i,n}(x_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

   Ker je

$$r(x) := \sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(x) - 1 = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} - 1$$

   polinom stopnje n, ki ima $n + 1$ ničel $x_0, x_1, \ldots, x_n$, je $r \equiv 0$ in trditev sledi.

2. Naj bo $f(x) = 1$. Interpolacijski polinom stopnje $\leq n$, ki se s f ujema v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$, je enak

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \ell_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(x).$$

   Ker pa je funkcija f že sama polinom stopnje $\leq n$, iz enoličnosti sledi, da je $f = p$, kar dokazuje trditev.

Naloga 1.21. *Za funkcijo $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ poiščite Lagrangeev interpolacijski polinom, ki se s f ujema v točkah $(x_i)_{i=0}^{3} = (-1, 0, 2, 5)$.*

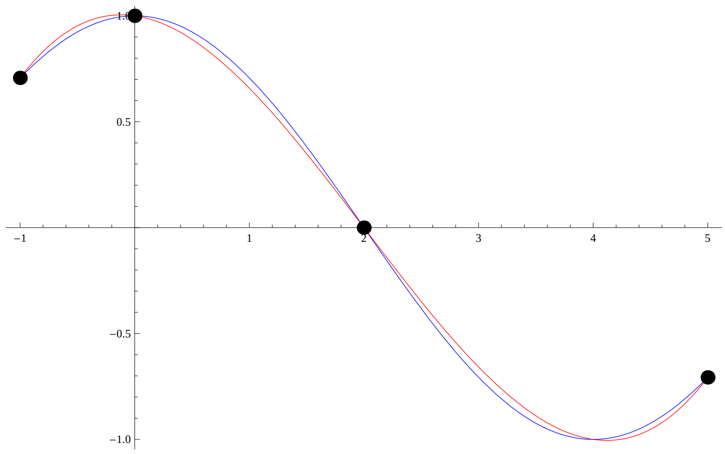
Rešitev:
Ker so točke x_i paroma različne, lahko interpolacijski polinom p zapišemo v Lagrangeevi obliki. Ker interpoliramo štiri podatke, je $p \in \mathbb{P}_3$. Lagrangeevi bazni polinomi so enaki

$$\ell_{0,3}(x) = -\frac{1}{18}(2-x)(5-x)x, \quad \ell_{1,3}(x) = \frac{1}{10}(2-x)(5-x)(x+1),$$
$$\ell_{2,3}(x) = \frac{1}{18}(5-x)x(x+1), \quad \ell_{3,3}(x) = \frac{1}{90}(x-2)x(x+1).$$

Interpolacijski polinom

$$p(x) = -\frac{(2-x)(5-x)x}{18\sqrt{2}} - \frac{(x-2)(x+1)x}{90\sqrt{2}} + \frac{1}{10}(2-x)(5-x)(x+1),$$

skupaj s funkcijo f in interpolacijskimi točkami je prikazan na sliki 1.10.



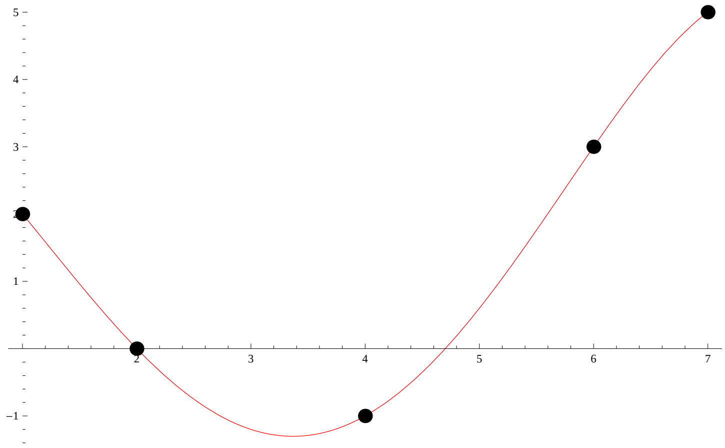
Slika 1.10: Interpolacijski polinom (rdeč graf) za funkcijo f (moder graf).

Naloga 1.22. *Določite polinom, ki interpolira točke*

$$(1,2), \quad (2,0), \quad (4,-1), \quad (6,3), \quad (7,5).$$

Rešitev:
Iščemo interpolacijski polinom $p \in \mathbb{P}_4$. Lagrangeevi bazni polinomi se poračunajo v

$$\ell_{0,4}(x) = \frac{1}{90}(2-x)(4-x)(6-x)(7-x), \quad \ell_{1,4}(x) = \frac{1}{40}(4-x)(6-x)(7-x)(x-1),$$
$$\ell_{2,4}(x) = \frac{1}{36}(6-x)(7-x)(x-2)(x-1), \quad \ell_{3,4}(x) = \frac{1}{40}(7-x)(x-4)(x-2)(x-1)$$
$$\ell_{3,4}(x) = \frac{1}{90}(x-6)(x-4)(x-2)(x-1).$$



Slika 1.11: Interpolacijski polinom na danih točkah.

Interpolacijski polinom je enak

$$\begin{aligned}p(x) =&\frac{1}{45}(2-x)(4-x)(6-x)(7-x) - \frac{1}{36}(6-x)(x-2)(x-1)(7-x)+\\&+\frac{3}{40}(x-4)(x-2)(x-1)(7-x) + \frac{1}{18}(x-6)(x-4)(x-2)(x-1)\end{aligned}$$

in je prikazan na sliki 1.11.

Naloga 1.23. *Dana je funkcija* $f(x) = \frac{4}{1+x}$.

1. *Preko deljenih diferenc poiščite interpolacijski polinom stopnje* 5*, ki interpolira funkcijo* f *v točkah* $x = 0$ *in* $x = 1$ *trikratno, to je v vrednosti, prvem in v drugem odvodu. Izračunajte njegovo vrednost v točki* $x = \frac{1}{2}$.

2. *Čim bolje ocenite napako*

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)|.$$

Rešitev:

1. Interpolacijski polinom p mora zadoščati naslednjim pogojem:

$$\begin{aligned}&p(0) = f(0) = 4, \quad p'(0) = f'(0) = -4, \quad p''(0) = f''(0) = 8,\\&p(1) = f(1) = 2, \quad p'(1) = f'(1) = -1, \quad p''(1) = f''(1) = 1.\end{aligned}$$

Ker interpoliramo še odvode, ga bomo zapisali v Newtonovi obliki. Izračunamo tabelo deljenih diferenc

x_i						
0	4					
0	4	-4				
0	4	-4	4			
1	2	-2	2	-2		
1	2	-1	1	-1	1	
1	2	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

pri čemer uporabljamo rekurzivno formulo za deljene diference. Diagonalni elementi nam dajo koeficiente polinoma v Newtonovi obliki v bazi iz prestavljenih potenc

$$\left\{1, x, x^2, x^3, x^3(x-1), x^3(x-1)^2\right\}.$$

In sicer je

$$p(x) = 4 - 4x + 4x^2 - 2x^3 + x^3(x-1) - \frac{1}{2}x^3(x-1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1}).$$

Vrednost polinoma pri $t = \frac{1}{2}$ dobimo s Hornerjevim algoritmom, prilagojenim za bazo iz prestavljenih potenc.

1. vrednost $= a_{n-1}$;
2. **for** $i = n-2, n-3, \ldots, 0$
3. vrednost $=$ vrednost $* (x - x_i) + a_i$;
4. **end**

Iz sheme

	$-\frac{1}{2}$	1	-2	4	-4	4
$x = \frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{21}{16}$	$\frac{43}{32}$	$-\frac{85}{64}$
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{21}{8}$	$\frac{43}{16}$	$-\frac{85}{32}$	$\frac{171}{64}$

preberemo vrednost polinoma

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{171}{64}.$$

2. Pri oceni napake uporabimo izrek, da za poljubno $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}(I)$, kjer I vsebuje vse interpolacijske točke, velja

$$f(x) = p_n(x) + \omega(x)\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,f, \quad \omega(x) := (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

pri čemer je p_n interpolacijski polinom, ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$. V našem primeru je

$$f(x) - p(x) = x^3(x-1)^3[0,0,0,1,1,1,x]f.$$

Za deljeno diferenco velja

$$[0,0,0,1,1,1,x]f = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!},$$

kjer je $\xi \in [0,1]$ poljubna točka. Ker je

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{4 \cdot n!(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}$$

padajoča funkcija, je

$$\|f^{(6)}\|_{\infty,[0,1]} = 4 \cdot 6! = 2880.$$

Dalje je

$$\left|x^3(x-1)^3\right| = |x(x-1)|^3 \leq \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

za vse $x \in [0,1]$. Ocena za napako interpolacijskega polinoma je tako enaka

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{64}\frac{2880}{6!} = \frac{1}{16}.$$

Naloga 1.24. *Poiščite Hermitov interpolacijski polinom, za katerega velja*

$$p(0) = -2, \quad p'(0) = \frac{1}{2}, \quad p(1) = 2, \quad p'(1) = \frac{1}{4}, \quad p(3) = 4, \quad p'(3) = \frac{1}{3}.$$

Izračunajte njegovo vrednost v točki $x = 2$.

Rešitev:
Interpolacijski polinom zapišemo v Newtonovi obliki. Izračunamo tabelo deljenih diferenc:

x_i	0	0	0	0	0	
0	-2	0	0	0	0	0
0	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
1	2	4	$\frac{7}{2}$	0	0	0
1	2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{29}{4}$	0	0
3	4	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{23}{8}$	0
3	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{17}{48}$	$-\frac{83}{144}$	$-\frac{497}{432}$

Diagonalni elementi nam dajo koeficiente polinoma v Newtonovi obliki v bazi iz prestavljenih potenc

$$\left\{1, x, x^2, x^2(x-1), x^2(x-1)^2, x^2(x-1)^2(x-3)\right\}.$$

In sicer je

$$p(x) = -2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{4}x^2(x-1) + \frac{23}{8}x^2(x-1)^2 - \frac{497}{432}x^2(x-1)^2(x-3)$$

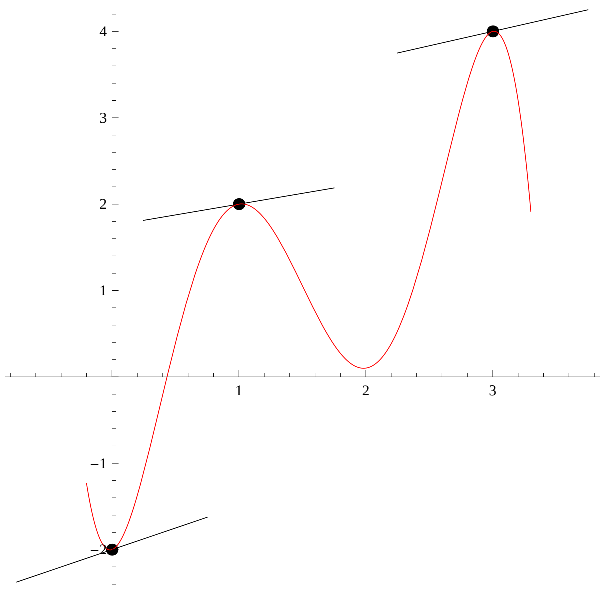
(glej sliko 1.12). Vrednost polinoma pri $t = 2$ dobimo s Hornerjevim algoritmom, prilagojenim za bazo iz prestavljenih potenc.

Iz sheme

	$-\frac{497}{432}$	$\frac{23}{8}$	$-\frac{29}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2
$x = 2$	0	$\frac{497}{432}$	$\frac{1739}{432}$	$-\frac{1393}{432}$	$\frac{119}{216}$	$\frac{227}{108}$
	$-\frac{497}{432}$	$\frac{1739}{432}$	$-\frac{1393}{432}$	$\frac{119}{432}$	$\frac{227}{216}$	$\frac{11}{108}$

preberemo

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{108}.$$



Slika 1.12: Hermitov interpolacijski polinom.

Naloga 1.25. *S pomočjo deljenih diferenc zapišite enačbo polinoma čim nižje stopnje, za katerega velja*

$$p(0) = 1, \quad p'(0) = 2, \quad p''(0) = 3, \quad p(1) = -1, \quad p'(1) = 3, \quad p(2) = 4.$$

Rešitev:

Izračunamo tabelo deljenih diferenc

x_i						
0	1					
0	1	2				
0	1	2	$\frac{3}{2}$			
1	-1	-2	-4	$-\frac{11}{2}$		
1	-1	3	5	9	$\frac{29}{2}$	
2	4	5	2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{79}{8}$

in dobimo

$$p(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^3(x-1) - \frac{79}{8}x^3(x-1)^2.$$

Naloga 1.26. *Poiščite splošno formulo za deljeno diferenco*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]\left(\frac{x}{1+x}\right),$$

kjer so $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, paroma različne točke.

Rešitev:
Izračunajmo najprej deljene diference za $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1]f &= \frac{\frac{x_2}{1+x_2} - \frac{x_1}{1+x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)},\\
[x_0, x_1, x_2]f &= \frac{[x_1, x_2]\left(\frac{x}{1+x}\right) - [x_0, x_1]\left(\frac{x}{1+x}\right)}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)} - \frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)}}{x_2 - x_0} =\\
&= \frac{-1}{(1+x_0)(1+x_1)(1+x_2)},\\
[x_0, x_1, x_2, x_3]f &= \frac{[x_1, x_2, x_3]\left(\frac{x}{1+x}\right) - [x_0, x_1, x_2]\left(\frac{x}{1+x}\right)}{x_3 - x_0} =\\
&= \frac{\frac{-1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)} - \frac{-1}{(1+x_0)(1+x_1)(1+x_2)}}{x_3 - x_0} =\\
&= \frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)}.
\end{aligned}$$

Od tod sklepamo, da je

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x_0)(1+x_1)\cdots(1+x_n)}.$$

Dokažimo to formulo z indukcijo. Za $n = 1$ formula velja. Deljena diferenca na $n + 2$ točkah pa je enaka

$$\begin{aligned}[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]f &= \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]\left(\frac{x}{1+x}\right) - [x_0, x_1, \ldots, x_n]\left(\frac{x}{1+x}\right)}{x_{n+1} - x_0} = \\ &\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{n+1})} - \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x_0)(1+x_1)\cdots(1+x_n)}}{x_{n+1} - x_0} = \\ &= \frac{(-1)^{n+2}}{(1 + x_0)(1 + x_1)\cdots(1 + x_{n+1})},\end{aligned}$$

kar dokazuje formulo.

Naloga 1.27. *Funkcijo $f(x) = \sin(x)$ interpoliramo v točkah $0, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{6}$. Ocenite napako na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ pri Lagrangeovi in Hermitovi interpolaciji.*

Rešitev:
Ker so interpolacijske točke ekvidistantne, lahko pišemo

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{12} = x_0 + h, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} = x_0 + 2h,$$

kjer je $h = \frac{\pi}{12}$. Razlika med funkcijo in Lagrangeevim interpolacijskim polinomom je enaka

$$\begin{aligned}|f(x) - p(x)| &= |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f| = \\ &= |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \, \frac{1}{6} \left|f^{(3)}(\xi)\right|\end{aligned}$$

za nek $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Izračunajmo najprej ekstrem funkcije $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$. Iz

$$\omega'(x) = 3x^2 - 6hx + 2h^2 = 0$$

dobimo dve stacionarni točki

$$x = h^3\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Ker je v krajiščih funkcija ω enaka nič, je

$$\|\omega\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \max\left\{\left|\omega\left(h^3\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right|, \left|\omega\left(h^3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right|\right\} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi^3}{12^3}.$$

Določimo še

$$\left\|f^{(3)}\right\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \|\cos x\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = 1.$$

Od tod sledi

$$\|f - p\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi^3}{12^3}\frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{27}\frac{\pi^3}{12^3} = 1.15 \cdot 10^{-3}.$$

Pri Hermitovi interpolaciji se napaka izraža kot

$$
\begin{aligned}
|f(x)-p(x)| &= \left|(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2,x_2,x]f\right| = \\
&= \left|(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2\right| \frac{1}{6!}\left|f^{(6)}(\xi)\right|.
\end{aligned}
$$

Ker je

$$
\left\|f^{(6)}\right\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \|\sin x\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \frac{1}{2},
$$

dobimo z uporabo zgornjih ocen

$$
\|f-p\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} \leq \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi^3}{12^3}\right)\frac{1}{6!}\frac{1}{2} = \frac{1}{9720}\frac{\pi^6}{12^6} = 1.15\cdot 10^{-3}. = 3.312\cdot 10^{-8}.
$$

Naloga 1.28. *Naj bodo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ paroma različne točke in $y_0, y_1, \ldots, y_n$ vrednosti, ki jih želimo interpolirati. Zapišite algoritem za izračun deljenih diferenc*

$$
d_i := [x_0, x_1, \ldots, x_i]f, \quad i = 0, 1, \ldots, n.
$$

Rešitev:
Če označimo elemente v tabeli deljenih diferenc kot

x_i				
x_0	$d_{0,0}$			
x_1	$d_{1,0}$	$d_{1,1}$		
x_2	$d_{2,0}$	$d_{2,1}$	$d_{2,2}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$
x_n	$d_{n,0}$	$d_{n,1}$	$\ldots$	$d_{n,n}$

potem velja

$$
d_{j,i} = \frac{d_{j,i-1} - d_{j-1,i-1}}{x_j - x_{j-i}}.
$$

Od tod sledi algoritem za računanje deljenih diferenc.

for $i = 0, 1, \ldots, n$
    $d_{i,0} = y_i$
end
for $i = 1, 2, \ldots, n$
    for $j = i, i+1, \ldots, n$
        $d_{j,i} = \frac{d_{j,i-1} - d_{j-1,i-1}}{x_j - x_{j-i}}$
    end
end

Ker potrebujemo le diagonalne elemente, lahko algoritem poenostavimo tako, da vse elemente shranjujemo v en sam vektor velikosti $n+1$. Glavni trik je v tem, da pri drugi for zanki računamo v obratnem vrstnem redu.

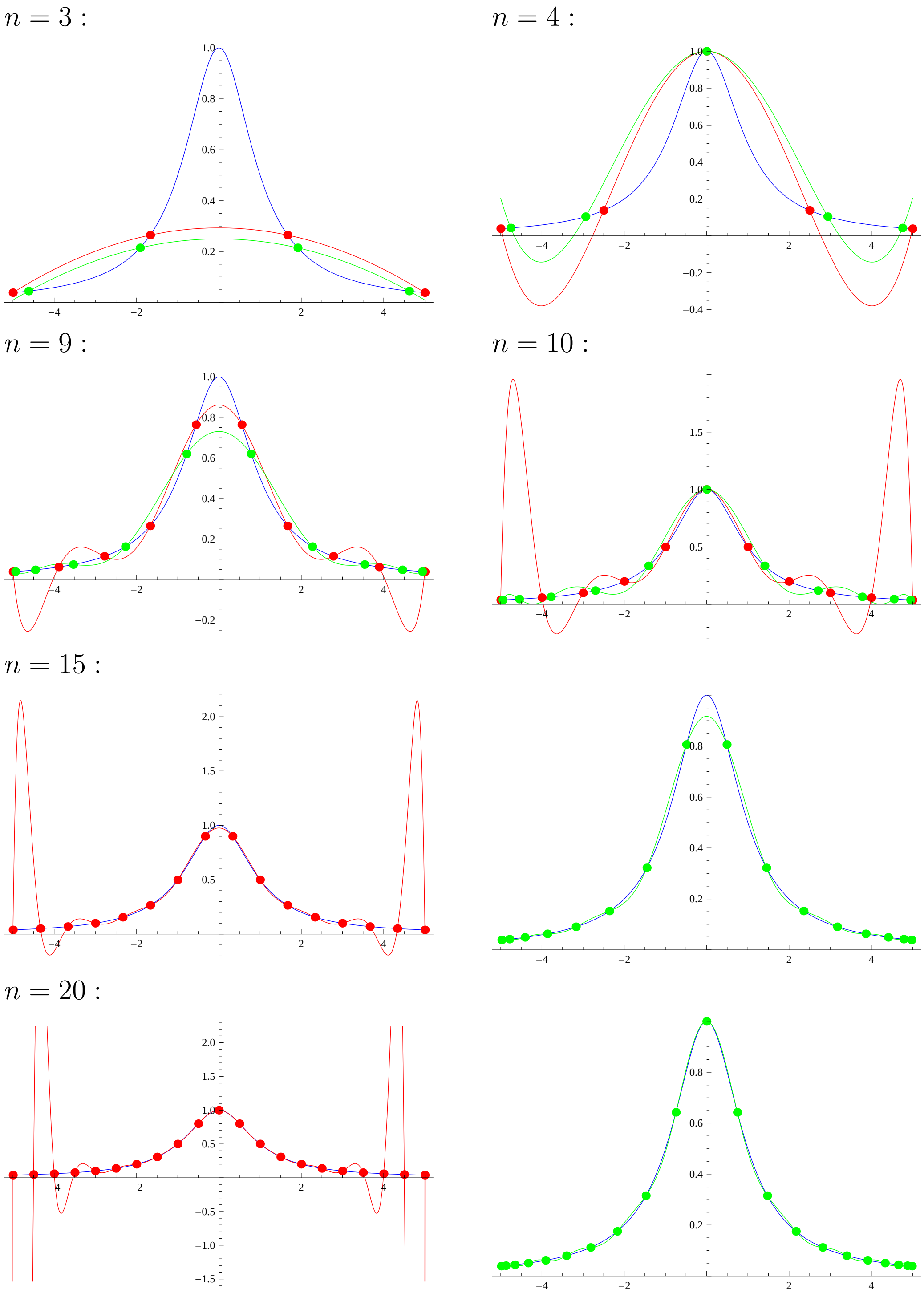
Algoritem za računanje deljenih diferenc

1. **for** $i = 0, 1, \ldots, n$
2. $\quad d_{i,0} = y_i$
3. **end**
4. **for** $i = 1, 2, \ldots, n$
5. $\quad$ **for** $j = n, n-1, \ldots, i$
6. $\quad\quad d_j = \frac{d_j - d_{j-1}}{x_j - x_{j-i}}$
7. $\quad$ **end**
8. **end**

Naloga 1.29. *Funkcijo* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *na intervalu* $[a, b] = [-5, 5]$ *interpoliramo s polinomi stopnje* n. *Narišite grafe interpolacijskih polinomov stopenj* $n = 3, 4, 9, 10, 15, 20$, *v primeru, ko so*

1. *interpolacijske točke ekvidistantne:* $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$;
2. *interpolacijske točke Čebiševe:* $x_i = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\left(\dfrac{\pi(2k+1)}{2n+2}\right)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Rešitev:
Grafi so prikazani na sliki 1.13. Rdeč graf predstavlja interpolacijski polinom pri ekvidistantnih točkah, zelen graf pa pri Čebisevih. Vidimo, da z naraščajočim n v prvem primeru razlika med funkcijo f in interpolacijskim polinomom raste, v drugem pa pada proti nič. Primer je znan pod imenom Rungejev primer.



Slika 1.13: Rungejev primer.

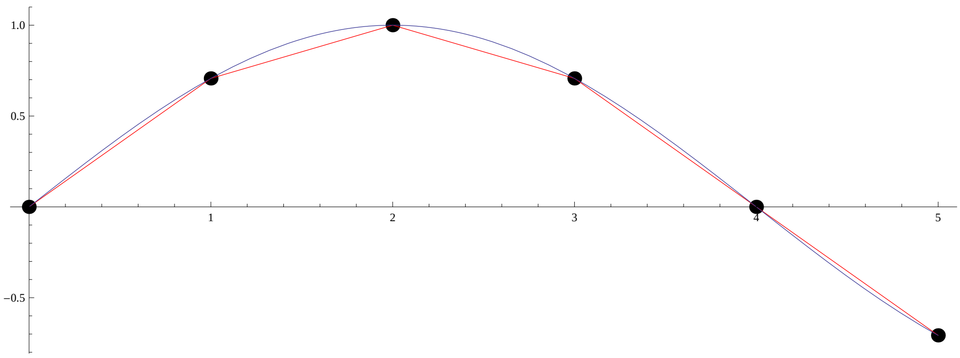
1.6. Odsekoma polinomske funkcije

Naloga 1.30. *Dano je zaporedje stičnih točk* $\boldsymbol{x} = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$. *Zapišite odsekoma linearno interpolacijsko funkcijo* $\mathcal{I}_1 f$ *za* $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Rešitev:
Za $x_i \le x \le x_{i+1}$ je $\mathcal{I}_1 f(x) = f(x_i) + [x_i, x_{i+1}]f$. V našem primeru dobimo

$$\mathcal{I}_1 f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}}, & x \in [1,2) \\ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in [2,3) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)(x-2) + 1, & x \in [3,4) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x-3}{\sqrt{2}}, & x \in [4,5) \\ -\frac{x-4}{\sqrt{2}}, & x \in [5,6] \end{cases}.$$

Rešitev je prikazana na sliki 1.14.



Slika 1.14: Interpolacija z odsekoma linearno funkcijo.

Naloga 1.31. *Funkcijo* $f(x) = \sin x$ *na intervalu* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ *interpoliramo z odsekoma linearno funkcijo* p. *Na koliko delov moramo razdeliti interval (ekvidistantno), da bo napaka* $\|f - p\| \le 5 \cdot 10^{-6}$. *Kaj pa, če interpoliramo z odsekoma kubičnim Hermitovim zlepkom.*

Rešitev:
Naj bo $a = x_0 = 0$, $b = x_n = \frac{\pi}{4}$, $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Napaka interpolacije na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ je enaka

$$|f(x) - p(x)| = |(x - x_i)(x - x_{i+1})[x_i, x_{i+1}, x]f| \le |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \frac{\|f^{(2)}\|_{\infty,[a,b]}}{2} \le$$
$$\le \frac{h^2}{4} \frac{\|\sin\|_{\infty,[a,b]}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16} h^2.$$

Napaka bo na $[a, b]$ manjša od predpisane vrednosti, če bo

$$\frac{\sqrt{2}}{16} h^2 \le 5 \cdot 10^{-6}.$$

To bo res za vse $h \leq 7.5 \cdot 10^{-3}$. Ker je $nh = \frac{\pi}{4}$, mora biti $n \geq 104.42$. Interval moramo torej razdeliti na vsaj 105 delov.

V primeru interpolacije s kubičnim Hermitovim zlepkom S, $S\Big|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i \in \mathbb{P}_3$, ki zadošča pogojem

$$p_i(x_i) = f(x_i), \quad p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad p_i'(x_i) = f'(x_i), \quad p_i'(x_{i+1}) = f'(x_{i+1})$$

za vse $i = 0, 1, \ldots, n-1$, imamo oceno

$$\begin{aligned} |f(x) - p_i(x)| &= \left|(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}, x]f\right| \leq \\ &\leq \left|(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2\right| \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}}{4!} \leq \\ &\leq \frac{h^4}{16} \frac{\|\sin\|_{\infty,[a,b]}}{4!} = \frac{\sqrt{2}}{768} h^4, \end{aligned}$$

pri čemer je $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Napaka bo na celem intervalu $[a, b]$ manjša od predpisane vrednosti, če bo

$$\frac{\sqrt{2}}{768} h^4 \leq 5 \cdot 10^{-6}.$$

To je res za vse $h \leq 0.228$. Ker je $nh = \frac{\pi}{4}$, mora biti $n \geq 3.44$. Interval je torej dovolj razdeliti le na 4 dele.

Naloga 1.32. *Funkcijo* $f(x) = \dfrac{24}{1+x}$ *interpoliramo s Hermitovim* $\mathcal{C}^2$ *zlepkom stopnje* 5 *na ekvidistantnem zaporedju vozlov* $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2$. *Na vsakem polinomskem odseku interpoliramo vrednosti, prve ter druge odvode funkcije* f.

1. *Ocenite na koliko delov moramo razdeliti interval* $[0, 2]$, *da bo napaka manjša od* 10^{-6}.

2. *Zapišite zlepek na zaporedju vozlov* $\boldsymbol{x} = (0, 1, 2)$.

Rešitev:

1. Interval razdelimo ekvidistantno na n delov s točkami $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, kjer je $x_0 = 0$ in $h = \frac{2}{n}$. Zlepek $P : [0, 2] \to \mathbb{R}$ je sestavljen iz polinomov $p_i \in \mathbb{P}_5$,

$$P\Big|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i, \quad i = 0, 1 \ldots, n-1,$$

za katere velja

$$p_i^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad p_i^{(k)}(x_{i+1}) = f^{(k)}(x_{i+1}), \quad k = 0, 1, 2.$$

Po formuli za napako interpolacijskega polinoma velja za $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}|f(x) - P(x)| &= \left|(x-x_i)^3(x-x_{i+1})^3[x_i, x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}, x_{i+1}, x]f\right| \leq \\ &\leq \left|(x-x_i)^3(x-x_{i+1})^3\right| \frac{\|f^{(6)}\|_{\infty,[0,2]}}{6!} \leq \left(\frac{h^2}{4}\right)^3 \frac{\|f^{(6)}\|_{\infty,[0,2]}}{6!} = \\ &= \frac{h^6}{64}\frac{24\cdot 6!}{6!} = \frac{3}{8}h^6, \quad i = 0, 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\|f - P\|_{\infty,[0,2]} \leq \frac{3}{8}h^6 < 10^{-6}$$

za vse

$$h < \sqrt[6]{\frac{8}{3}\cdot 10^{-6}} = 0.117759$$

oziroma za $n > 16.9838$. Po oceni moramo torej interval $[0, 2]$ razdeliti na $n \geq 17$ delov.

2. Za $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ je zlepek sestavljen iz dveh polinomskih delov p_0 in p_1, ki jih bomo zapisali v Newtonovi obliki. Potrebujemo sledeče vrednosti:

$$\begin{aligned}&f(0) = 24, \quad f(1) = 12, \quad f(2) = 8,\\ &f'(x) = -\frac{24}{(1+x)^2}, \quad f'(0) = -24, \quad f'(1) = -6, \quad f'(2) = -\frac{8}{3},\\ &f''(x) = \frac{48}{(1+x)^3}, \quad f''(0) = 48, \quad f''(1) = 6, \quad f''(2) = \frac{16}{9}.\end{aligned}$$

Izračunajmo najprej p_0. Izračunamo tabelo deljenih diferenc

x_i	0	0	0	0	0	
0	24	0	0	0	0	0
0	24	−24	0	0	0	0
0	24	−24	24	0	0	0
1	12	−12	12	−12	0	0
1	12	−6	6	−6	6	0
1	12	−6	3	−3	3	−3

Diagonalni elementi nam dajo koeficiente polinoma v Newtonovi obliki v bazi iz prestavljenih potenc

$$\left\{1, x, x^2, x^3, x^3(x-1), x^3(x-1)^2\right\}.$$

In sicer je

$$p_0(x) = 24 - 24x + 24x^2 - 12x^3 + 6x^3(x-1) - 3x^3(x-1)^2.$$

Izračunajmo še p_1. Tabela deljenih diferenc je enaka

$$\begin{array}{c|cccccc}
x_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 12 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 8 & -4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
2 & 8 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
2 & 8 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}
\end{array} .$$

Diagonalni elementi nam dajo koeficiente polinoma v Newtonovi obliki v bazi iz prestavljenih potenc

$$\left\{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^3(x-2), (x-1)^3(x-2)^2\right\}.$$

In sicer je

$$p_0(x) = 12 - 6(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{1}{3}(x-1)^3(x-2) - \frac{1}{9}(x-1)^3(x-2)^2.$$

Poglavje 2

Numerično odvajanje

Naloga 2.1.

1. *Preko interpolacijskih polinomov izpeljite formuli za aproksimacijo odvodov oblike*

$$f'(x_1) = A_1 f(x_0) + B_1 f(x_1) + C_1 f(x_2) + R_1(f),$$
$$f''(x_1) = A_2 f(x_0) + B_2 f(x_1) + C_2 f(x_2) + R_2(f),$$

   kjer so točke $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne z razmikom h.

2. *Z dobljenimi formulami izračunajte približek za prvi in drugi odvod funkcije $f(x) = e^{2x}$ v točki $x = 0$ za $h = \frac{1}{10}$ in $h = \frac{1}{100}$. Primerjajte dobljene vrednosti s točno vrednostjo odvodov.*

Rešitev:

1. Zapišemo interpolacijski polinom na točkah x_0, x_1, x_2 v Lagrangeevi obliki

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\ell_{i,2}(x),$$

   kjer so

$$\ell_{0,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$
$$\ell_{1,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$
$$\ell_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

   Z odvajanjem Lagrangeevih baznih polinomov dobimo

$$A_1 = \ell'_{0,2}(x_1) = -\frac{1}{2h}, \quad B_1 = \ell'_{1,2}(x_1) = 0, \quad C_1 = \ell'_{2,2}(x_1) = \frac{1}{2h},$$
$$A_2 = \ell''_{0,2}(x_1) = \frac{1}{h^2}, \quad B_2 = \ell''_{1,2}(x_1) = -\frac{2}{h^2}, \quad C_2 = \ell''_{2,2}(x_1) = \frac{1}{h^2}.$$

Napaki dobimo iz napake interpolacijskega polinoma. Če označimo

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

je napaka $R_1(f)$ enaka

$$R_1(f) = (\omega(x)[x_0, x_1, x_2, x]f)'\Big|_{x=x_1} = \omega'(x_1)\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} = -\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1),$$

kjer je $\xi_1 \in (x_0, x_2)$. Podobno je

$$\begin{aligned}R_2(f) &= (\omega(x)[x_0, x_1, x_2, x]f)''\Big|_{x=x_1} = \\ &= \omega''(x_1)[x_0, x_1, x_2, x]f + 2\omega'(x_1)[x_0, x_1, x_2, x, x]f + 0 = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2),\end{aligned}$$

kjer je $\xi_2 \in (x_0, x_2)$. Rezultat je torej

$$\begin{aligned}f'(x_1) &= \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1), \\ f''(x_1) &= \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2).\end{aligned}$$

2. Točni vrednosti odvoda sta enaki $f'(0) = 2$, $f''(0) = 4$. Za $h = \frac{1}{10}$ dobimo po formuli

$$f'(0) \sim 2.01336, \quad f''(0) \sim 4.01335.$$

Razliki med točnima in izračunanima vrednostima sta -0.01336 ter -0.0133511. Za $h = \frac{1}{100}$ izračunamo

$$f'(0) \sim 2.00013, \quad f''(0) \sim 4.00013,$$

napaki pa sta -0.000133336 ter -0.000133335. Numerični rezultati potrjujejo, da sta napaki res reda $\mathcal{O}(h^2)$.

Naloga 2.2. *Preko interpolacijskih polinomov izrazite formulo za aproksimacijo odvoda $f'(x_0)$ z vrednostmi $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, kjer so točke x_i ekvidistantne.*

Rešitev:
Ekvidistantne točke lahko zapišemo kot $x_i = x_0 + ih$, kjer je h razmik med točkami. Interpolacijski polinom lahko zapišemo v Lagrangeevi ali Newtonovi obliki. Lagrangeeva oblika interpolacijskega polinoma za funkcijo f se v našem primeru glasi

$$p(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

in se zaradi ekvidistantnih točk poenostavi v

$$p(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2h^2} - f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{h^2} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}.$$

Izračunamo odvod

$$p'(x) = f(x_0)\frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} - f(x_1)\frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} + f(x_2)\frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2}$$

ter njegovo vrednost v točki $x = x_0$. Dobimo

$$p'(x_0) = -\frac{3}{2h}f(x_0) + \frac{2}{h}f(x_1) - \frac{1}{2h}f(x_2).$$

Od tod sledi, da je

$$f'(x_0) = -\frac{3}{2h}f(x_0) + \frac{2}{h}f(x_1) - \frac{1}{2h}f(x_2) + Rf.$$

Napako Rf dobimo iz Newtonove formule za napako interpolacijskega polinoma, ki je v našem primeru enaka

$$f(x) = p(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f.$$

In sicer je

$$\begin{aligned} Rf &= ((x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f)'\Big|_{x=x_0} = \\ &= ((x - x_0)(x - x_1)(x - x_2))'\Big|_{x=x_0}[x_0, x_1, x_2, x_0]f = \\ &= 2h^2\frac{f^{(3)}(\xi)}{6} = h^2\frac{f^{(3)}(\xi)}{3}, \end{aligned}$$

kjer je $\xi \in (x_0, x_2)$.

Naloga 2.3. *Izpeljite formulo za numerično odvajanje oblike*

$$f'(x_2) = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df(x_3) + Ef(x_4) + Ff^{(m)}(\xi),$$

pri čemer so $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne točke s korakom h. Za funkcijo $f(x) = \frac{1}{1+x}$ na intervalu $[0, 1]$ določite optimalen korak h, če velja $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| < 5 \cdot 10^{-6}$, kjer z $\tilde{f}$ označimo numerično izračunane vrednosti funkcije f.

Rešitev:
Nalogo lahko rešimo preko interpolacijskega polinoma na točkah x_i, $i = 0, 1, \ldots, 4$. V Lagrangeevi obliki se ta glasi

$$p(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)\ell_{i,n}(x).$$

Neznani koeficienti so enaki

$$A = \ell'_{i,n}(x_0), \quad B = \ell'_{i,n}(x_1), \quad C = \ell'_{i,n}(x_2), \quad D = \ell'_{i,n}(x_3), \quad E = \ell'_{i,n}(x_4).$$

Poračunamo in dobimo

$$A = \frac{1}{12h}, \quad B = -\frac{2}{3h}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2}{3h}, \quad E = -\frac{1}{12h}.$$

Napaka je enaka

$$Rf = \left(\prod_{i=0}^{4}(x - x_i)[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x]f\right)' = \left(\prod_{i=0}^{4}(x - x_i)\right)' \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi).$$

Drug način kako določiti neznane koeficiente v formuli je z uporabo *metode nedoločenih koeficientov*. In sicer določimo koeficiente A, B, C, D, E tako, da bo formula točna za polinome čim višjih stopenj. To pomeni, da mora biti napaka enaka nič za polinome čim višjih stopenj. Formula bo točna za vse polinome določene stopnje, če bo točna za vse bazne polinome do te stopnje. Kot bazo prostora polinomov ni nujno da vzamemo standardno bazo. V danem primeru je za lažje računanje boljše vzeti bazo iz prestavljenih potenc, in sicer

$$\{1, x - x_2, (x - x_2)^2, (x - x_2)^3, (x - x_2)^4, \dots\}.$$

V iskani formuli nato za f izbiramo bazne funkcije in predpostavimo, da napake ni. Dobimo sledeče enačbe:

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 : &\quad 0 = A + B + C + D + E, \\
f(x) = x - x_2 : &\quad 1 = -2hA - hB + hD + 2hE, \\
f(x) = (x - x_2)^2 : &\quad 0 = 4h^2A + h^2B + h^2D + 4h^2E, \\
f(x) = (x - x_2)^3 : &\quad 0 = -8h^3A - h^3B + h^3D + 8h^3E, \\
f(x) = (x - x_2)^4 : &\quad 0 = 16h^4A + h^4B + h^4D + 16h^4E.
\end{aligned}$$

Potrebujemo vsaj toliko enačb kolikor je neznank. Če bi slučajno dobili odvisne enačbe, bi dodali še naslednjo enačbo, itd. V tem primeru imamo pet neodvisnih enačb za pet neznank, rešimo sistem in dobimo

$$A = \frac{1}{12h}, \quad B = -\frac{2}{3h}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2}{3h}, \quad E = -\frac{1}{12h},$$

od koder sledi

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}f(x_0) - \frac{2}{3h}f(x_1) + \frac{2}{3h}f(x_3) - \frac{1}{12h}f(x_4) + Ff^{(m)}(\xi),$$

Izračunati moramo še koeficienta F in m. Koeficient m je enak stopnji baznega polinoma, pri katerem dobljena formula ni več točna. Če za f izberemo $f(x) = (x - x_2)^5$ in vstavimo izračunane koeficiente dobimo

$$0 = \frac{1}{12h}\left(-32h^5 + 8h^5 + 8h^5 - 32h^5\right) + Ff^{(m)}(\xi).$$

Ker je prvi del na desni strani enačbe različen od nič, je $m = 5$ in $Ff^{(m)}(\xi) = 5!F$. Iz enačbe nato izračunamo F in dobimo $F = \frac{h^4}{30}$. Celotna formula se tako glasi

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}f(x_0) - \frac{2}{3h}f(x_1) + \frac{2}{3h}f(x_3) - \frac{1}{12h}f(x_4) + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi).$$

Pri aproksimaciji odvodov imamo dve vrsti napake: napako metode in napako aritmetike. Napaka metode $Rf = \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$ gre očitno proti nič, ko gre $h \to 0$. Ker pa v formuli delimo s h, napaka aritmetike narašča z manjšanjem h-ja. Optimalen korak h je tisti, pri katerem je vsota obeh napak minimalna. Ocenimo obe napaki:

$$\begin{aligned} |D_m| &= \frac{h^4}{30}\left|f^{(5)}(\xi)\right| \leq \frac{h^4}{30}\max_{\xi\in[0,1]}\left|f^{(5)}(\xi)\right| = \frac{h^4}{30}120 = 4h^4, \\ |D_a| &\leq \frac{1}{12h}\left(\epsilon + 8\epsilon + 8\epsilon + \epsilon\right) = \frac{18\epsilon}{12h}, \quad \epsilon = 5\cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Ocena za skupno napako je tako $D(h) = 4h^4 + \frac{18\epsilon}{12h}$. Optimalni h je rešitev enačbe $D'(h) = 0$, in sicer je $h = \sqrt[5]{\frac{3}{32}\epsilon} = 0.05422$.

Naloga 2.4. *Izpeljite formulo za numerično odvajanje oblike*

$$f''(x_2) = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df(x_3) + Ef(x_4) + Ff^{(m)}(\xi),$$

pri čemer so $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne točke s korakom h. Ocenite celotno napako in določite optimalni korak h, če za izračunane funkcijske vrednosti velja $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| < 5\cdot 10^{-6}$ ter je $\|f^{(m)}\|_\infty \leq 100$.

Rešitev:

Rešimo nalogo z uporabo *metode nedoločenih koeficientov*. Za bazo prostora polinomov vzemimo prestavljene potence $\{1, x - x_2, (x - x_2)^2, (x - x_2)^3, (x - x_2)^4, \ldots\}$. Če v iskani formuli za f izbiramo bazne funkcije in predpostavimo, da napake ni, dobimo sledeče enačbe:

$$\begin{aligned} f(x) = 1: &\quad 0 = A + B + C + D + E, \\ f(x) = x - x_2: &\quad 0 = -2hA - hB + hD + 2hE, \\ f(x) = (x - x_2)^2: &\quad 2 = 4h^2A + h^2B + h^2D + 4h^2E, \\ f(x) = (x - x_2)^3: &\quad 0 = -8h^3A - h^3B + h^3D + 8h^3E, \\ f(x) = (x - x_2)^4: &\quad 0 = 16h^4A + h^4B + h^4D + 16h^4E. \end{aligned}$$

Iz teh petih enačb sledi

$$A = -\frac{1}{12h^2}, \quad B = \frac{16}{12h^2}, \quad C = \frac{-30}{12h^2}, \quad D = \frac{16}{12h^2}, \quad E = -\frac{1}{12h^2}.$$

Pri tako določenih koeficientih je formula točna vsaj za vse polinome stopnje ≤ 4. Če zapišemo še enačbo za $f(x) = (x - x_2)^5$, pri čemer seveda upoštevamo izračunane koeficiente, dobimo enačbo

$$0 = \frac{1}{12h^2}\left(32h^5 - 16h^5 + 16h^5 - 32h^5\right) + R(x - x_2)^5.$$

Ker pa je prvi del desne strani enak levi strani enačbe sledi, da je formula točna tudi za polinome stopnje 5. Nadaljujemo z $f(x) = (x - x_2)^6$. Vstavimo in dobimo

$$0 = \frac{1}{12h^2}\left(-64h^5 + 16h^5 + 16h^5 - 64h^5\right) + R(x - x_2)^6. \tag{2.1}$$

V tem primeru prvi del desne strani ni enak levi strani enačbe, zato je $R(x - x_2)^6 \neq 0$. Če predpostavimo, da je $Rf = Ff^{(6)}(\xi)$, sledi iz (2.1) enačba

$$0 = -\frac{1}{12h^2}96h^6 + 6!F,$$

od koder dobimo $F = \frac{h^4}{90}$. Celotna formula je tako enaka

$$f''(x_2) = \frac{1}{12h^2}\left(-f(x_0) + 16f(x_1) - 30f(x_2) + 16f(x_3) - f(x_4)\right) + \frac{h^4}{90}f^{(6)}(\xi).$$

Ocena napake metode in napake apritmetike je za dan primer enaka

$$\begin{aligned} D_m &\leq \frac{h^4}{90}\|f^{(6)}\|_\infty = \frac{10}{9}h^4, \\ D_a &\leq \frac{64\epsilon}{12h^2}, \quad \epsilon = 5 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

od koder dobimo oceno za skupno napako $D(h) = \frac{10}{9}h^4 + \frac{64\epsilon}{12h^2}$, ki pa je minimalna pri $h = \sqrt[6]{2.4\epsilon} = 0.2221$.

Poglavje 3

Numerična integracija

Naloga 3.1.

Izračunajte približek za integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)dx$ *z uporabo osnovnega trapeznega pravila ter osnovnega Simpsonovega pravila. Primerjajte dobljen rezultat s točnim.*

Rešitev:
Po osnovnem trapeznem pravilu

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + R(f)$$

dobimo

$$I \sim \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = 0.27768.$$

Po osnovnem Simpsonovem pravilu

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + R(f)$$

dobimo

$$I \sim \frac{\pi}{24}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = 0.292933.$$

Točna vrednost integrala je $I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.292893$, napaki sta torej velikosti 0.015213 ter 0.000039419.

Naloga 3.2.

Izračunajte približek za integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$ *z uporabo sestavljenega trapeznega pravila ter sestavljenega Simpsonovega pravila. V obeh pravilih uporabite* $m = 2, 4, 6, 8$ *osnovnih pravil. Primerjajte dobljene rezultate s točnim integralom.*

Rešitev:
Točna vrednost integrala je $I = 1$. Z uporabo sestavljenega trapeznega pravila za $m = 2, 4, 6, 8$ dobimo vrednosti

$$0.9480594490, \quad 0.9871158010, \quad 0.9942818883, \quad 0.9967851719,$$

s sestavljenim Simpsonovim pravilom pa

$$1.000134585, \quad 1.000008296, \quad 1.000001634, \quad 1.000000517.$$

Absolutne vrednosti razlik med točnim in izračunanim integralom so v prvem primeru enake

$$0.0519405510, \quad 0.0128841990, \quad 0.0057181117, \quad 0.0032148281,$$

v drugem pa

$$0.000134585, \quad 8.296 \cdot 10^{-6}, \quad 1.634 \cdot 10^{-6}, \quad 5.17 \cdot 10^{-7}.$$

Naloga 3.3.

Izpeljite zaprto Newton-Cotesovo integracijsko pravilo oblike

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df(x_3) + Ef^{(m)}(\xi),$$

kjer so točke $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne s korakom h. Uporabite:

1. *Lagrangeevo interpolacijsko formulo;*
2. *metodo nedoločenih koeficientov.*

Zapišite tudi sestavljeno pravilo za aproksimacijo integrala $\int_a^b f(x)dx$. Ocenite napako sestavljenega pravila.

Rešitev:

1. S pomočjo Lagrangeeve interpolacijske formule

$$f(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\ell_{i,3}(x) + \omega(x)[x_0, x_1, x_2, x_3, x]f,$$

kjer je $\omega(x) = \prod_{i=0}^{3}(x - x_i)$, dobimo, da so koeficienti enaki

$$A = \int_{x_0}^{x_3} \ell_{0,3}(x)dx, \quad B = \int_{x_0}^{x_3} \ell_{1,3}(x)dx,$$
$$C = \int_{x_0}^{x_3} \ell_{2,3}(x)dx, \quad D = \int_{x_0}^{x_3} \ell_{3,3}(x)dx.$$

Integrale enostavno izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $x = x_0 + th$. Na primer,

$$A = \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \int_0^3 \frac{h^3(t-1)(t-2)(t-3)}{-6h^3} hdt =$$
$$= -\frac{h}{6}\int_0^3 \left(t^3 - 6t^2 + 11t - 6\right) dt = \frac{3h}{8}.$$

Podobno dobimo

$$B = C = \frac{9h}{8}, \quad D = \frac{3h}{8}.$$

Napaka je oblike

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_3} \omega(x)[x_0, x_1, x_2, x_3, x] f dx.$$

2. Pri metodi nedoločenih koeficientov določimo neznane koeficiente tako, da bo formula točna za polinome čim višjih stopenj. Za bazo prostora polinomov vzemimo prestavljene potence $\{1, x-x_0, (x-x_0)^2, (x-x_0)^3, (x-x_0)^4, \ldots\}$. Če v iskani formuli za f izberemo bazne funkcije in predpostavimo, da napake ni, dobimo sledeče enačbe:

$$\begin{aligned} f(x) = 1: &\quad 3h = A + B + C + D, \\ f(x) = x - x_0: &\quad \frac{(3h)^2}{2} = hB + 2hC + 3hD, \\ f(x) = (x-x_0)^2: &\quad \frac{(3h)^3}{3} = h^2B + 4h^2C + 9h^2D, \\ f(x) = (x-x_0)^3: &\quad \frac{(3h)^4}{4} = h^3B + 8h^3C + 27h^3D. \end{aligned}$$

Iz teh štirih enačb sledi

$$A = B\frac{3h}{8}, \quad B = C = \frac{9h}{8}.$$

Pri tako določenih koeficientih je formula točna vsaj za vse polinome stopnje ≤ 3. Če zapišemo še enačbo za $f(x) = (x-x_0)^4$, pri čemer seveda upoštevamo izračunane koeficiente, dobimo enačbo

$$\frac{(3h)^5}{5} = \frac{3h}{8}\left(3h^4 + 3\cdot 16h^4 + 81h^4\right) + R(x-x_2)^4.$$

Ker je prvi del desne strani različen od leve strani, vzamemo $m = 4$ in velja

$$Ef^{(m)}(\xi) = 4!E.$$

Iz enačbe nato izračunamo $E = -\frac{3}{80}h^5$. Celotna formula se tako glasi

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right) - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi).$$

Za računanje integrala na poljubnem intervalu $[a,b]$ uporabimo sestavljeno pravilo. Naj bo le to zgrajeno iz n-osnovnih pravil. V tem primeru razdelimo interval $[a,b]$ na $3n$ ekvidistantnih delov s korakom $h=\frac{b-a}{3n}$, to je $x_i=x_0+ih$, $i=0,1,\ldots,3n$. Na vsakem od podintervalov nato uporabimo osnovno pravilo in dobimo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} f(x)dx = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{3h}{8}\left(f(x_{3i})+3f(x_{3i+1})+3f(x_{3i+2})+f(x_{3i+3})\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi_i),\end{aligned}$$

pri čemer je $\xi_i\in(x_{3i},x_{3i+3})$. Napaka $R(f)$ sestavljenega pravila je tako enaka

$$R(f)=-\frac{3}{80}h^5\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\xi_i).$$

Iz ocene

$$n\min_{x\in[a,b]}f^{(4)}(x)\le\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\xi_i)\le n\max_{x\in[a,b]}f^{(4)}(x)$$

za dovolj gladko funkcijo f dobimo

$$\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\xi_i)=nf^{(4)}(\xi),\quad \xi\in(a,b).$$

Sledi

$$R(f)=-\frac{3}{80}h^5 nf^{(4)}(\xi)=-\frac{3}{80}h^5\frac{b-a}{3h}f^{(4)}(\xi)=-\frac{1}{80}h^4(b-a)f^{(4)}(\xi).$$

Vidimo, da smo na račun sestavljenega pravila izgubili en red natančnosti.

Naloga 3.4. *Izpeljite integracijsko pravilo*

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx=h\left(Af(x_0)+Bf(x_1)\right)+h^2\left(Cf'(x_0)+Df'(x_1)\right)+Ef^{(m)}(\xi),$$

kjer je $x_1=x_0+h$*. Iz izpeljanega pravila sestavite sestavljeno pravilo za računanje integrala* $\int_a^b f(x)dx$*. Ocenite napako sestavljenega pravila. Na koliko delov moramo vsaj razdeliti interval* $[0,1]$ *pri računanju integrala*

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x},$$

da bo napaka manjša od 10^{-5}*.*

Rešitev:
Izpeljimo pravilo z uporabo metode nedoločenih koeficientov. Za bazo prostora polinomov vzemimo prestavljene potence $\{1,x-x_0,(x-x_0)^2,(x-x_0)^3,(x-x_0)^4,\ldots\}$. Če v

iskani formuli za f izberemo bazne polinome in predpostavimo, da napake ni, dobimo sledeče enačbe:

$$\begin{aligned} f(x) = 1: &\quad h = hA + hB, \\ f(x) = x - x_0: &\quad \frac{h^2}{2} = h^2B + h^2C + h^2D, \\ f(x) = (x-x_0)^2: &\quad \frac{h^3}{3} = h^3B + 2h^2CD, \\ f(x) = (x-x_0)^3: &\quad \frac{h^4}{4} = h^4B + 3h^4D. \end{aligned}$$

Iz teh štirih enačb sledi

$$A = B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{12}, \quad D = -\frac{1}{12}.$$

Pri tako določenih koeficientih je formula točna vsaj za vse polinome stopnje ≤ 3. Če zapišemo še enačbo za $f(x) = (x - x_0)^4$, pri čemer seveda upoštevamo izračunane koeficiente, dobimo enačbo

$$\frac{h^5}{5} = \frac{h^5}{2} - \frac{1}{3}h^5 + R(x - x_2)^4.$$

Ker je prvi del desne strani različen od leve strani, vzamemo $m = 4$ in $Ef^{(m)}(\xi) = 4!E$. Iz enačbe nato izračunamo E in dobimo $E = \frac{1}{720}h^5$. Celotna formula se tako glasi

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)) + \frac{h^2}{12}\left(f'(x_0) - f'(x_1)\right)) + \frac{1}{720}h^5 f^{(4)}(\xi).$$

Poglejmo si sedaj sestavljeno pravilo. Naj bo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^2}{12}\left(f'(x_i) - f'(x_{i+1})\right) + R(f) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) + \frac{h^2}{12}\left(f'(a) - f'(b)\right) + R(f) = \\ &= \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right) + \frac{h^2}{12}\left(f'(a) - f'(b)\right) + R(f). \end{aligned}$$

Napaka je velikosti

$$R(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{720}h^5 f^{(4)}(\xi_i)$$

kjer so $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Če predpostavimo, da je f dovolj gladka, dobimo iz

$$n \min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i) \leq n \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x),$$

da je $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i) = nf^{(4)}(\xi)$, pri čemer je $\xi \in (a,b)$. Od tod sledi

$$R(f) = \frac{1}{720}h^5 n f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{720}h^4(b-a)f^{(4)}(\xi).$$

Za določitev koraka h pri računanju integrala $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ moramo oceniti napako $R(f)$. Ker je $f^{(4)}(x) = \frac{4!}{(1+x)^5}$, je $\|f^{(4)}\| = 4!$. Sledi, da mora biti

$$\begin{aligned} \frac{1}{720}h^4(b-a)|f^{(4)}(\xi)|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{720}h^4 4! &< 10^{-5} \\ h^4 &< 3\cdot 10^{-4} \\ h &< 0.1316, \end{aligned}$$

oziroma $n > 7.5983$. Interval moramo torej razdeliti na vsaj 8 delov.

Naloga 3.5. *Integral* $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ *računamo preko sestavljenega trapeznega pravila. Ocenite na koliko delov moramo razdeliti interval, da bo napaka manjša od* 10^{-6}*.*

Rešitev:
Sestavljeno trapezno pravilo je oblike

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) - \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi),$$

kjer so

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Izbrati moramo tak korak h, da bo napaka $R(f)$ manjša od 10^{-6},

$$\left|\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)\right| < \frac{h^2}{12}(b-a)\|f''\|_{\infty,[0,1]} < 10^{-6}.$$

Izračunamo

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}.$$

Kandidati za ekstrem so ničle odvoda

$$f^{(3)}(x) = (-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2})' = 4xe^{-x^2}(3-2x^2) = 0,$$

ki so enake

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

ter krajišča intervala. Ker $\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \notin [0,1]$ in ker je $f^{(3)}(0) = 2$, $f^{(3)}(1) = 2e^{-1}$, je $\|f''\|_{\infty,[0,1]} = 2$. Sledi, da mora biti $h < \sqrt{6 \cdot 10^{-6}} = 2.4495 \cdot 10^{-3}$ oziroma $n > 408.248$. Interval moramo torej razdeliti na vsaj $n = 409$ delov. V tem primeru dobimo, da je $I \sim 0.7468237663$, točna vrednost integrala je $I = 0.7468241328$, razlika pa je $3.67 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$.

Naloga 3.6. *Izpeljite odprto Newton-Cotesovo pravilo z eno točko. Zapišite sestavljeno pravilo in določite napako pri računanju integrala $\mathcal{C}^2$ funkcije.*

Rešitev:
Pravilo bo oblike

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = Af(x_1) + R(f),$$

kjer so $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2$, ekvidistantne točke. Če integriramo formulo

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)[x_1, x]f$$

dobimo, da je $A = 2h$. Napaka je enaka

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)[x_1, x]f dx.$$

Deljena diferenca $[x_1, x]f =: g(x)$ je funkcija spremenljivke x. Zato lahko zapišemo

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_1) + (x - x_1)[x_1, x]g = [x_1, x_1]f + (x - x_1)[x_1, x]([x_1, x]f) = \\ &= [x_1, x_1]f + (x - x_1)[x_1, x_1, x]f, \end{aligned}$$

od koder sledi

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)\left([x_1, x_1]f + (x - x_1)[x_1, x_1, x]f\right) dx.$$

Ker pa je $\omega(x) = x - x_1$ ortogonalna na 1 glede na skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)dx,$$

to je $\langle \omega, 1\rangle = 0$, je

$$\int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)[x_1, x_1]f dx = [x_1, x_1]f \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)dx = 0.$$

Dobimo torej, da je

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)^2[x_1, x_1, x]f dx = \frac{f''(\xi)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)^2 dx = \frac{1}{3}h^3 f''(\xi),$$

pri čemer smo upoštevali, da $(x - x_1)^2$ ne spremeni predznaka na intervalu integracije.

Zapišimo še sestavljeno pravilo. Naj bo

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Tedaj je

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + R(f),$$

kjer je

$$R(f) = \frac{1}{3}h^3 \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = \frac{1}{3}h^3 n f''(\xi) = \frac{1}{6}h^2 f''(\xi)$$

za $\xi_i \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ ter $\xi \in (a, b)$.

Naloga 3.7. *Integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ računamo s sestavljenim Simpsonovim pravilom s korakom $h = \frac{\pi}{8}$ in $\frac{h}{2}$.*

1. *Izračunajte oba približka za vrednost integrala.*
2. *Ocenite napako za oba približka in jo primerjajte z dejansko vrednostjo napake.*
3. *Ocenite obe napaki z uporabo Richardsonove ekstrapolacije.*
4. *Iz izračunanih vrednosti ekstrapolirajte točnejšo vrednost integrala.*

Rešitev:
Z uporabo sestavljenega Simpsonovega pravila dobimo

$$\begin{aligned}
I_h &= \frac{\pi}{24}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 1.000134585,\\
I_{\frac{h}{2}} &= \frac{\pi}{48}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{16} + 2\sin\frac{\pi}{8} + 4\sin\frac{3\pi}{16} + 2\sin\frac{\pi}{4} + \right.\\
&\qquad \left. +4\sin\frac{5\pi}{16} + 2\sin\frac{3\pi}{8} + 4\sin\frac{7\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 1.000008296.
\end{aligned}$$

Napaki sta enaki

$$|I - I_h| = 1.3458 \cdot 10^{-4}, \quad \left|I - I_{\frac{h}{2}}\right| = 8.2955 \cdot 10^{-6}.$$

Ocenimo napako približka z uporabo formule

$$R_h f = \frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\xi).$$

Ker je $\|f^{(4)}\|_\infty = 1$, velja

$$|R_h f| \leq \left(\frac{\pi}{8}\right)^4 \frac{1}{180}\frac{\pi}{2} = 2.0753 \cdot 10^{-4}, \quad \left|R_{\frac{h}{2}} f\right| \leq \left(\frac{\pi}{16}\right)^4 \frac{1}{180}\frac{\pi}{2} = 1.297 \cdot 10^{-5}.$$

Ocenimo sedaj napako približka z uporabo Richardsonove ekstrapolacije. Velja

$$Sf = F_h f + R_h f = F_{\frac{h}{2}} f + R_{\frac{h}{2}} f$$

in

$$R_h f = \frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\xi), \quad R_{\frac{h}{2}} f = \frac{h^4}{2^4 \cdot 180}(b-a) f^{(4)}(\mu).$$

Predpostavimo, da je $f^{(4)}(\xi) \sim f^{(4)}(\mu)$. Tedaj je $R_h f \sim 16 R_{\frac{h}{2}} f$ in

$$R_{\frac{h}{2}} f = Sf - F_{\frac{h}{2}} f = F_h f + R_h f - F_{\frac{h}{2}} f \sim F_h f - F_{\frac{h}{2}} f + 16 R_{\frac{h}{2}} f$$

od koder sledi

$$R_{\frac{h}{2}} f \sim \frac{F_h f - F_{\frac{h}{2}} f}{15}.$$

V našem primeru imamo

$$R_{\frac{h}{2}} f \sim \frac{I_2 - I_1}{15} = 8.4193 \cdot 10^{-6}, \quad R_h f \sim 1.3471 \cdot 10^{-4},$$

kar kaže, da te ocene lepo sledijo dejanski oceni napake. Ker je

$$Sf \sim F_h f + 16 R_{\frac{h}{2}} f, \quad Sf = F_{\frac{h}{2}} f + R_{\frac{h}{2}} f$$

pa velja tudi

$$Sf \sim \frac{16 F_{\frac{h}{2}} f - F_h f}{15}.$$

Ekstrapolirana vrednost je tako enaka

$$I_3 = \frac{16 I_2 - I_1}{15} = 0.9999998762, \quad |I_3 - I| = 1.2377 \cdot 10^{-7}.$$

Naloga 3.8. *Kako bi izračunali dvojni integral*

$$I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy$$

z uporabo sestavljenega trapeznega pravila. Kakšna je napaka?

Rešitev:
Z uporabo Fubinijevega izreka dvojni integral prevedemo na dvakratnega. Razdelimo interval $[a,b]$ na n delov, interval $[c,d]$ pa na m delov. Naj velja

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, x_i = x_0 + ih, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$
$$k = \frac{d-c}{m}, \quad y_0 = c, y_j = y_0 + jk, \quad j = 0,1,\ldots,m.$$

Tedaj je

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{x_0}^{x_n} dx \int_{y_0}^{y_m} f(x,y)dxdy = \\
&= \int_{x_0}^{x_n} \left(\frac{k}{2} \left(f(x,y_0) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x,y_j) + f(x,y_m) \right) + R_y f \right) dx = \\
&= \frac{k}{2}\frac{h}{2} \Bigg(f(x_0,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_0) + f(x_n,y_0) + R_0 f \\
&\quad 2\sum_{j=1}^{m-1} \left(f(x_0,y_j) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_j) + f(x_n,y_j) + R_j f \right) + \\
&\quad f(x_0,y_m) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_m) + f(x_n,y_m) + R_m f \Bigg) + \int_{x_0}^{x_n} R_y f dx,
\end{aligned}
$$

kjer so napake enake

$$
\begin{aligned}
R_y f &= -\frac{k^2}{12}(d-c) \int_{x_0}^{x_n} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,\mu) dx, \\
R_j f &= -\frac{h^2}{12}(b-a) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\xi_j, y_j), \quad j = 0,1,\ldots,m.
\end{aligned}
$$

Integracijsko pravilo je torej oblike

$$
I = \frac{hk}{4} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} f(x_i,y_j) + Rf,
$$

pri čemer so

$$
a_{i,j} = \alpha_i \beta_j, i = 0,1,\ldots,n, \quad j = 0,1,\ldots,m
$$

za

$$
(\alpha_i)_{i=0}^{n} := (1,2,2,\ldots,2,1), \quad (\beta_i)_{j=0}^{m} := (1,2,2,\ldots,2,1).
$$

Napaka je enaka

$$
\begin{aligned}
Rf &= -\frac{k^2}{12}(d-c) \int_{x_0}^{x_n} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,\mu) dx - \\
&- \frac{kh^2}{24}(b-a) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\xi_0,y_0) + 2\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\xi_j,y_j) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\xi_m,y_m) \right) = \\
&= -\frac{k^2}{12}(d-c)(b-a) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\xi,\mu) dx - \frac{kh^2}{24}(b-a) 2m \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\tilde{\xi},\tilde{\mu}) = \\
&= -\frac{k^2}{12}(d-c)(b-a) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\xi,\mu) - \frac{h^2}{12}(b-a)(d-c) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\tilde{\xi},\tilde{\mu}) = \\
&= -\frac{1}{12}(d-c)(b-a) \left(k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\xi,\mu) + h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\tilde{\xi},\tilde{\mu}) \right).
\end{aligned}
$$

Naloga 3.9. *Naj bo D trikotnik z ogljišči*

$$A(-h,0), \quad B(h,0), \quad C=(0,\sqrt{3}h).$$

Določite neznane koeficiente a,b,c v izrazu

$$\iint_D f(x,y)dxdy = af(A)+bf(B)+cF(C)+Rf,$$

tako da bo formula točna za polinome čim višjih stopenj.

Rešitev:
Neznane koeficiente določimo z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots$$

Dobimo enačbe

$$\begin{aligned}
f(x,y)=1: &\quad \iint_D dxdy = \sqrt{3}h^2 = a+b+c,\\
f(x,y)=x: &\quad \iint_D xdxdy = 0 = -ah+bh,\\
f(x,y)=y: &\quad \iint_D ydxdy = h^3 = \sqrt{3}hc,
\end{aligned}$$

iz katerih sledi

$$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}h^2.$$

Pravilo je enako

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2\left(f(-h,0)+bf(h,0)+cF(0,\sqrt{3}h)\right)+Rf.$$

Predpostavimo, da je napaka oblike

$$Rf = c_1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_1,\mu_1)+c_2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi_2,\mu_2)+c_3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi_3,\mu_3).$$

Neznane c_1, c_2, c_3 dobimo iz enačb

$$\begin{aligned}
f(x,y)=x^2: &\quad \iint_D x^2dxdy = \frac{\sqrt{3}}{6}h^4 = \frac{\sqrt{3}}{3}2h^4+2c_1,\\
f(x,y)=y^2: &\quad \iint_D y^2dxdy = \frac{\sqrt{3}}{2}h^4 = \sqrt{3}h^4+2c_2,\\
f(x,y)=xy: &\quad \iint_D xydxdy = 0 = 0+c_3,\\
&\implies \quad c_1=c_2=-\frac{\sqrt{3}}{4}h^4, \quad c_3=0.
\end{aligned}$$

Napaka je torej enaka

$$Rf = -\frac{\sqrt{3}}{4}h^4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_1,\mu_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi_2,\mu_2)\right).$$

Naloga 3.10. *Določite uteži α_0, α_1 ter vozla x_0, x_1 v Gaussovi integracijski formuli*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + Rf.$$

Določite tudi napako Rf.

Rešitev:
Neznana vozla x_0 in x_1 določimo tako, da bo $\omega \perp 1$ ter $\omega \perp x$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

kjer je $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$. Iz zgornjih dveh pogojev sledita enačbi

$$\int_{-1}^{1} (x - x_0)(x - x_1)dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} x(x - x_0)(x - x_1)dx = 0.$$

Prva enačba se poenostavi v

$$\int_{-1}^{1} (x - x_0)(x - x_1)dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1\right) dx = \frac{2}{3} + 2x_0x_1 = 0,$$

iz druge pa dobimo

$$\int_{-1}^{1} x(x - x_0)(x - x_1)dx = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - (x_0 + x_1)x^2 + x_0x_1x\right) dx = -\frac{2}{3}(x_0 + x_1) = 0.$$

Rešitev teh dveh enačb nam da neznana vozla

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Uteži lahko določimo z uporabo interpolacijskega polinoma, lahko pa tudi z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo polinome $\{1, x, x^2, \dots\}$ in dobimo enačbe

$$\begin{aligned} f(x) = 1 : &\quad \int_{-1}^{1} dx = 2 = \alpha_0 + \alpha_1 \\ f(x) = x : &\quad \int_{-1}^{1} xdx = 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_1. \end{aligned}$$

Iz teh dveh enačb sledi

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1$$

in pravilo je enako

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + Rf.$$

Napako dobimo po formuli za napako Gaussovega pravila:

$$Rf = \int_{-1}^{1} \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, x]f dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{-1}^{1} \omega^2(x)dx = \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi).$$

Dobljeno pravilo se imenuje Gauss-Legendrovo integracijsko pravilo na dveh točkah.

Naloga 3.11. *Določite uteži α_0, α_1, α_2 ter vozle x_0, x_1, x_2 v Gaussovi integracijski formuli*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + Rf.$$

Določite tudi napako Rf.

Rešitev:

Neznane vozle x_0, x_1 in x_2 določimo tako, da bo $\omega \perp 1$, $\omega \perp x$ ter $\omega \perp x^2$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

kjer je

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Iz zgornjih treh pogojev dobimo enačbe

$$\int_{-1}^{1}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0,$$
$$\int_{-1}^{1} x(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0,$$
$$\int_{-1}^{1} x^2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0.$$

Poglejmo si najprej, kako izračunamo integrale oblike

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Če je n lih je vrednost integrala enaka 0, za sode $n = 2k$, pa integral pretvorimo na Beta funkcijo z uporabo nove spremenljivke $u = x^2$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}dx &= 2\int_{0}^{1} \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\ &= 2\int_0^1 \frac{u^k}{\sqrt{1-u}}\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \int_0^1 u^{k-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}du = \\ &= B\left(k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)}.\end{aligned}$$

Iz te formule dobimo z upoštevanjem $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ter $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ sledeče vrednosti:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi,$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{3\pi}{8},$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{5\pi}{16}.$$

S pomočjo teh integralov se prva enačba poenostavi v

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= \int_{-1}^{1}\left(-x^2(x_0+x_1+x_2)-x_0x_1x_2\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= -(x_0+x_1+x_2)\frac{\pi}{2}-x_0x_1x_2\pi = 0,
\end{aligned}$$

iz druge dobimo

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}x(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= \int_{-1}^{1}\left(x^4+x^2(x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= \frac{3\pi}{8}+(x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)\frac{\pi}{2} = 0,
\end{aligned}$$

ter iz tretje

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}x^2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= \int_{-1}^{1}\left(-x^4(x_0+x_1+x_2)-x_0x_1x_2x^2\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= -(x_0+x_1+x_2)\frac{3\pi}{8}-x_0x_1x_2\frac{\pi}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Dobili smo nelinearen sistem enačb

$$\begin{aligned}
(x_0+x_1+x_2)+2x_0x_1x_2\pi &= 0, \\
3+4(x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2) &= 0, \\
3(x_0+x_1+x_2)+4x_0x_1x_2\frac{\pi}{2} &= 0,
\end{aligned}$$

za katerega pa se da enostavno izračunati rešitev. In sicer je

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Uteži določimo z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo polinome $1, x, x^2, \ldots$ in dobimo enačbe

$$\begin{aligned}
f(x) = 1: &\quad \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi = \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \\
f(x) = x: &\quad \int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2, \\
f(x) = x^2: &\quad \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\alpha_0+\frac{3}{4}\alpha_2.
\end{aligned}$$

Rešitev se glasi

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Pravilo je enako

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{3}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{3}f\left(0\right) + \frac{\pi}{3}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + Rf.$$

Napako dobimo po formuli za napako Gaussovega pravila:

$$\begin{aligned}
Rf &= \int_{-1}^{1} \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x]f\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1} \omega^2(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{32}\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} = \frac{\pi}{23040}f^{(6)}(\xi).
\end{aligned}$$

Dobljeno pravilo se imenuje Gauss-Čebiševo integracijsko pravilo na treh točkah.

Naloga 3.12. *Določite uteži α_0, α_1, α_2 ter vozle x_0, x_1, x_2 v Gaussovi integracijski formuli*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-|x|}dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + Rf.$$

Določite tudi napako Rf.

Rešitev:
Neznane vozle x_0, x_1 in x_2 določimo tako, da bo $\omega \perp 1$, $\omega \perp x$ ter $\omega \perp x^2$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-|x|}dx,$$

kjer je

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Iz teh treh pogojev dobimo enačbe

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)e^{-|x|}dx = 0, \\
\int_{-\infty}^{\infty} x(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)e^{-|x|}dx = 0, \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)e^{-|x|}dx = 0,
\end{aligned}$$

ki se poenostavijo v

$$\begin{aligned}
2(x_0 + x_1 + x_2) + x_0x_1x_2 = 0, \\
12 + (x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) = 0, \\
12(x_0 + x_1 + x_2) + x_0x_1x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Rešitev dobljenega nelinearnega sistema se glasi

$$x_0 = -2\sqrt{3}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2\sqrt{3}.$$

Neznane uteži določimo z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo polinome $1, x, x^2, \ldots$ in dobimo enačbe

$$\begin{aligned} f(x) = 1: &\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ f(x) = x: &\quad \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}dx = 0 = -2\sqrt{3}\alpha_0 + 2\sqrt{3}\alpha_2, \\ f(x) = x^2: &\quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-|x|}dx = 4 = 12\alpha_0 + 12\alpha_2, \end{aligned}$$

katerih rešitev je enaka

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_1 = \frac{10}{6}.$$

Pravilo je tako

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-|x|}dx = \frac{1}{6}f\left(-2\sqrt{3}\right) + \frac{10}{6}f(0) + \frac{1}{6}f\left(2\sqrt{3}\right) + Rf.$$

Napako dobimo po formuli za napako Gaussovega pravila:

$$Rf = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2(x)e^{-|x|}dx = \frac{6}{5}f^{(6)}(\xi).$$

Naloga 3.13. *Določite koeficiente c_1, c_2, c_3 v formuli*

$$\int_a^{a+2h} (x-a)^\beta f(x)dx = c_1 f(a) + c_2 f(a+h) + c_3 f(a+2h) + Rf$$

za računanje zlimitiranega integrala za vse $\beta > -1$. Določite tudi napako Rf za dovolj gladko funkcijo f.

Rešitev:
Neznane koeficiente lahko določimo z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo polinome

$$1,\ x-a,\ (x-a)^2,\ (x-a)^3, \ldots$$

in dobimo enačbe

$$\begin{aligned} f(x) = 1: &\quad \int_a^{a+2h} (x-a)^\beta dx = \frac{(2h)^{\beta+1}}{\beta+1} = c_1 + c_2 + c_3, \\ f(x) = x-a: &\quad \int_a^{a+2h} (x-a)^{\beta+1} dx = \frac{(2h)^{\beta+2}}{\beta+2} = c_2 h + 2c_3 h, \\ f(x) = (x-a)^2: &\quad \int_a^{a+2h} (x-a)^{\beta+2} dx = \frac{(2h)^{\beta+3}}{\beta+3} = c_2 h^2 + 4c_3 h^2. \end{aligned}$$

Iz teh treh enačb izračunamo

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}(1-\beta), \\ c_2 &= 4\frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+2)(\beta+3)}, \\ c_3 &= \frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+2)(\beta+3)}(1+\beta). \end{aligned}$$

Pri tako določenih koeficientih je formula točna vsaj za vse polinome stopnje ≤ 2. Če zapišemo še enačbo za $f(x) = (x-a)^3$, pri čemer seveda upoštevamo izračunane koeficiente, dobimo enačbo

$$\frac{(2h)^{\beta+4}}{\beta+4} = 4\frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+2)(\beta+3)}h^3 + 8\frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+2)(\beta+3)}(1+\beta)h^3 + 3!C,$$

od koder izračunamo

$$C = -\frac{2^{\beta+2}\beta}{3(\beta+2)(\beta+3)(\beta+4)}h^{\beta+4}.$$

Celotna formula se tako glasi

$$\begin{aligned} &\int_a^{a+2h} (x-a)^\beta f(x)dx = \\ &= \frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}\Big((1-\beta)f(a) + 4(\beta+1)f(a+h) + (\beta+1)^2 f(a+2h)\Big) - \\ &\quad \frac{2^{\beta+2}\beta}{3(\beta+2)(\beta+3)(\beta+4)}h^{\beta+4}f^{(3)}(\xi). \end{aligned}$$

Naloga 3.14. *Izračunajte zlimitirani integral*

$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$$

na dva načina.

1. *S substitucijo odstranite singularnost in uporabite Simpsonovo pravilo.*

2. *Izpeljite formulo*

$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = c_1 f(0) + c_2 f(h) + c_3 f(2h) + Rf.$$

Oba načina preizkusite za primer, ko je $f(x) = e^{-x}$ *in* $h = 0.1$*. Kako bi izračunali integral* $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$*?*

Rešitev:

1. Če uvedemo novo spremenljivko $x = t^2$ se integral poenostavi v
$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{2h}} f\left(t^2\right) dt.$$
Ta integral izračunamo s Simpsonovim pravilom in dobimo
$$\int_0^{\sqrt{2h}} f\left(t^2\right) dt = \frac{\sqrt{2h}}{6} \left(f(0) + 4f(h/2) + f(2h)\right) + Rf,$$
kjer je napaka
$$Rf = -\frac{1}{90} \left(\frac{\sqrt{2h}}{2}\right)^5 \frac{d^4}{dt^4} f\left(t^2\right)\Big|_{t=\xi} = -\frac{1}{90} 2^{-5/2} h^{5/2} \frac{d^4}{dt^4} f\left(t^2\right)\Big|_{t=\xi} = \mathcal{O}\left(h^{5/2}\right).$$
V primeru $f(x) = e^{-x}$ dobimo približek
$$\int_0^{0.2} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx \sim \frac{\sqrt{0.2}}{3} \left(e^{-0} + 4e^{-0.1} + e^{-0.2}\right) = 0.838324.$$

2. Uporabimo lahko nalogo 3.13 in dobimo pravilo
$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx =$$
$$= \frac{\sqrt{2h}}{15} \left(12f(0) + 16f(h) + 2f(2h)\right) - \frac{8}{315} \sqrt{2} h^{7/2} f^{(3)}(\xi) = \mathcal{O}\left(h^{7/2}\right).$$
V primeru $f(x) = e^{-x}$ dobimo približek
$$\int_0^{0.2} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx \sim \frac{\sqrt{0.2}}{15} \left(12e^{-0} + 16e^{-0.1} + 2e^{-0.2}\right) = 0.838223.$$

Točna vrednost integrala je 0.838212. Vidimo, da dobimo v drugem primeru točnejši približek.

Pri računanju integrala
$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$$
bi interval integracije razdelili na dva dela: $[0, 2h]$ ter $[2h, 1]$. Na prvem delu bi uporabili izpeljano pravilo, drugi integral pa bi izračunali s sestavljenim Simpsonovim pravilom oziroma s katerimkoli drugim pravilom, ki bi imel napako reda vsaj $\mathcal{O}\left(h^{7/2}\right)$.

Naloga 3.15. *Kako bi numerično izračunali naslednje integrale:*

1. $\int_0^1 x^{-1/3} \sin x dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/2}} dx$

3. $\displaystyle\int_1^\infty x^{-3/2} \sin \frac{1}{x} dx$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$

Rešitev:

1. Če uvedemo novo spremenljivko $x = t^3$ dobimo
$$\int_0^1 x^{-1/3} \sin x dx = 3 \int_0^1 t \sin t^3 dt.$$
Ta integral ni več singularen in ga lahko izračunamo s katerimkoli integracijskim pravilom. Temu pravimo *odpravljiva singularnost*.

2. Poskusimo *elimininirati singularnost*:
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/2}} dx = \int_0^1 \frac{\cos x - 1 + 1}{x^{1/2}} dx = \int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^{1/2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx = \\ = \int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^{1/2}} dx + 2.\end{aligned}$$
Prvi integral nima več singularnosti, saj je
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^{1/2}} = 0,$$
drugi integral pa se je dal analitično izračunati. Ponavadi si pri *eliminaciji singularnosti* pomagamo z razvojem v Taylorjevo vrsto.

3. V integral uvedemo novo spremenljivko $t = 1/x$ in dobimo
$$\int_1^\infty x^{-3/2} \sin \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt.$$
Dobljen integral izračunamo z uporabo naloge 3.14.

4. Integral razbijemo na dva dela in v drugem uporabimo novo spremeljivko $t = 1/x$:
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^4} dx = \\ = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4} dt = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.\end{aligned}$$
Dobljen integral ni več zlimitiran in ga lahko izračunamo s katerimkoli integracijskim pravilom.

5. Integral razbijemo na dva dela in v drugem uporabimo novo spremeljivko $t = 1/x$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3} dx dx &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3} dx + \int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3} dx + \int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^2)^3} dt = \int_0^1 \frac{1+x^4}{(1+x^2)^3} dx.\end{aligned}$$

Dobljen integral ni več zlimitiran in ga lahko izračunamo s katerimkoli integracijskim pravilom.

Poglavje 4

Numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb

Naloga 4.1. *Začetni problem*

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1,$$

rešujemo z eksplicitno Eulerjevo metodo. S korakom $h = 0.1$ *določite numerična približka* $y_1 \sim y(0.1)$ *ter* $y_2 \sim y(0.2)$.

Rešitev:
Po eksplicitni Eulerjevi metodi računamo približke za rešitev diferencialne enačbe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

po formuli

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

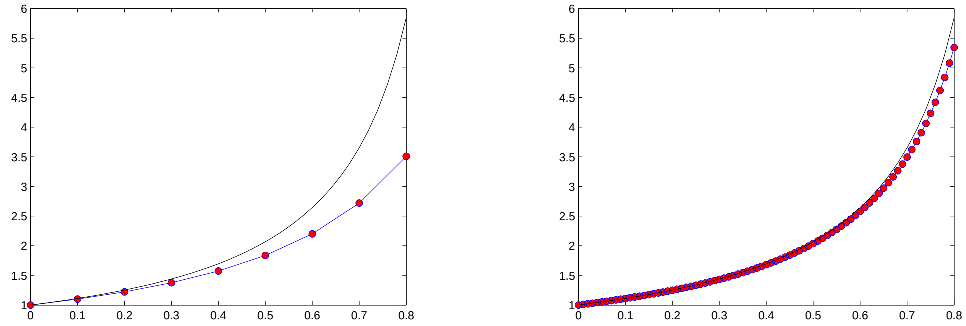
Za dan primer dobimo

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \\
&x_1 = 0.1, \quad y_1 = y_0 + h\left(x_0^2 + y_0^2\right) = 1.1, \\
&x_2 = 0.2, \quad y_2 = y_1 + h\left(x_1^2 + y_1^2\right) = 1.222.
\end{aligned}$$

Graf numerične in točne rešitve na intevalu $[0, 1]$ za korak $h = 0.1$ in $h = 0.01$ je prikazan na sliki 4.1.

Naloga 4.2. *S pomočjo Taylorjevega polinoma stopnje* 4 *izračunajte numerični približek za rešitev* $y(0.1)$ *diferencialne enačbe*

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$



Slika 4.1: Numerična rešitev pri koraku $h = 0.1$ (levo) ter $h = 0.01$ (desno) ter točna rešitev (črn graf) diferencialne enačbe $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

Rešitev:
Če poznamo vrednost $y(x_n)$, potem dobimo približek za $y(x_{n+1}) = y(x_n + h)$ tako, da razvijemo funkcijo y v Taylorjevo vrsto okrog točke x_n,

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n) + \ldots,$$

in razvoj odrežemo pri neki izbrani potenci m. Odvode neznane funkcije y v točki x_n izračunamo z odvajanjem funkcije f. In sicer je

$$y^{(k)}(x) = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f(x, y(x)) =: f^{(k)}(x, y(x)), \quad k \geq 1,$$

oziroma

$$\begin{aligned} y' &= f, \\ y'' &= \frac{d}{dx} f = f_x + f_y f, \\ y''' &= \frac{d^2}{dx^2} f = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y(f_x + f_y f), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Taylorjeva metoda reda m se tako glasi

$$y_{n+1} = y_n + hf'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m-1)}(x_n, y_n).$$

Za dano diferencialno enačbo velja

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2, \\ y'' &= 2x + 2yy', \\ y''' &= 2 + 2y'^2 + 2yy'', \\ y^{(4)} &= 6y'y'' + 2yy''' \end{aligned}$$

in v točki $x = 0$ dobimo

$$y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 8, \quad y^{(4)}(0) = 28.$$

Nov približek je tako enak

$$y_1 = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2} 2 + \frac{(0.1)^3}{6} 8 + \frac{(0.1)^4}{24} 28 = 1.11145.$$

Čeprav lahko dobimo preko razvoja v Taylorjevo vrsto metode poljubnega reda, se le te v praksi ne uporabljajo, saj so računsko prezahtevne - zahtevajo preveč izračunov vrednosti funkcije f ter njenih odvodov.

Naloga 4.3. *Izpeljite trapezno formulo*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right)$$

za reševanje začetnega problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Rešitev:
Diferencialno enačbo integriramo in za aproksimacijo integrala na desni strani uporabimo trapezno pravilo:

$$\begin{aligned}
\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \\
y(x_{n+1}) - y(x_n) &= \frac{h}{2} \left(f\left(x_n, y(x_n)\right) + f\left(x_{n+1}, y(x_{n+1})\right) \right) - \frac{h^3}{12} f''(\xi, y(\xi)).
\end{aligned}$$

Napako zanemarimo in točne vrednosti nadomestimo s približnimi $y_n \sim y(x_n)$. Dobimo iskano metodo, ki je implicitna in ima red lokalne napake enak 3.

Naloga 4.4. *Diferencialno enačbo*

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 0,$$

rešujemo s trapezno formulo iz naloge 4.3. S korakom $h = 0.1$ določite numerični približek $y_1 \sim y(0.1)$.

Rešitev:
Po trapezni metodi dobimo

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \left(x_0^2 - y_0^2 + x_1^2 - y_1^2 \right), \quad x_0 = 0, x_1 = x_0 + h,$$

kar nam da kvadratno enačbo

$$\frac{h}{2} y_1^2 + y_1 - y_0 - \frac{h}{2} \left(x_0^2 + x_1^2 - y_0^2 \right) = 0$$

za neznan y_1. Dobimo dve rešitvi

$$y_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2hy_0 + h^2(x_0^2 + x_1^2 - y_0^2)}}{h},$$

vprašanje je, katero izbrati. Če izberemo predznak $-$, potem je $\lim\limits_{h\to 0} y_1 = -\infty$, če izberemo predznak $+$, pa dobimo $\lim\limits_{h\to 0} y_1 = y_0$. Nov približek je tako enak

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2hy_0 + h^2(x_0^2 + x_1^2 - y_0^2)}}{h}.$$

Za $y_0 = 0$ in $h = 0.1$ dobimo

$$y_1 = 4.999875 \cdot 10^{-4}.$$

Naloga 4.5. *Diferencialno enačbo*

$$y' = -50y + 100, \quad y(0) = y_0,$$

rešujemo z eksplicitno Eulerjevo metodo $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. *Izpeljite splošno formulo za numerične približke* y_n *ter določite vrednosti* h*, pri katerih numerični približek konvergira k točni rešitvi, ko gre* $x \to \infty$. *Komentirajte obnašanje numerične rešitve glede na različne vrednosti* h.

Rešitev:

Ker je enačba linearna, lahko izpeljemo splošno formulo za približke y_n. In sicer velja

$$\begin{aligned}
y_n &= y_{n-1} + h(-50x_{n-1} + 100) = y_{n-1}(1 - 50h) + 100h = \\
&= (y_{n-2}(1 - 50h) + 100h)\,(1 - 50h) + 100h = \\
&= y_{n-2}(1 - 50h)^2 + 100h\,((1 - 50h) + 1) = \\
&= y_{n-3}(1 - 50h)^3 + 100h\,\Big((1 - 50h)^2 + (1 - 50h) + 1\Big) = \dots \\
&= y_0(1 - 50h)^n + 100h\,\Big((1 - 50h)^{n-1} + \cdots + (1 - 50h) + 1\Big) = \\
&= y_0(1 - 50h)^n + 100h\frac{1 - (1 - 50h)^n}{50h} = \\
&= (y_0 - 2)(1 - 50h)^n + 2.
\end{aligned}$$

Točna rešitev je enaka

$$y(x) = (y_0 - 2)e^{-50x} + 2$$

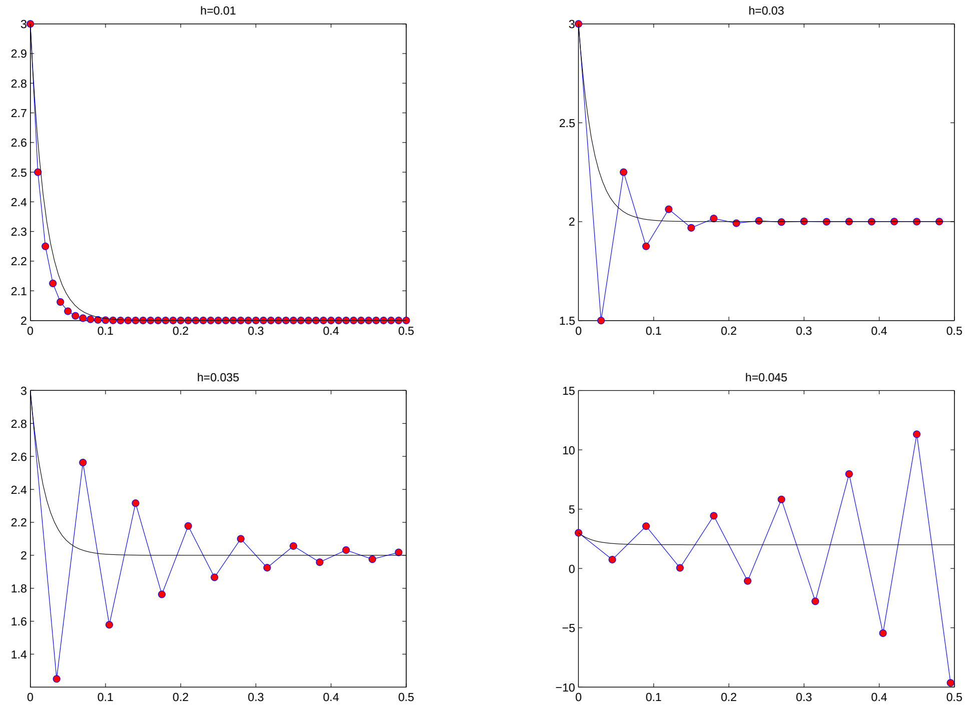
in zanjo velja, da je

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 2.$$

Numerična rešitev gre proti nič, ko gre $n \to \infty$, če velja pogoj $|1 - 50h| < 1$. Ta pogoj je izpolnjen za

$$h \in \left(0, \frac{1}{50}\right] \cup \left(\frac{1}{50}, \frac{1}{20}\right).$$

Za $h \in \left(\frac{1}{50}, \frac{1}{20}\right)$ numerična rešitev konvergira proti točni, vendar oscilira. Na sliki 4.2 lahko vidimo primere numerične rešitve za $h = 0.1, 0.3, 0.35, 0.45$.



Slika 4.2: Numerična rešitev diferencialne enačbe $y' = -50y + 100$, $y_0 = 3$ z eksplicitno Eulerjevo metodo s koraki $h = 0.1, 0.3, 0.35, 0.45$.

Naloga 4.6. *Diferencialno enačbo*

$$y' = -50y + 100, \quad y(0) = y_0,$$

rešujemo z implicitno Eulerjevo metodo $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$. Izpeljite splošno formulo za numerične približke y_n ter določite vrednosti h, pri katerih numerični približek konvergira k točni rešitvi, ko gre $x \to \infty$.

Rešitev:
Približek za točno vrednost v točki x_n dobimo tako, da rešimo enačbo

$$y_n = y_{n-1} + h(-50y_n + 100).$$

Ker je diferencialna enačba linearna, neznanka y_n tudi nastopa linearno. Dobimo

$$y_n = \frac{y_{n-1} + 100h}{1 + 50h}.$$

Nadaljujemo in dobimo

$$
\begin{aligned}
y_n &= \frac{\frac{y_{n-2}+100h}{1+50h}+100h}{1+50h} = \frac{y_{n-2}+100h+100h(1+50h)}{(1+50h)^2} = \\
&= \frac{y_{n-3}+100h+100h(1+50h)++100h(1+50h)^2}{(1+50h)^3} = \dots \\
&= \frac{y_0+100h\left(1+(1+50h)+\cdots+(1+50h)^{n-1}\right)}{(1+50h)^n} = \\
&= (y_0-2)\frac{1}{(1+50h)^n}+2.
\end{aligned}
$$

Za točno rešitev

$$y(x) = (y_0-2)e^{-50x}+2$$

velja, da je

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 2.$$

Numerična rešitev gre proti nič, ko gre $n \to \infty$, če velja pogoj $\frac{1}{|1-50h|} < 1$, kar pa je res za vsak $h > 0$. Pravimo, da je metoda A-stabilna.

Naloga 4.7. *Diferencialno enačbo*

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0 \neq 0,$$

rešujemo z eksplicitno Eulerjevo metodo $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. Izpeljite splošno formulo za numerične približke y_n ter obravnavajte obnašanje numerične rešitve, ko gre $n \to \infty$ glede na različne vrednosti a in h.

Rešitev:
Ker je enačba linearna, lahko izpeljemo splošno formulo za približke y_n. In sicer velja

$$y_n = y_{n-1} + ahy_{n-1} = (1+ah)y_{n-1} = (1+ah)^2 y_{n-2} = \cdots = (1+ah)^n y_0.$$

Točna rešitev v točki x_n je enaka

$$y(x_n) = y_0 \left(e^{ah}\right)^n.$$

Če je $a > 0$, potem točna rešitev raste, ko gre $x \to \infty$, prav tako pa tudi numerična za vsak $h > 0$. Ker velja $1 < 1 + ah < e^{ah}$, raste numerična rešitev počasneje od točne. Za $a = 0$, sta obe rešitvi enaki $y = y_h = y_0$. Za $a < 0$, pa numerična rešitev sledi točni, če je izpolnjen pogoj $|1 + ah| < 1$ oziroma za $0 < h < -2/a$.

Naloga 4.8. *Določite red lokalne napake eksplicitne Eulerjeve metode.*

Rešitev:
Lokalna napaka je razlika med numeričnim približkom y_{n+1} ter točno vrednostjo rešitve v točki x_{n+1} ob predpostavki, da se obe rešitvi ujemata na vseh prejšnjih korakih. Če razvijemo točno rešitev v Taylorjevo vrsto okrog x_n in upoštevamo

$$\begin{aligned} y' &= f, \\ y'' &= f_x + f_y f, \\ y'' &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f), \quad \ldots \end{aligned} \tag{4.1}$$

dobimo

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \mathcal{O}\left(h^3\right) = \\ = y(x_n) + hf\left(x_n, y(x_n)\right) + \frac{h^2}{2}\left(f_x\left(x_n, y(x_n)\right) + f_y\left(x_n, y(x_n)\right) f\left(x_n, y(x_n)\right)\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pri lokalni napaki predpostavimo, da je $y(x_n) = y_n$. Razlika je tako enaka

$$\begin{aligned} & y_{n+1} - y(x_{n+1}) = y_n + hf(x_n, y_n) - y(x_{n+1}) = y_n + hf(x_n, y_n) + \\ & - \left(y_n + hf\left(x_n, y_n\right) + \frac{h^2}{2}\left(f_x\left(x_n, y_n\right) + f_y\left(x_n, y_n\right) f\left(x_n, y_n\right)\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right)\right) = \\ & = -\frac{h^2}{2}\left(f_x\left(x_n, y_n\right) + f_y\left(x_n, y_n\right) f\left(x_n, y_n\right)\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right) \end{aligned}$$

Lokalna napaka je torej reda 2.

Naloga 4.9. *Določite red lokalne napake implicitne Eulerjeve metode.*

Rešitev:
Lokalna napaka je enaka

$$\tau_{n+1}(h) = y_{n+1} - y(x_{n+1}),$$

ob predpostavki, da velja $y_{n-k} = y(x_{n-k})$ za vse $k \geq 0$. Razvijmo najprej v Taylorjevo vrsto okrog točke (x_n, y_n) prirastek $f(x_{n+1}, y_{n+1})$. Z upoštevanjem razvoja

$$\begin{aligned} & f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \\ & + \frac{1}{2}f_{xx}(x, y)\Delta x^2 + f_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}f_{yy}(x, y)\Delta y^2 + \mathcal{O}\left((\Delta x + \Delta y)^2\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

dobimo

$$\begin{aligned} & f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) = f\left(x_n + h, y_n + hf\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)\right) = \\ & = f\left(x_n, y_n\right) + hf_x\left(x_n, y_n\right) + hf_y\left(x_n, y_n\right) f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right) = \\ & = f\left(x_n, y_n\right) + hf_x\left(x_n, y_n\right) + hf_y\left(x_n, y_n\right)\left(f\left(x_n, y_n\right) + \mathcal{O}\left(h\right)\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right) = \\ & = f\left(x_n, y_n\right) + hf_x\left(x_n, y_n\right) + hf_y\left(x_n, y_n\right) f\left(x_n, y_n\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right). \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je razvoj numerične rešitve enak

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + h^2 f_x(x_n, y_n) + h^2 f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^3\right).$$

Primerjamo z razvojem točne rešitve, pri čemer upoštevamo formule (4.1), in dobimo

$$\tau_{n+1}(h) = y_{n+1} - y(x_{n+1}) = \frac{1}{2}h^2 \left(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^3\right).\right)$$

Lokalna napaka je torej reda 2.

Naloga 4.10. *Rešujemo diferencialno enačbo*

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1.$$

Z Runge-Kutta metodo

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

s korakom $h = 0.1$ določite numerični približek $y_1 \sim y(0.1)$.

Rešitev:
Iz $x_0 = 0$ in $y_0 = 1$ izračunamo koeficiente

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0) = \frac{1}{10}(-2x_0y_0) = 0, \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = \frac{1}{10}(-2)(x_0 + 0.05)(y_0 + 0) = -0.01, \\ k_3 &= hf(x_0 + h, y_0 - k_1 + 2k_2) = \frac{1}{10}(-2)(x_0 + 0.1)(y_0 - 0 - 0.02) = 0.0196, \end{aligned}$$

od koder dobimo

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}k_1 + \frac{4}{6}k_2 + \frac{1}{6}k_3 = 0.9900666$$

Naloga 4.11. *Z Runge-Kutta metodo*

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

rešujemo začetni problem

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0,$$

pri čemer je $\lambda < 0$. *Zapišite splošno formulo za numerične približke* y_n *pri izbranem koraku* h. *Kako velik je lahko korak* h, *da se bo numerična rešitev obnašala kot točna, ko gre* $x \to \infty$. *Določite inteval absolutne stabilnosti za* $\lambda = -4$ *ter* $\lambda = -100$.

Rešitev:
Najprej izračunamo koeficiente

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) = h\lambda y_n,\\
k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) = h\lambda\left(y_n + \frac{1}{2}k_1\right) = h\lambda y_n\left(1 + \frac{1}{2}h\lambda\right),\\
k_3 &= hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) = h\lambda(y_n - k_1 + 2k_2) = h\lambda y_n\left(1 + h\lambda + h^2\lambda^2\right)
\end{aligned}$$

in nato

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{4}{6}k_2 + \frac{1}{6}k_3 = y_n\left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3\right).$$

Od tod sledi, da je

$$y_n = y_0\left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3\right)^n.$$

Točna rešitev je enaka

$$y(x) = y_0 e^{\lambda x}$$

in zanjo velja, da za $\lambda < 0$ pada proti nič, ko gre $x \to \infty$. Za numerično rešitev bo to res, če bo izpolnjen pogoj

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3\right| < 1.$$

Uporabimo sledeče rezultate, ki jih lahko preverimo npr. v Mathematici:

$$\left|1 - x + \frac{1}{2}x^2\right| < 1 \quad \text{za} \quad 0 < x < 2, \tag{4.4}$$

$$\left|1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right| < 1 \quad \text{za} \quad 0 < x < 2.51275, \tag{4.5}$$

$$\left|1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4\right| < 1 \quad \text{za} \quad 0 < x < 2.78529. \tag{4.6}$$

Iz (4.5) sledi, da mora za korak h veljati

$$h \in \left(0, \frac{2.51275}{-\lambda}\right).$$

Dobljen interval imenujemo interval absolutne stabilnosti. Za $\lambda = -4$ je enak $(0, 0.6281)$, za $\lambda = -100$ pa $(0, 0.0251275)$.

Naloga 4.12. *Določite red lokalne napake izboljšane Eulerjeve metode oziroma 2-stopenjske Runge-Kutta metode*

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Rešitev:
Lokalna napaka je enaka

$$\tau_{n+1}(h) = y_{n+1} - y(x_{n+1}),$$

ob predpostavki, da velja $y_{n-k} = y(x_{n-k})$ za vse $k \geq 0$. Razvijmo najprej v Taylorjevo vrsto okrog (x_n, y_n) koeficiete k_i. Zaradi večje preglednosti izpuščajmo argumente. Dobimo

$$\begin{aligned} k_1 &= hf, \\ k_2 &= hf\left(\cdot + \frac{h}{2}, \cdot + \frac{1}{2}k_1\right) = \\ &= h\left(f + \frac{h}{2}f_x + \frac{1}{2}k_1 f_y + \frac{h^2}{8}f_{xx} + \frac{h}{4}k_1 f_{xy} + \frac{1}{8}k_1^2 f_{yy} + \mathcal{O}\left(h^3\right)\right) = \\ &= h\left(f + \frac{h}{2}f_x + \frac{h}{2}f_y f + \frac{h^2}{8}f_{xx} + \frac{h^2}{4}f_{xy}f + \frac{h^2}{8}f_{yy}f^2 + \mathcal{O}\left(h^3\right)\right). \end{aligned}$$

Od tod dobimo razvoj numeričnega približka y_{n+1}:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n &+ hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f_x(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n) + \\ &+ \frac{h^3}{8}f_{xx}(x_n, y_n) + \frac{h^3}{4}f_{xy}(x_n, y_n)f(x_n, y_n) + \frac{h^3}{8}f_{yy}(x_n, y_n)f^2(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^4\right). \end{aligned}$$

Ob predpostavki, da je $y_n = y(x_n)$, je razvoj točne rešitve $y(x_{n+1})$ enak

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) = y(x_n + h) &= y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(f_x + f_y f\right)(x_n, y_n) + \\ &+ \frac{h^3}{6}\left(f_{xx} + f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f)\right)(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^4\right), \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali (4.1). Lokalna napaka je tako enaka

$$\tau_{n+1}(h) = -\frac{1}{6}h^3\left(\frac{1}{4}f_{xx} + \frac{1}{2}f_{xy}f + \frac{1}{4}f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f)\right)(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^4\right).$$

Lokalna napaka je reda 3, metoda pa reda 2.

Literatura

[1] S.D. Conte, C. de Boor: *Elementary Numerical Analysis*, McGraw Hill, New York, 1980.

[2] E. Isaacson, H.B. Keller: *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley, New York, 1966.

[3] D. Kincaid, W. Cheney: *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1996.

[4] J. Kozak: *Numerična analiza*, DMFA - založništvo, Ljubljana 2008.